

奇数次直交群の有限型多重旗多様体

龍谷大学・文学部 松木 敏彦

Toshihiko Matsuki

Faculty of Letters, Ryukoku University

1 多重旗多様体

G を無限体 $\mathbb{F}$ 上の代数群とし、 $P_1, \dots, P_k$ ($\neq G$) を G の放物型部分群とする。このとき、次の多重旗多様体の G -軌道分解を考える。

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= (G/P_1) \times \cdots \times (G/P_k) \\ &\cong (G \times \cdots \times G)/(P_1 \times \cdots \times P_k)\end{aligned}$$

ただし、 G は $\mathcal{M}$ に対角的に作用するものとする。すなわち

$$g \cdot (m_1, \dots, m_k) = (gm_1, \dots, gm_k)$$

とする。 $\mathcal{M}$ が有限個の G -軌道に分解されるとき、 $\mathcal{M}$ は有限型であるという。

[MWZ99] は $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ のとき、

(1) $k \geq 4$ ならば $\mathcal{M}$ は無限型であることを示し、

(2) 3 重旗多様体 $\mathcal{M} = (G/P_1) \times (G/P_2) \times (G/P_3)$ が有限型になるための P_1, P_2, P_3 の条件を与え、

(3) (2) のときの軌道分解を quiver を用いて記述した。

(ただし、彼らは $\mathbb{F}$ を代数的閉体と仮定している。) [MWZ00] では $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F})$ のときに同じことを行なった。

2 奇数次直交群の有限型多重旗多様体

2.1 奇数次直交群の旗多様体

$\mathbb{F}$ を標数 $\neq 2$ の無限体とし、 $\mathbb{F}^{2n+1}$ 上の対称双線形形式 $(\ , \)$ を

$$(e_i, e_j) = \delta_{i, 2n+2-j}$$

で定義する。ただし、 $e_1, \dots, e_{2n+1}$ は $\mathbb{F}^{2n+1}$ の標準基底である。このとき、 $2n+1$ 次 split 直交群 G が

$$\begin{aligned}G &= \{g \in \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{F}) \mid (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{F}^{2n+1}\} \\ & (= \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F}) \text{ と書く})\end{aligned}$$

で定義される。

$\mathbb{F}^{2n+1}$ の部分空間 V は $(V, V) = \{0\}$ のとき **isotropic** であるといい、さらに $\dim V = n$ のとき、**maximally isotropic** であるという。正の整数列 $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ であって

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p \leq n$$

を満たすものによって、 G の旗多様体

$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} = \{V_1 \subset \dots \subset V_p \mid \dim V_j = \alpha_1 + \dots + \alpha_j, V_p \text{ は isotropic}\}$$

が定義される。 G の標準的旗

$$\mathcal{F}_0 : \mathbb{F}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}e_{\alpha_1} \subset \dots \subset \mathbb{F}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}e_{\alpha_1 + \dots + \alpha_p}$$

によって、 G の標準的放物型部分群

$$P_{\mathbf{a}} = \{g \in G \mid g\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & A_p & & \\ & & & B & \\ & & & & A_p^* \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & A_1^* \end{pmatrix} \mid A_i \in \mathrm{GL}_{\alpha_i}(\mathbb{F}), B \in \mathrm{O}_{2\alpha_0+1}(\mathbb{F}) \right\}$$

が定義される。ただし、 $\alpha_0 = n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_p)$, $A_i^* = J_{\alpha_i} {}^t A_i^{-1} J_{\alpha_i}$,

$$J_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

とする。 $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ は G -等質であることが示せるので、 $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \cong G/P_{\mathbf{a}}$ である。

注意 2.1 split 特殊直交群 $G_0 = \{g \in G \mid \det g = 1\}$ ($= \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F})$ と書く) について $G = G_0 \sqcup (-I_{2n+1})G_0$ であるが、 $-I_{2n+1}$ は $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ に自明に作用するので、 $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ 上の G -軌道と G_0 -軌道は同じである。

2.2 $k \geq 4 \implies \mathcal{M}$ は無限型

命題 2.2 ([M14] Proposition 1.2) $G = \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F})$ の多重旗多様体 $\mathcal{M} = (G/P_1) \times \dots \times (G/P_k)$ ($P_j \neq G$) について、

$$k \geq 4 \implies \mathcal{M} \text{ は無限型}$$

注意 2.3 $k = 2$ のとき、写像 $(g_1, g_2) \mapsto g_2^{-1}g_1$ により、

$$G \setminus ((G/P_1) \times (G/P_2)) \cong P_2 \setminus G/P_1$$

であるから、Bruhat 分解により、 $\mathcal{M}$ は有限型である。

命題 2.2、注意 2.3 により $k = 3$ の場合だけを調べればよい。

2.3 有限型 3 重旗多様体

3 つの正整数列 $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \dots, \beta_q)$, $\mathbf{c} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ ($\alpha_1 + \dots + \alpha_p, \beta_1 + \dots + \beta_q, \gamma_1 + \dots + \gamma_r \leq n$) に対し、3 重旗多様体

$$\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$$

を考える。順序の入れ換えにより $p \leq q \leq r$ と仮定してよい。

命題 2.4 ([M14] Proposition 1.3) $\mathcal{M}$ が有限型 $\implies p = q = 1$

以下、 $p = q = 1$ とする。さらに、 $r = 1$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ とし、 $r \geq 2$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1$ としてよい。

命題 2.5 ([M14] Proposition 1.4) $\mathcal{M}$ が有限型のとき、

$$(C) \quad \max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < n \implies |\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2| < \infty$$

注意 2.6 (1) $\mathbb{F}$ が代数的閉体のとき、 $(\mathbb{F}^\times)^2 = \mathbb{F}^\times$

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{F}$ が有限体のとき、 $|\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2| = 2$

(3) $|\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$ となる体も多くある。例えば、有理数体 $\mathbb{Q}$ とか 1 変数有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ など。

定理 2.7 ([M14] Theorem 1.6) $p = q = 1$ とし、 $r = 1$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ とし、 $r \geq 2$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1$ とする。さらに条件 (C) も仮定する。このとき、 $\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$ が有限型であるための必要十分条件は次の (I), (II), (III), (IV) のいずれかが成り立つことである。

(I) $\alpha_1 = \beta_1 = n$

(II) $\alpha_1 = 1$

(III) $r = 1$ and $\gamma_1 = n$

(IV) $r = 2$ and $\beta_1 = n$

注意 2.8 (1) 写像 $(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_3^{-1}g_1, g_3^{-1}g_2)$ により、 $(G/P_{\mathbf{a}}) \times (G/P_{\mathbf{b}}) \times (G/P_{\mathbf{c}})$ 上の G -軌道分解は 2 重旗多様体 $\mathcal{D} = (G/P_{\mathbf{a}}) \times (G/P_{\mathbf{b}})$ 上の $P_{\mathbf{c}}$ -軌道分解と同一視できる。

(2) [L94], [S03] において、開 B -軌道 (B は G の Borel 部分群) を持つ 2 重旗多様体が分類されている ([L94] は $P_{\mathbf{a}}, P_{\mathbf{b}}$ が極大放物型部分群のとき)。

一方、 $\mathbb{F}$ が標数 0 の代数的閉体のとき、[B86], [V86] により

$$\mathcal{D} \text{ が開 } B\text{-軌道を持つ} \iff |B \setminus \mathcal{D}| < \infty$$

である。定理 1 の (I) と (II) は $\mathbf{c}$ について無条件であるので、 $\mathbf{c} = (1^n) = (1, \dots, 1)$ すなわち $P_{\mathbf{c}} = B$ のときも含まれ、この場合に当たる。

3 (III) 型の軌道分解

定理 2.7 において、(III) 型の有限性は軌道分解を具体的に与えることによって示される ([M14])。次の例 3.3、例 3.6 は (III) 型の最も簡単な場合であるが、(I) 型にも含まれる ([M13] Theorem 1.3)。

3.1 $n = 1$ のとき

$U_0 = \mathbb{F}e_1$, $U_1 = \mathbb{F}e_3$ とし、 $B = \{g \in G \mid gU_0 = U_0\}$ とおく。

補題 3.1 $\text{Fl}_{(1)} = \{U_0\} \sqcup \{\mathbb{F}((-x^2/2)e_1 + xe_2 + e_3) \mid x \in \mathbb{F}\} = \{U_0\} \sqcup BU_1 = \{U_0\} \sqcup BwU_0$ ($\text{Fl}_{(1)}$ の Bruhat 分解)。ただし、

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$$

とする。

証明 2 番目の等式の証明：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -x & -(x^2/2) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、 $g \in B$ であり、 $ge_3 = (-x^2/2)e_1 + xe_2 + e_3$ 。1 番目の等式は容易。3 番目の等式は明らか。□

系 3.2 $\text{Fl}_{(1)} = GU_0$

例 3.3 $n = 1$ のとき、 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = (1)$ である。3 つの 1 次元 isotropic subspace U_+ , U_- , V の配置を分類すればよい。

系 3.2 により、 $U_+ = U_0$ としてよい。

(1) $U_- = U_+ = U_0$ のとき、 V の B -軌道を分類すればよいので、補題 3.1 により、代表元は

$$U_0, \quad U_1$$

の 2 つである。

(2) $U_- \neq U_+$ のとき、補題 3.1 により $U_- = U_1$ としてよい。 $R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+, gU_- = U_-\}$ とおくと、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}^\times \right\}$$

である。 $\{\mathbb{F}((-x^2/2)e_1 + xe_2 + e_3) \mid x \in \mathbb{F}^\times\}$ は R -等質であるので、 V の代表元としては

$$U_0, \quad U_1, \quad \mathbb{F}\left(-\frac{1}{2}e_1 + e_2 + e_3\right)$$

の3つが取れる。

(1), (2) により、 $\mathcal{M} = \text{Fl}_{(1)} \times \text{Fl}_{(1)} \times \text{Fl}_{(1)}$ は5つの G -軌道に分解される。

3.2 $n = 2$ のとき

$U_0 = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2$, $U_1 = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_4$, $U_2 = \mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5$ とおき、 $P = \{g \in G \mid gU_0 = U_0\}$ とおく。

補題 3.4 $\text{Fl}_{(2)} = \{U_0\} \sqcup PU_1 \sqcup PU_2$

証明 V を $\mathbb{F}^5$ の2次元 isotropic subspace とする。 $V \supset U_0$ ならば、 $V = U_0$ であるので、 $\dim(V \cap U_0) \leq 1$ のときを考えればよい。

$\dim(V \cap U_0) = 1$ のとき： $A \in \text{GL}_2(\mathbb{F})$ に対し、

$$\ell(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & J_2 {}^t A^{-1} J_2 \end{pmatrix} \quad (J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

は P の元である。適当な $\ell(A)$ の作用により、 $V \cap U_0 = \mathbb{F}e_1$ としてよい。

$$V \subset (\mathbb{F}e_1)^\perp = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}e_4$$

であるので、補題 3.1 と同様にして

$$V = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}((-x^2/2)e_2 + xe_3 + e_4) \quad \text{for some } x \in \mathbb{F}$$

と書ける。さらに、補題 3.1 と同様に $ge_4 = (-x^2/2)e_2 + xe_3 + e_4$ を満たす $g \in P$ が作れるので、

$$V \in P(\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_4) = PU_1$$

である。

$\dim(V \cap U_0) = 0$ のとき： $V + U_0^\perp = (V^\perp \cap U_0)^\perp = (V \cap U_0)^\perp = \mathbb{F}^5$ であるから、次の形の V の元 v_1, v_2 が存在する ($x_{ij} \in \mathbb{F}$)。

$$\begin{aligned} v_1 &= e_4 + x_{11}e_1 + x_{21}e_2 + x_{31}e_3 \\ v_2 &= e_5 + x_{12}e_1 + x_{22}e_2 + x_{32}e_3 \end{aligned}$$

$(v_1, v_1) = (v_2, v_2) = (v_1, v_2) = 0$ であるので、 $g \in P$ が次で定義できる。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_{32} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & -x_{31} & x_{21} & x_{22} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって、 $V = g(\mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5) \in PU_2$ である。 $\square$

系 3.5 $\text{Fl}_{(2)} = GU_0$

例 3.6 $n = 2$, $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = (2)$ のときを考える。3つの2次元 (maximal) isotropic subspace U_+, U_-, V の配置を分類すればよい。

系 3.5 により、 $U_+ = U_0$ としてよい。さらに、補題 3.4 により、 $U_- = U_0, U_1, U_2$ の3つの場合を考えればよい。

(1) $U_- = U_0$ のとき、補題 3.4 により、 V の代表元として、

$$U_0, \quad U_1, \quad U_2$$

の3つが取れる。

(2) $U_- = U_1$ のとき： $W = U_+ \cap U_- = \mathbb{F}e_1$ とおき、 $R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+, gU_- = U_-\}$ とするとき、 $\text{Fl}_{(2)}$ を R -軌道分解すればよい。

(a) $V \supset W$ のとき、 $V \subset W^\perp = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}e_4$ であるから、例 3.3 と同様にして、

$$V = W \oplus \mathbb{F}e_2 \text{ または } W \oplus \mathbb{F}((-x^2/2)e_2 + xe_3 + e_4) \ (x \in \mathbb{F})$$

である。 $g = \text{diag}(1, a, 1, a^{-1}, 1)$ ($a \in \mathbb{F}^\times$) は R の元であるので、例 3.3 と同様にして、 V の R -軌道の代表元として、

$$U_+, \quad U_-, \quad \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4)$$

の3つが取れる。

(b) $V \cap W = \{0\}$ のとき、 $V \not\subset W^\perp$ であるから、 V は $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 + e_5$ ($x, y, z, w \in \mathbb{F}$, $(v, v) = 0$) の形の元を含む。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -w & -z & -y & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は R の元であって、 $ge_5 = v$ である。よって、 $g^{-1}V$ は $\mathbb{F}e_5$ を含み、 $(\mathbb{F}e_5)^\perp = \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5$ に含まれる。(a) の議論と同様にして、 V の R -軌道の代表元として

$$\mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, \quad \mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5, \quad \mathbb{F}\left(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4\right) \oplus \mathbb{F}e_5$$

の 3 つが取れる。

(3) $U_- = U_2$ のとき : $R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+, gU_- = U_-\}$ とおくと、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \pm 1 & \\ 0 & & J_2^t A^{-1} J_2 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \right\}$$

である。 $\mathrm{Fl}_{(2)}$ を R -軌道分解すればよい。 $d = \dim(V \cap U_+) + \dim(V \cap U_-)$ とおく。

(a) $d = 2$ のとき、 $\dim(V \cap U_+) = 2$ であれば $V = U_+ = U_0$ であり、 $\dim(V \cap U_-) = 2$ であれば $V = U_- = U_2$ である。 $\dim(V \cap U_+) = \dim(V \cap U_-) = 1$ のとき、適当な $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ により、 $\ell(A)(V \cap U_+) = \mathbb{F}e_1$ となる。このとき、 $\ell(A)(V \cap U_-)$ は $\mathbb{F}e_1$ に直交して、 $U_- = \mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5$ に含まれるので、

$$\ell(A)(V \cap U_-) = \mathbb{F}e_4$$

である。よって、 $\ell(A)V = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_4 = U_1$ である。以上により、 $d = 2$ のときの代表元は

$$U_0, \quad U_1, \quad U_2$$

の 3 つである。

(b) $d = 1$ のとき、 $\dim(V \cap U_+) = 1$ または $\dim(V \cap U_-) = 1$ である。 $\dim(V \cap U_+) = 1$ のとき、適当な $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ により、 $\ell(A)(V \cap U_+) = \mathbb{F}e_1$ となる。 $\ell(A)V \supset \mathbb{F}e_1$, $e_2, e_4 \notin \ell(A)V$ だから (2) の議論により

$$\ell(A)V = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}\left((-x^2/2)e_2 + xe_3 + e_4\right) \quad \text{for some } x \in \mathbb{F}^\times$$

と書ける。さらに、 $g = \mathrm{diag}(1, x^{-1}, 1, x, 1) \in R$ により、

$$g\ell(A)V = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}\left(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4\right)$$

となる。 $\dim(V \cap U_-) = 1$ のときも同様にして、 V は R の元によって

$$\mathbb{F}\left(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4\right) \oplus \mathbb{F}e_5$$

に移る。以上により、この場合の代表元は 2 つである。

(c) $d = 0$ のとき、 $V \subset U_+ \oplus U_-$ の場合とそうでない場合がある。
 $V \subset U_+ \oplus U_-$ のとき、線形同型 $f: U_+ \xrightarrow{\sim} U_-$ があって、

$$V = \{v + f(v) \mid v \in U_+\}$$

と書ける。 $e_1 + f(e_1) \in V$ について

$$0 = (e_1 + f(e_1), e_1 + f(e_1)) = 2(e_1, f(e_1))$$

だから $f(e_1) = xe_4$ for some $x \in \mathbb{F}^\times$ である。よって

$$V = \mathbb{F}(e_1 + xe_4) \oplus \mathbb{F}(xe_5 - e_2)$$

となる。 $g = \text{diag}(1, x, 1, x^{-1}, 1) \in R$ とおけば

$$gV = \mathbb{F}(e_1 + e_4) \oplus \mathbb{F}(e_5 - e_2)$$

となる。

$V \not\subset U_+ \oplus U_-$ のとき、 $\dim(V \cap (U_+ \oplus U_-)) = 1$ である。適当な $A \in \text{GL}_2(\mathbb{F})$ により、

$$\ell(A)V \cap (U_+ \oplus U_-) = \mathbb{F}(e_1 + xe_4) \quad \text{for some } x \in \mathbb{F}^\times$$

となる。 $g = \text{diag}(1, x, 1, x^{-1}, 1) \in R$ とおけば

$$g\ell(A)V \cap (U_+ \oplus U_-) = \mathbb{F}(e_1 + e_4)$$

となる。 $V' = g\ell(A)V$ とおくと、

$$V' = \mathbb{F}(e_1 + e_4) \oplus \mathbb{F}(y(e_5 - e_2) + e_3 - \frac{1}{2y}e_1) \quad \text{for some } y \in \mathbb{F}^\times$$

と書ける。 $h = \text{diag}(y, y^{-1}, 1, y, y^{-1}) \in R$ とおけば

$$hV' = \mathbb{F}(e_1 + e_4) \oplus \mathbb{F}(e_5 - e_2 + e_3 - \frac{1}{2}e_1)$$

となる。

よって $d = 0$ のときの代表元は 2 つである。

以上により、(3) の R -軌道の数 $3 + 2 + 2 = 7$ であることがわかった。

(1), (2), (3) により、 $\mathcal{M} = \text{Fl}_{(2)} \times \text{Fl}_{(2)} \times \text{Fl}_{(2)}$ の G -軌道数は $3 + 6 + 7 = 16$ である。

3.3 (III) 型の一般論

(III) 型の 3 重旗多様体

$$\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{(\alpha)} \times \mathrm{Fl}_{(\beta)} \times \mathrm{Fl}_{(n)}$$

の軌道分解を考える。

U_+ を $\mathbb{F}^{2n+1}$ の α 次元 isotropic subspace、 U_- を β 次元 isotropic subspace とする。 $W_0 = U_+ \cap U_-$, $W_+ = U_+ \cap U_-^\perp$, $W_- = U_- \cap U_+^\perp$ とおき、

$$a_0 = \dim W_0, \quad a_+ = \dim W_+ - a_0, \quad a_- = \dim W_- - a_0$$

とすると、 a_0, a_+, a_- は (U_+, U_-) の G -軌道の不変量である。 $(,)$ は U_+/W_+ と U_-/W_- の間の非退化双一次形式を与えるので、 $\alpha - a_0 - a_+ = \beta - a_0 - a_- (= a_1)$ とおく) である。

$i \in I = \{1, \dots, 2n+1\}$ に対し、 $\bar{i} = 2n+2-i$ とする。 $d = a_0 + a_+ + a_-$, $d' = \overline{d + a_1} - 1$ とおき、

$$\begin{aligned} W_{(0)} &= \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{a_0}, & W_{(+)} &= \mathbb{F}e_{a_0+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{a_0+a_+}, \\ W_{(-)} &= \mathbb{F}e_{a_0+a_++1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_d, & U_{(+)} &= \mathbb{F}e_{d+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{d+a_1}, \\ U_{(-)} &= \mathbb{F}e_{d'+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{d'+a_1}, & W &= W_{(0)} \oplus W_{(+)} \oplus W_{(-)} \end{aligned}$$

とおく。このとき、 (U_+, U_-) は次のように標準化できる。

命題 3.7 ([M14] Proposition 3.6) $gU_+ = W_{(0)} \oplus W_{(+)} \oplus U_{(+)}$, $gU_- = W_{(0)} \oplus W_{(-)} \oplus U_{(-)}$ となる $g \in G$ が存在する。

以下、 $U_+ = W_{(0)} \oplus W_{(+)} \oplus U_{(+)}$, $U_- = W_{(0)} \oplus W_{(-)} \oplus U_{(-)}$ としてよい。このとき、 $W_0 = W_{(0)}$, $W_+ = W_{(0)} \oplus W_{(+)}$, $W_- = W_{(0)} \oplus W_{(-)}$ である。

$$R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+, gU_- = U_-\}$$

とおくとき、 $M = \mathrm{Fl}_{(n)} = \{\mathbb{F}^{2n+1} \text{ の maximally isotropic subspaces} \}$ の R -軌道を分類すればよい。

$V \in M$ の R -軌道は次の不変量 $b_1, \dots, b_{15}, \varepsilon$ を持つ。

$$\begin{aligned} b_1 &= \dim(W_0 \cap V), \quad b_2 = a_0 - b_1, \\ b_3 &= \dim(W_+ \cap V) - b_1, \quad b_4 = \dim(W_- \cap V) - b_1, \\ b_5 &= \dim(U_+ \cap V) - b_1 - b_3, \quad b_6 = \dim(U_- \cap V) - b_1 - b_4, \\ b_7 &= \dim(W \cap V) - b_1 - b_3 - b_4, \\ b_8 &= \dim((W_+ + U_-) \cap V) - \dim(W \cap V) - b_6, \\ b_9 &= \dim((W_- + U_+) \cap V) - \dim(W \cap V) - b_5, \\ b_{10} &= a_+ - b_3 - b_7 - b_8, \quad b_{11} = a_- - b_4 - b_7 - b_9 \end{aligned}$$

さらに、 $X' = (U_+ + U_-) \cap V^\perp$, $X = (U_+ + U_-) \cap V$, $X_0 = ((W_+ + U_-) \cap V) + ((W_- + U_+) \cap V)$ とおき、 X' の部分空間 X_1 を

$$X_1 = \{v \in X' \mid (v_+, X') = \{0\}\}$$

で定義すると、 $X_1 \supset X_0$ である。ただし、 $v = v_+ + v_-$ ($v_\pm \in U_\pm$) とする。

$$\begin{aligned} b_{12} &= \dim X_1 - \dim X_0, & b_{15} &= \dim X' - \dim X_1, & \varepsilon &= \dim X' - \dim X, \\ b_{13} &= a_1 - b_5 - b_6 - b_8 - b_9 - 2b_{12} - b_{15}, & b_{14} &= n - d - a_1 - b_{12} - b_{13} \end{aligned}$$

とおく。($b_{13}, b_{14} \geq 0$ が示せる。)

注意 3.8 $b_2, b_{10}, b_{11}, b_{13}, b_{14}$ の定義式により、 $b_1, \dots, b_{15}$ は次の5つの関係式を満たす。

$$a_0 = b_1 + b_2 \tag{3.1}$$

$$a_+ = b_3 + b_7 + b_8 + b_{10} \tag{3.2}$$

$$a_- = b_4 + b_7 + b_9 + b_{11} \tag{3.3}$$

$$a_1 = b_5 + b_6 + b_8 + b_9 + 2b_{12} + b_{13} + b_{15} \tag{3.4}$$

$$a_2 = b_{12} + b_{13} + b_{14} \tag{3.5}$$

ただし、 $a_2 = n - d - a_1 = n - a_0 - a_+ - a_- - a_1$ とする。

注意 3.9 ((I) 型のとき) $\alpha = \beta = n$ のとき、 $n = \alpha = a_0 + a_+ + a_1$ であるから、 $a_- = a_2 = 0$ であり、 $n = \beta = a_0 + a_- + a_1$ であるから、 $a_+ = a_2 = 0$ である。よって、

$$a_+ = a_- = a_2 = 0$$

であり、

$$b_j = 0 \quad \text{for } j = 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$$

であるので、不変量は $b_1, b_2, b_5, b_6, b_{15}$ および $\varepsilon \in \{0, 1\}$ である ([M13] Theorem 1.2, 例 3.3, 例 3.6)。

$j \in J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 14\}$ に対し、 $I_{(j)}$, $V_{(j)}$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} I_{(1)} &= \{1, \dots, b_1\}, & I_{(2)} &= \{b_1 + 1, \dots, a_0\}, & I_{(3)} &= \{a_0 + 1, \dots, a_0 + b_3\}, \\ I_{(4)} &= \{a_0 + a_+ + 1, \dots, a_0 + a_+ + b_4\}, & I_{(5)} &= \{d + 1, \dots, d + b_5\}, \\ I_{(6)} &= \{d' + 1, \dots, d' + b_6\}, & I_{(10)} &= \{a_0 + a_+ - b_{10} + 1, \dots, a_0 + a_+\}, \\ I_{(11)} &= \{d - b_{11} + 1, \dots, d\}, & I_{(14)} &= \{d + a_1 + 1, \dots, d + a_1 + b_{14}\}, \\ V_{(j)} &= \begin{cases} \bigoplus_{i \in I_{(j)}} \mathbb{F} e_i & \text{if } j = 1, 3, 4, 5, 6, 14, \\ \bigoplus_{i \in I_{(j)}} \mathbb{F} e_{\bar{i}} & \text{if } j = 2, 10, 11. \end{cases} \end{aligned}$$

$j \in J_2 = \{7, 8, 9, 13\}$ に対し、 $I_{(j)}$, $\eta_j : I_{(j)} \rightarrow I$, $V_{(j)}$ を次で定義する。

$$I_{(7)} = \{a_0 + b_3 + 1, \dots, a_0 + b_3 + b_7\},$$

$$\eta_7(a_0 + b_3 + k) = a_0 + a_+ + b_4 + k,$$

$$I_{(8)} = \{a_0 + b_3 + b_7 + 1, \dots, a_0 + b_3 + b_7 + b_8\},$$

$$\eta_8(a_0 + b_3 + b_7 + k) = d' + b_6 + k,$$

$$I_{(9)} = \{a_0 + a_+ + b_4 + b_7 + 1, \dots, a_0 + a_+ + b_4 + b_7 + b_9\},$$

$$\eta_9(a_0 + a_+ + b_4 + b_7 + k) = d + b_5 + k,$$

$$I_{(13)} = \{d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15} + 1, \dots, d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15} + b_{13}\},$$

$$\eta_{13}(d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15} + k) = d + a_1 + b_{14} + b_{12} + k,$$

$$V_{(j)} = \bigoplus_{i \in I_{(j)}} (\mathbb{F}(e_i + e_{\eta_j(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{i}} - e_{\overline{\eta_j(i)}}))$$

$I_{(12)} = \{d + b_5 + b_9 + 1, \dots, d + b_5 + b_9 + b_{12}\}$ とおき、 $\kappa, \lambda : I_{(12)} \rightarrow I$, $V_{(12)}$ を次で定義する。

$$\kappa(d + b_5 + b_9 + k) = d' + b_6 + b_8 + k, \quad \lambda(d + b_5 + b_9 + k) = d + a_1 + b_{14} + k,$$

$$V_{(12)} = \bigoplus_{i \in I_{(12)}} (\mathbb{F}(e_i + e_{\kappa(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_i + e_{\lambda(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{i}} - e_{\overline{\kappa(i)}} - e_{\overline{\lambda(i)}}))$$

$I_{(15)} = \{d + b_5 + b_9 + b_{12} + 1, \dots, d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15}\}$, $U_{(15)} = (\bigoplus_{i \in I_{15} \sqcup \overline{I_{(15)}}} \mathbb{F}e_i) \oplus \mathbb{F}e_{n+1}$ とおき、 $\eta_{15} : I_{(15)} \rightarrow I_{(15)}$ を

$$\eta_{15}(d + b_5 + b_9 + b_{12} + k) = d' + b_6 + b_8 + b_{12} + b_{13} + k \quad \text{for } k = 1, \dots, b_{15}$$

で定義する。 $b_{15} = 0$ のときは $V_{(15)}^\varepsilon = \{0\}$ とおく。 $b_{15} > 0$ のとき、

$$c = d + b_5 + b_9 + b_{12} + \left\lfloor \frac{b_{15} + 1}{2} \right\rfloor, \quad I_{(15)}^+ = \{d + b_5 + b_9 + b_{12} + 1, \dots, c\}$$

とおき、

$$V_{<i>} = \mathbb{F}(e_i + e_{\eta_{15}(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{i}} - e_{\overline{\eta_{15}(i)}}) \quad \text{for } i \in I_{(15)}^+ - \{c\}$$

$$V_{<c>}^\varepsilon = \begin{cases} \mathbb{F}(e_c + e_{\eta_{15}(c)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{c}} - e_{\overline{\eta_{15}(c)}}) & \text{if } b_{15} \text{ is even and } \varepsilon = 0, \\ \mathbb{F}(e_c + e_{\eta_{15}(c)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{c}} - e_{\overline{\eta_{15}(c)}} - \frac{1}{2}e_c + e_{n+1}) & \text{if } b_{15} \text{ is even and } \varepsilon = 1, \\ \mathbb{F}(e_{\bar{c}} - \frac{1}{2}e_c + e_{n+1}) & \text{if } b_{15} \text{ is odd } (\varepsilon = 1) \end{cases}$$

とおく。(注: b_{15} が奇数 $\implies \varepsilon = 1$) このとき、 $U_{(15)}$ の maximally isotropic subspace $V_{(15)}^\varepsilon$ を

$$V_{(15)}^\varepsilon = \left(\bigoplus_{i \in I_{(15)}^+ - \{c\}} V_{<i>} \right) \oplus V_{<c>}^\varepsilon$$

で定義する。

定理 3.10 ([M14] Theorem 3.15) $gV = (\bigoplus_{j=1}^{14} V_{(j)}) \oplus V_{(15)}^\varepsilon$ となる $g \in R$ が存在する。

3.4 (III) 型の典型例

例 3.11 $n = 3$, $\alpha = \beta = 2$ のときを考える。まず、命題 3.7 により U_+ , U_- の配置は次の 5 つに分類できる。

(a_0, a_+, a_-, a_1)	(U_+, U_-) の代表元
(1) $a_0 = 2, a_+ = a_- = a_1 = 0$	$(\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2, \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2)$
(2) $a_0 = 1, a_+ = a_- = 1, a_1 = 0$	$(\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2, \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_3)$
(3) $a_0 = 1, a_+ = a_- = 0, a_1 = 1$	$(\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2, \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6)$
(4) $a_0 = 0, a_+ = a_- = a_1 = 1$	$(\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_3, \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5)$
(5) $a_0 = a_+ = a_- = 0, a_1 = 2$	$(\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2, \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_7)$

この 5 つの場合のそれぞれについて、定理 3.10 の代表元 gV は次のようになる。

(1) $a_0 = 2, a_+ = a_- = a_1 = 0, a_2 = 1$ であるから、(3.1)~(3.5) により、 $b_j = 0$ for $j = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15$ であり、

$$(b_1, b_2, b_{14}) = (2, 0, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (0, 2, 1)$$

の 3 通りである。それぞれの場合の定理 3.10 の gV は

$$\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, \quad \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \quad \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_3$$

である。

(2) のとき、 $a_1 = a_2 = 0$ であるから (3.4), (3.5) により、 $j \neq 1, 2, 3, 4, 7, 10, 11 \implies b_j = 0$ であり、可能な組み合わせは

$$\begin{array}{c|cccccccccc} b_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b_{11} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

の 10 通りである。それぞれの場合の gV は順に

$$\begin{array}{lll}
 \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
 \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5), & \\
 \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
 \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5) &
 \end{array}$$

である。

(3) のとき、 $a_+ = a_- = 0$, $a_1 = 1$ であるから、 $j \neq 1, 2, 5, 6, 13, 14, 15 \implies b_j = 0$ であり、可能な組み合わせは

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 b_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 b_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 b_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 b_{15} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 b_{14} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 b_{13} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

の 8 通りである。それぞれの場合の gV は順に

$$\begin{array}{ll}
 \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
 \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5), \\
 \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
 \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5)
 \end{array}$$

である。

(4) のとき、 $a_0 = a_2 = 0$ であるから (3.1), (3.5) により $b_1 = b_2 = b_{12} = b_{13} = b_{14} = 0$ であり、可能な組み合わせは $b_7 = b_8 = b_9 = 0$ のとき、

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 b_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 b_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 b_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 b_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 b_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 b_{15} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

の 12 通りであり、それぞれの場合の gV は順に

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3), \\
\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3), \\
\mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3), \\
\mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3)
\end{array}$$

である。

$(b_7, b_8, b_9) \neq (0, 0, 0)$ のとき、

$$\begin{array}{c|ccccccc}
b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
b_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
b_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
b_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
b_{15} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

の 7 通りであり、それぞれの場合の gV は順に

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_6), & \mathbb{F}e_5 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_6), \\
\mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3) \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_6), & \\
\mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_5) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_3), & \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_5) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_3), \\
\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5), & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5)
\end{array}$$

である。

以上により、(4) の場合の R -軌道は 19 個である。

(5) のとき、 $a_0 = a_+ = a_- = 0$ であるから、(3.1), (3.2), (3.3) により $b_j = 0$ for $j = 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11$ である。(3.5) により $b_{12} + b_{13} + b_{14} = a_2 = 1$ であるから

$$b_{12} = 1, \quad b_{13} = 1, \quad b_{14} = 1$$

の 3 つの場合がある。まず、 $b_{14} = 1$ のときを考えよう。このとき、 $b_5, b_6, b_{15}, \varepsilon$ は次の 7 通りである。

$$\begin{array}{c|ccccccc}
b_5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
b_6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
b_{15} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

これは例 3.6 (2) と同じであることに注意する。従って gV は例 3.6 (2) と同様に

$$\begin{aligned}
& \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, \quad \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \quad \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
& \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, \quad \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, \\
& \mathbb{F}(e_1 + e_6) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, \quad \mathbb{F}(e_1 + e_6) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_2 + e_4 - \frac{1}{2}e_1) \oplus \mathbb{F}e_3
\end{aligned}$$

である。

次に $b_{13} = 1$ のときを考えると、

$$b_5 = 1, \quad b_6 = 1, \quad b_{15} = 1$$

の 3 つの場合がある。それぞれの gV は

$$\begin{aligned}
& \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5), \quad \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5), \\
& \mathbb{F}(e_7 + e_4 - \frac{1}{2}e_1) \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5)
\end{aligned}$$

である。

最後に $b_{12} = 1$ のときを考える。このとき、他のすべての b_j は 0 であって、定理 3.10 の代表元 gV は

$$\mathbb{F}(e_1 + e_6) \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_2 - e_5)$$

である。

以上により、(5) の場合の R -軌道の数 $7 + 3 + 1 = 11$ 個である。

(1)~(5) により、 $\mathcal{M} = \text{Fl}_{(2)} \times \text{Fl}_{(2)} \times \text{Fl}_{(3)}$ の G -軌道数は

$$3 + 10 + 8 + 19 + 11 = 51$$

である。

References

- [B86] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.
- [L94] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Alg. **166** (1994), 142–157.
- [MWZ99] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.
- [MWZ00] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.
- [M13] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Alg. **375** (2013), 148–187.
- [M14] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type I : odd degree case*, arXiv:1402.6405.
- [S03] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters*, Representation Theory **7** (2003), 404–439.
- [V86] E. B. Vinberg, *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.