

Near-Domain について

岡山大学理学部数学教室 田中 克己 (Katsumi Tanaka)
Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Okayama Univ.

1 はじめに

置換群の研究で, sharply 2-transitive group と near-domain はお互いに自分自身の中に解釈可能であることが知られている [K]. モデル理論では, Nesin らが Morley rank 有限の sharply 2-transitive group の分類をしようとした [BDN],[BN],[DN],[N1],[N2],[DN]. このとき, 彼らは [BN] など near-domain についても研究している. このノートでは, near-domain に焦点をあて, 代数的およびモデル論的考察を試みる.

定義 1 (G, X) が sharply 2-transitive group とは, 群 G が集合 X に作用して

$$\forall x, y, c, d \in X \exists! g \in G, gx = c \text{ かつ } gy = d.$$

が成り立つこととする.

$x \in X$ を固定する. $G_x = \{g \in G | gx = x\}$ と定める. 以降, 簡単のため $G_x = H$ とおく. involution $i \in H$ を一つ選び, もう一つ別の involution $w \in H$ を選ぶ. 0 を新しい定数記号で $(wi)^0 = 1, 0^{-1} = 0$ をみたすものとする. $\hat{H} = H \cup \{0\}$ と定義する. $h_1, h_2, h \in \hat{H}$ にたいして,

$$h_1 + h_2 = h \iff (wi)^{h_1-1} (wi)^{h_2-1} \in (wi)^{h-1} H$$

と加法を定義する. 特に, $h \in H$ にたいして,

$$0 \cdot h = h \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

と定める.

構造 $\langle \hat{H}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ が near-domain となる. ここで, 一般に構造 $\langle D, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ が near-domain とは次の公理をみたすこととする.

Axiom.

ND1. $\langle D, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ は loop.

$$\text{L1. } \forall x, 0 + x = x + 0$$

$$\text{L2. } \forall a, b \exists! x, a + x = b$$

$$\text{L3. } \forall a, b \exists! x, x + a = b$$

$$\text{ND2. } \forall a, b \quad a + b = 0 \implies b + a = 0$$

$$\text{ND3. } \langle D^*, \cdot, 1 \rangle \text{ は群. ここで, } D^* = D - \{0\}.$$

$$\text{ND4. } \forall a \quad 0a = a0 = 0$$

$$\text{ND5. } \forall a, b, c \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$\text{ND6. } \forall a, b \exists d_{a,b} \in D^* \quad \forall x \quad a + (b + x) = (a + b) + d_{a,b}x$$

D を near-domain とする.

$$G(D) = \{(a, m) | a, m \in D, m \neq 0\}$$

とおく. $(a, m)(x) = a + mx$ という作用を考えると, $G(D)$ は $\text{Sym}(D)$ の部分群となり, $G(D)$ は D に sharply 2-transitive に作用する. 実際,

- $(0, 1)$ が $G(D)$ の単位元.
- $(b, n)(a, m) = (b + na, d_{b,na}nm)$
- $(a, m)^{-1} = (-(m^{-1}a), m^{-1})$

near-domain D の標数をもって, sharply 2-transitive group $G(D)$ の標数とする.

2 Near-domain と Near-field

次に構造 $\langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ が near-field とは以下の公理をみたすものとする.

Axiom

$$\text{NF1. } K^+ = \langle K, +, 0 \rangle \text{ は群}$$

$$\text{NF2. } K^* = \langle K - \{0\}, \cdot, 1 \rangle \text{ は群}$$

$$\text{NF3. } \forall x, y, z \quad x(y + z) = xy + xz$$

$$\text{NF4. } \forall x \quad x0 = 0x = 0$$

ここで注意として,

- 各 near-field は dear-domain.
- D を near-domain としたとき,

$$\begin{aligned} D \text{ は near-field} &\iff \langle D, + \rangle \text{ は群} \\ &\iff d_{a,b} = 1, \forall a, b \in D \end{aligned}$$

ところが, 現状はというと,

Fact 2 *near-field* でない *near-domain* は知られていない.

そうなのです. こんなこともまだ分かっていないのです.

例 3 (Dickson *near-field*)

$\langle F, +, * \rangle$ を斜体とする. $\alpha: F^* \rightarrow \text{Aut}(F^*, +, *)$ なる α にたいし, $x \cdot y = x * \alpha(x)(y)$ としたとき, $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ は *near-field* になる.

Fact 4 [Hrushovski]

strongly minimal な *near-domain* は *near-field* である.

定義 5 *near-domain* D の核 (kernel) $\ker(D)$ を

$$\ker(D) = \{d \in D \mid (a+b)d = ad + bd \quad \forall a, b \in D\}$$

と定義する.

Fact 6 [Cherlin et al]

F を Morley rank 有限な *near-field*, $\ker(D)$ は無限とすると, F は代数閉体となる.

次の定理を示す前にいくつかテクニカルな補題を用意しておく. 証明の計算はそれほど難しくはない.

補題 7 D を *near-domain*. 任意の $a, b, c \in D$ にたいして次が成り立つ.

- (i) $a \cdot 0 = 0$
- (ii) $d_{a,0} = d_{0,a} = 1$
- (iii) $a + b = d_{a,b}(b + a)$
- (iv) $d_{a,a} = 1$
- (v) $cd_{a,b}c^{-1} = d_{ca,cb}$
- (vi) $d_{a,b}^{-1} = d_{b,a}$
- (vii) $d_{a+b,b} = d_{a,b}$
- (viii) $x + a = b \Rightarrow x = -a + d_{a,b}b$

定理 8 $\langle D, +, \cdot \rangle$ を *near-domain* とし, $\ker$ をその核とする. このとき,

$$\exists k \in K, \quad 1 + k \in K \implies \langle D, +, \cdot \rangle \text{ は } \textit{near-field}.$$

Proof. $k, 1+k \in K$ とする.

Claim 1. $d_{k,1} = 1$

$$\begin{aligned}
 1 + (k + (1 + k)) &= (1 + k) + d_{1,k}(1 + k) \\
 &= (1 + d_{1,k})(1 + k) \\
 &= (1 + d_{1,k}) + (1 + d_{1,k})k \\
 &= 1 + d_{1,k}d_{d_{1,k},1}(1 + d_{1,k})k \\
 &= 1 + d_{1,k} + (d_{1,k} + 1)k \\
 &= 1 + (d_{1,k} + (d_{1,k}k + k)) \\
 &= 1 + ((d_{1,k} + d_{1,k}k) + d_{d_{1,k},d_{1,k}k}k) \\
 &= 1 + (d_{1,k}(1 + k) + d_{d_{1,k},d_{1,k}k}k) \\
 &= 1 + (d_{1,k}(1 + k) + 1 \cdot d_{1,k} \cdot 1^{-1}k) \\
 &= 1 + d_{1,k}((1 + k) + k)
 \end{aligned}$$

したがって,

$$k + (1 + k) = d_{1,k}((1 + k) + 1) \quad (1)$$

また,

$$\begin{aligned}
 k + (1 + k) &= (k + 1) + d_{k,1} + k \\
 &= d_{k,1}(1 + k) + d_{k,1}k \\
 &= d_{k,1}((1 + k) + k)
 \end{aligned} \quad (2)$$

(1),(2) より,

$$(1 + k) + k = 0 \quad (3)$$

または,

$$d_{k,1} = d_{1,k} \quad (4)$$

(3) からは,

$$d_{k,1} = d_{-2^{-1},1} = 2 \cdot d_{-1,2} \cdot 2^{-1} = 2 \cdot d_{1,2} \cdot 2^{-1}$$

ここで,

$$d_{1,2} = (d_{2,1})^{-1} = (d_{1,1})^{-1} = 1^{-1} = 1$$

したがって, $d_{k,1} = 1$.

また, (4) から $d_{k,1} = 1$ が得られる.

Claim 2. $\forall a, b \quad a + b = b + a$.

$$\forall x \in F^*, \quad 1 = xd_{k,1}x^{-1} = d_{xk,x} = xd_{1,k}x^{-1} = d_{x,xk}$$

いま, $a, b \in F^*$ で $a' = ak^{-1}$, $b' = b(1+k)^{-1}$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}
 (a' + b')(1 + k) &= a'(1 + k) + b'(1 + k) \\
 &= a' + a'k + b \\
 &= a' + a + b \\
 &= a' + (a + d_{a',a}b) \\
 &= a' + (a + d_{a',a'k}b) \\
 &= a' + (a + b)
 \end{aligned} \tag{5}$$

また,

$$\begin{aligned}
 (a' + b')(1 + k) &= (a' + b) + (a' + b')k \\
 &= a' + (b' + d_{b',a}(a' + b')k) \\
 &= a' + (b' + (b' + a')k) \\
 &= a' + (b' + (b' + (b'k + a'k))) \\
 &= a' + (b' + (b'k + a)) \\
 &= a' + ((b' + b'k) + d_{b',b'k}a) \\
 &= a' + (b'(1 + k) + a) \\
 &= a' + (b + a)
 \end{aligned} \tag{6}$$

(5) と (6) より,

$$a + b = b + a$$

したがって, $d_{a,b} = 1$ □

系 9 $\langle F, +, \cdot \rangle$ を *near-domain* とする. F の標数が 3 ならば, これは *near-field*.

Proof. $k = 1$ とおく. $1 + 1 = -1 \in K$ □

References

- [BDN] A.Borovik, M.DeBonis and A.Nesin *On a class of doubly transitive ω -stable groups*, Journal of Algebra Vol.165 No.2(1994)345-257.
- [BN] A.Borovik and A.Nesin *Groups of finite Morley rank*, Oxford 1994.
- [DN] F.Delahan and Ali Nesin *Sharply 2-transitive groups revisited*, Doga, The Turkish J. Math. 17(1993)70-83.
- [H] Wilfrid Hodges *Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [K] William Kerby *On infinite sharply multiply transitive groups*. Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1974

- [N1] Ali Nesin *On sharply n -transitive superstable groups*, J.Pure and Applied Algebra 69(1990)73-88.
- [N2] Ali Nesin *Notes on sharply 2-transitive permutation groups*, Doga, The Turkish J. Math. 16(1992)39-54.
- [S] S.Shelah *Stable theories*, Israel J. of Math 7(1969)187-202.
- [W] F.Wagner *Stable Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 240, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.