

薬学基礎数学教育における 「図の読み取り」にまつわる問題

東邦大学・薬学部 金子 真隆 (Masataka Kaneko)
Faculty of Pharmaceutical Science,
Toho University

東邦大学・薬学部 奥平 和穂 (Kazuho Okudaira)
Faculty of Pharmaceutical Science,
Toho University

東邦大学・理学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Science,
Toho University

1 はじめに

これまで筆者は、教材中の図が学習者に及ぼす効果を調査するために、 $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{p}}\text{ic}(1))$ を中心に数式処理システムを利用して作成した図入り教材を用いて実験授業を繰り返してきた(2, 3)). 結果的に、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 描画の精細さをフルに引き出している $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{p}}\text{ic}$ の 2 次元描画が、数学的モデルの局所的な性質に焦点をあてた学習の際に特に教育効果を発揮する可能性が示唆されている(4)). 一方で、特に数物系プロパーでない学習者に対して図を用いた教育を行う際に、図を見せられる側の学習者が図的な情報を受容する上でどのような問題がありうるかという点について、整理しておく必要を示唆する事例が相次いでいる. そこで本稿では、このような事例をいくつか紹介した上で、学習者が基礎教育を終わって専門教育に進んだ際の問題点とも対照しながら、筆者が所属する薬学系大学のケースを中心に、学習者の図的な情報受容にまつわる問題点を整理してみたい.

折しも、本年3月に行われた薬剤師国家試験では、出題傾向の大幅な変更があったこともあって、全国的に合格率が低下した. これは、出題の難易度が上昇したためというよりも、記憶している知識を掃き出させるタイプの従来型の出題から、数値的・図的な情報をもとにした状況の把握や対処法の判断を求めるタイプの実践的な出題へと傾向が変化したことに、受験者が十分対応できなかったことによるものと考えられる. このような変化は、2015年度から走り出す新しい「薬学教育コアカリキュラム」の考え方を先取りしたものであり、薬学を学ぶ学生が大学を出て実際の現場に出た際のことを考えれば望ましい方向性であることは言うまでもない. しかし一方で、今回の国家試験の結果は、現在の薬学教育がこうした方向性に十分に対応できていないことを如実に示す結果でもある. 数値的・図的な情報の受容はまさに数学教育にも直結する課題であり、薬学基礎数学教育の立場からこうした課題にいかに関与しうるか、今検討されねばならないと考えられる.

2 実験授業の事例と示唆

まず本節では、2013年10月に熱海で行った「KETopic 教材作成ワークショップ」(5))をきっかけとして作成した教材を用いた実験授業の事例と、その実施結果から示唆される「学習者による図的情報受容」に関わる問題について、見ていくことにする。

2.1 区分求積法に関する実験授業

周知のように、区分求積法では細長い長方形の面積の総和による近似を行うが、分け方を細かくした際の収束性を理解させる上で、KETopic による正確な描画が助けとなるのではないかと想定のもとに、以下のような実験授業を行った。対象は、高校で数学IIIを未修の者が25%程度含まれる東邦大学薬学部1年生2クラス約130名であったが、入学試験に数学IIIが課されていないことから、既修者の中にも高校段階で区分求積法を習っていないかったり、習っていても軽い扱いで通り過ぎていた者が少なからず含まれていたと考えられる。実際、以下に示す定着度テストの結果と、高校時代に数学IIIを履修していたか否かには、強い関連が見いだせていない。

実験授業の流れとしては、まず図1のような予備テストを実施した上で、それに対する解説という形で区分求積法の以下の作業ステップ

1. 分割点の座標の記述
(数列の一般項)
2. 長方形の高さの記述
(関数記号)
3. 長方形の面積の記述
4. 長方形の面積和の記述
(Σ の使用)
5. 長方形の面積和の収束
とその記述 ($\lim$ の使用)

に関する説明を図2のスライド(一部)を用いて行い、最後に図3の確認テストを行って各ステップに関する定着度を測定するというものである。確認テストは上記の説明項目に対応しており、概念的には理解できているのではないと思われる解答でも、数式としての記述が不十分なものはすべて不正解とする形で正解率を算出した。図4は算出した正解率を問いの番号順に示したグラフである。

日付	学校名	学年	組(学科)	学籍番号	氏名
/					

直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸、および関数 $y=f(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積を S とする。

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

S を長方形の面積の和で近似して求める。下の図で、 $S_1, S_2, \dots, S_n$ は各長方形の面積とし、
 $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$
 とおく。このとき、 $S_1, S_2, \dots, S_n$ は次の表のように表される。

底辺 (Δ を用いて)			...		
高さ (関数 f の値を用いて)			...		
長方形の面積 (以上から)	$S_1 =$	$S_2 =$	...	$S_k =$	$S_n =$

よって、長方形の面積の総和を Σ 記号を用いて表すと

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \boxed{}$$

分割数 n を大きくして、すべての Δx_i が限りなく 0 に近づくようにすることを
 $\Delta x_k \rightarrow 0$
 で表す。このとき、長方形の面積の総和は S に収束するから

$$\int_a^b f(x) dx = \boxed{}$$

図1 予備テスト

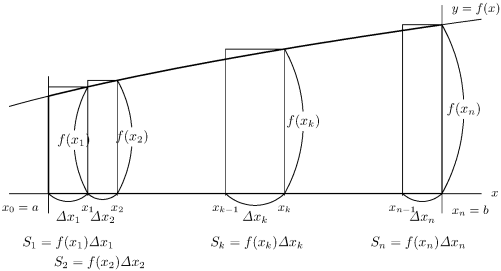
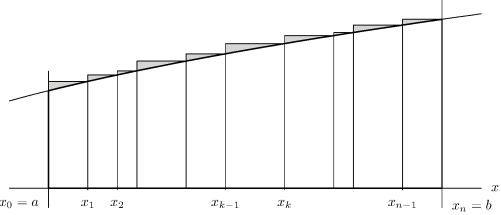
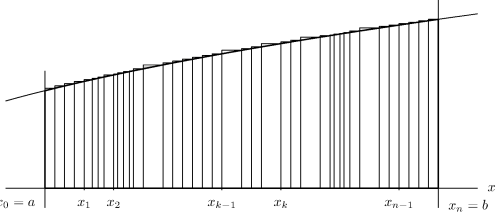
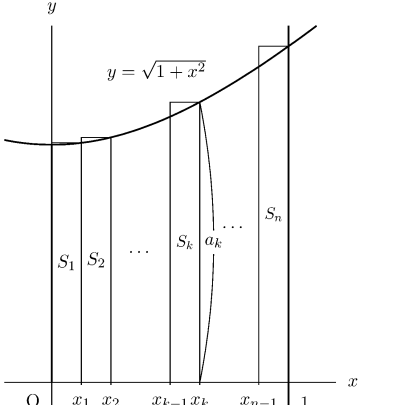
区分求積法  $S_1 = f(x_1)\Delta x_1$ $S_2 = f(x_2)\Delta x_2$ $S_k = f(x_k)\Delta x_k$ $S_n = f(x_n)\Delta x_n$	区分求積法 $S_1 + S_2 + \cdots + S_k + \cdots + S_n$ $= f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots$ $+ f(x_k)\Delta x_k + \cdots + f(x_n)\Delta x_n$ $= \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$
区分求積法 $S_1 + S_2 + \cdots + S_k + \cdots + S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$  $\Delta x_k \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ のとき？	区分求積法 $S_1 + S_2 + \cdots + S_k + \cdots + S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$  $\Delta x_k \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ のとき？
区分求積法 $\Delta x_k \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ のとき？ $\underline{\underline{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}} \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ $\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$	区分求積法 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$

図 2 説明用スライド

- (1) x_k を n と k で表せ。
- (2) a_k を n と k を含む式で表せ。
- (3) S_k を, a_k と n を含む式で表せ。
- (4) S_k を n と k を含む式で表せ。
- (5) $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ を $\sum$ と n と k を含む式で表せ。
- (6) n を大きくしていったとき, 長方形の面積の和 $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ は S に収束する。このことを式で表せ。



$y = \sqrt{1+x^2}$

$S_1, S_2, \dots, S_k, a_k, \dots, S_n$

$O, x_1, x_2, x_{k-1}, x_k, x_{n-1}, 1$

図 3 確認テスト

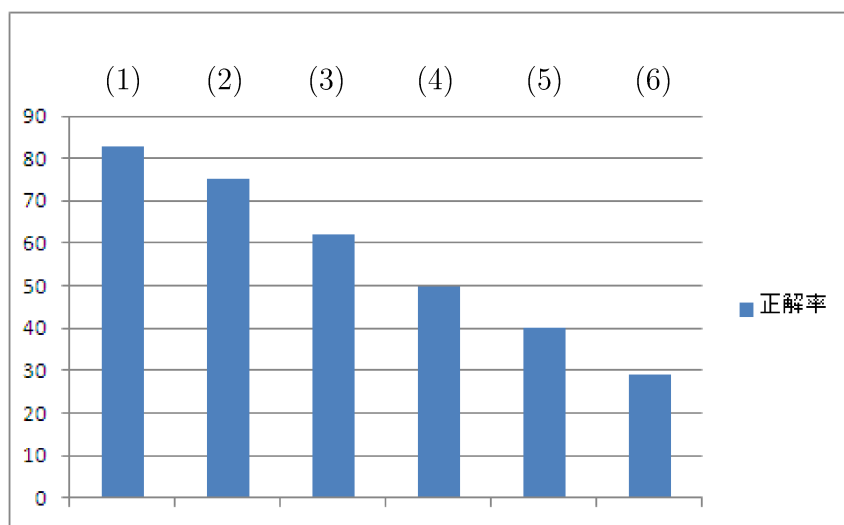


図4 実施結果

対象者の解答状況を見ると、問(3)の正解者のうち最後まで正解できたのは約半数にとどまるが、その相当数が不完全ながら $\sum$ 、 $\lim$ 記号を用いており、また、スライドを用いて面積和の収束性を解説した際に学生が当然のこととして反応していた様子と併せて考えると、面積和の収束性についてはかなり多くの学生が理解できていたのではないかと考えられる。実験前の想定としては、収束性が理解されないことが区分求積法学習における躓きの大きな原因になっているのではないかとの見方があったが、結果的にこの想定は妥当しなかったものと考えられる。

逆に、問(4)に正答したが問(5)で誤答したケースでは $\sum$ 記号の添字が k でなく n になっていたり、問(5)で正答したが問(6)で誤答したケースでは、 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 記号は使っているのに $\sum$ 記号が抜けてしまっていたり、ケアレスミスを疑わせる事例が多かった。このため、該当の被験者を対象に、 $\sum$ 記号の使い方に関する確認テスト、または誤答原因に関するヒアリングを実施した。その結果、確認テストで $\sum$ 記号の使い方に関があると判断される被験者はなく、ヒアリングに対しては尋ねた瞬間に「しまった」と反応する学生の事例がきわめて多かった。以上の状況は、問(4)に対して正解できている学生のほとんどは、区分求積法の概念の理解については支障がなく、最終的な記述の段階でミスをしたという実態を示唆している。

区分求積法は実際の積分計算の場で用いられることはまずないこともあり、教育現場ではこうした場合、単なるケアレスミスなので問題なしとされるケースも少なくない。確かに、区分求積法による定積分の定義式を正しく書き下せることが、数物系プロパーでない学習者の学習目標として妥当か否かについては当然問題がある。しかし、後述する専門科目段階での図的情報の受容の問題点と対照すると、こうしたケアレスミスには実は小さくない問題が含まれていると考えられる。なぜなら、本実験での被験者となった東邦大学薬学部の学生の場合、通常数学の授業を担当している筆者の感覚として、微積分の公式を正しく記憶し、それを面積計算などに正確に適用するといった能力に非常に長けているからである。本実験のように、添字の完全な取り違いや一部記号の完全な

脱落といった事象がこれほどの頻度で発生する事態は通常経験しないものであり、以上の結果は、イメージとして面積の収束性を理解することは多くの学生においてできていながら、その理解を最終的な数式としての記述に結び付ける段階で大きな支障が生じたことを明示している。このことは、図から得られる情報と、数式として表現するために必要な要素に関する情報とが、互いに結び付いたものとして受容されず、別個のものとして受容されたことを示唆する。

2.2 指数関数とべき関数の増大度に関する実験授業

1 より大きい底を持つ指数関数と、正の指数を持つべき関数の増大度を $x \gg 0$ の範囲で比較すると、前者の方がまさるという事実は、数物系以外の工学分野などでもよく用いられる。現在、高校のカリキュラムからは除かれていることもあり、ほとんどの学習者にとってこの事実に触れるのは、大学の微積分の授業の中で「ロピタルの公式」を学習する際だと考えられる。本実験では、KEPic による図の提示が上記の事実を理解させる上でどのような効果を発揮するか、調査することを目的とした。東邦大学薬学部1・4年生17名を対象に個別に実施したが、同時にアメリカ・トルコの大学でも、内容をやや簡略化して実施した。

実験の流れとしては、図5に示す予備課題で示された2つの関数(一方は指数関数でもう一方はべき関数)の増大度を、 x の値が非常に大きい範囲で比較させた後、図6に示す5つの図を段階的に見せながら、 $y = x^4$ と $y = 2^x$ のうち増大度の大きいものを選択させる形式をとった。上記の事実を既に知っている被験者であれば、最初から $y = 2^x$ を選択するであろうが、多くの被験者は最初は $y = x^4$ を選択するものの、縦方向のスケールを縮めていくうちに判断を変更して $y = 2^x$ を選ぶようになることが期待された。補足的に、各問において、1番目の関数を2番目の関数で割った比の値がどのようになっていくかも尋ねた。

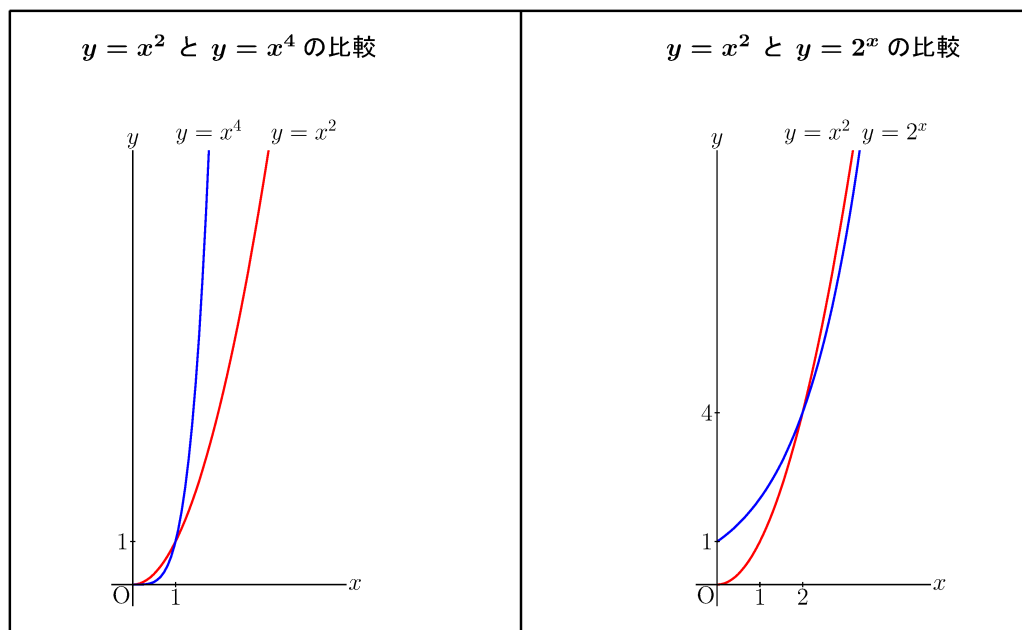


図5 予備タスク

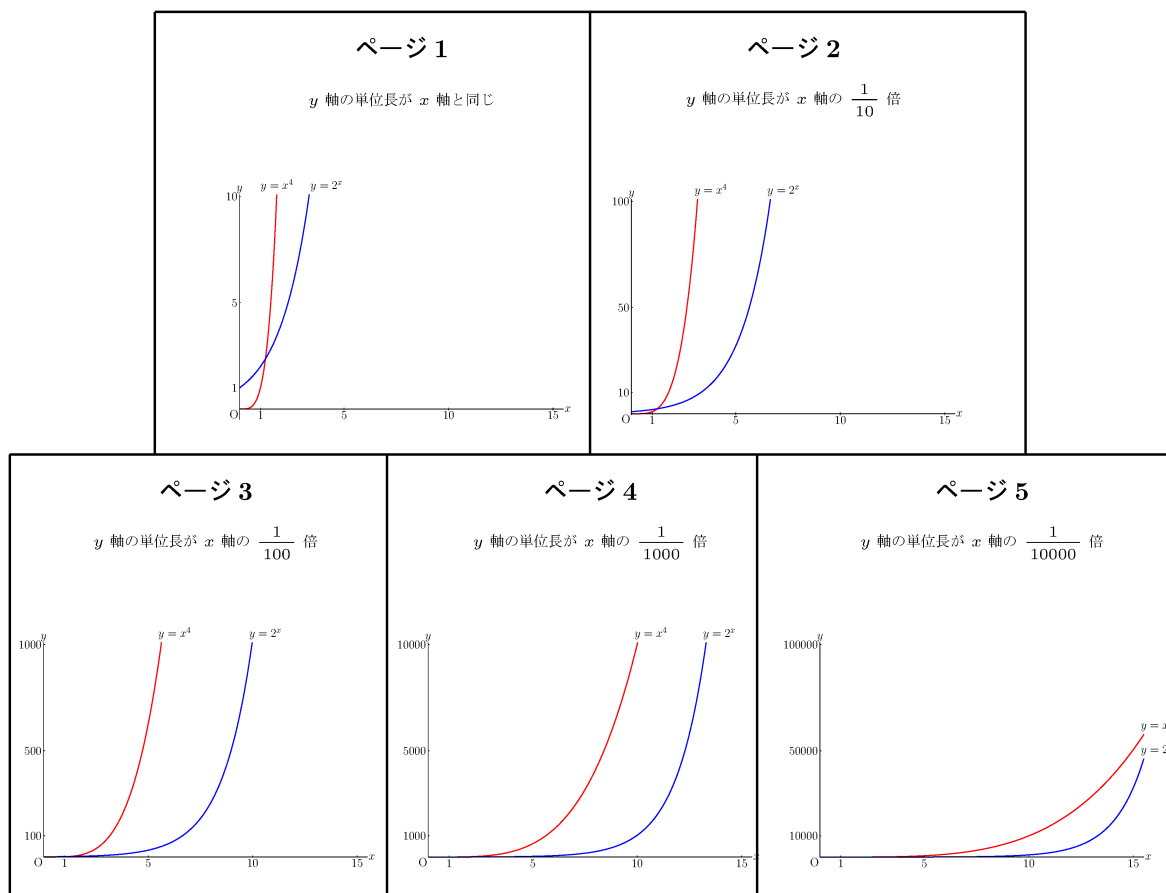


図 6 $y = x^4$ と $y = 2^x$ の比較

実施結果は、実施場所別に表 1 から表 4 の通りである。表中で、1 行目は被験者の性別を表し、次の 2 行が予備課題に対する各被験者の回答、さらにその次の 5 行が本課題に対する回答を表す。それ以後の行は、上記の補足的な問いに対する回答状況である。

Gender	M	M	M	M	F	F	F	M	F	F	F	F	F	F	F	F	F
p1-1	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^2	x^4	x^4	x^2	x^4	x^4	x^4	x^4	x^2
p2-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^2	2^x	2^x	x^2	2^x	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2
p3-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p4-1	2^x	2^x	2^x	x^4	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p5-1	2^x	2^x	2^x	x^4	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p6-1	2^x	2^x	2^x	x^4	2^x	2^x	x^4	x^4	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p7-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p1-2	減少	0	0	0	0	0	0	収束	0	0	NA	増大	減少	0	減少	減少	減少
p2-2	減少	0	0	0	NA	0	∞	収束	NA	∞	0	増大	増大	増大	増大	増大	減少
p7-2	減少	0	0	0	∞	0	0	NA	0	NA	NA	増大	NA	1	増大	増大	増大
p8-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^{10}	2^x	2^x	2^x	x^{10}	2^x	x^{10}	x^{10}	x^{10}	x^{10}	x^{10}	x^{10}	x^{10}
p8-2	(2)	(2)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)	(3)	(3)	(3)	(1)	(1)	(1)	(3)	NA	(1)	(3)

表 1 東邦大学での実施結果

Gender	M	M	F	F	F	F	F	M	F	F	F	M	M
p1-1	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^2	x^4	x^4	x^4	x^4
p2-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^2	x^2	2^x	x^2	2^x	x^2	x^2	x^2	x^2
p3-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4
p4-1	2^x	2^x	2^x	2^x	NA	x^4	x^4	x^4	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4
p5-1	2^x	2^x	x^4	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p6-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p7-1	2^x	2^x	2^x	x^4	2^x	2^x	2^x	2^x	same	x^4	2^x	x^4	x^4
p1-2	0	0	0	0	NA	0	0	0	0	0	0	0	0
p2-2	0	0	0	∞	NA	∞	NA	∞	0	0	∞	NA	∞
p7-2	0	∞	0	∞	0	0	NA	0	1	NA	∞	NA	∞

表2 トルコの大学での実施結果

Gender	M	M	M	M	M	F	F	F	M	F	M	F	M	M	F	F	M
p1-1	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p2-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2
p3-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p4-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p5-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p6-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p7-1	2^x	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	2^x	x^4	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p1-2	small	small	small	small	small	small	0	decrease	0	small	small	small	small	small	decrease	small	∞
p2-2	small	small	small	small	small	large	∞	decrease	0	large	increase	large	large	large	increase	increase	∞
p7-2	small	small	small	small	0	large	∞	increase	0	large	increase	large	large	same	increase	increase	∞

表3 アメリカの大学での実施結果 (解析科目クラス)

Gender	M		M	M	M	F	F	F	F	M	F	
p1-1	x^4	x^4	x^2	x^2	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p2-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2
p3-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p4-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p5-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p6-1	2^x	2^x	2^x	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p7-1	2^x	x^4	x^4	x^4	2^x	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4
p1-2	small	small	large	large	small	small	small	small	decrease	0	small	small
p2-2	small	small	large	large	large	large	large	small	increase	∞	large	large
p7-2	small	large	large	large	small	same	large	small	same	∞	large	large

表4 アメリカの大学での実施結果 (線形代数クラス)

このうち、表2に示すトルコの大学の2年生を対象とした実験では、対象者が数学専攻であったこともあり、上記の事実をあらかじめ知っていた学生、知識はなかったもの

のグラフをみて行く中で判断を変更できた学生の比率がいずれも比較的高かった。これに対し、表1に示す東邦大学のケースでは、いずれの比率も低くなり、約半数は最終段階でもべき関数を選択してしまう結果となった。表3・4に示すアメリカの大学のケースでは、最初から事実を知っている学生以外の大多数が、グラフを見ていくことで判断を変更できない結果となり、むしろ期待とは逆の判断変更をしてしまう学生も稀ではない結果となっている。

全体として、教材作成時に期待した結果が得られていない状況であるが、その原因としては、実験終了後に行ったヒアリングに対する東邦大学の被験者の以下のような回答が参考になると考えられる。

1. グラフの見方・2つの関数のグラフの違いが分からないので、とりあえずいくつか x に値を代入してみた。
2. グラフをいくつも見せられることの趣旨がわからなかった。
3. x 方向の大小で判断してしまった。
4. グラフに描かれている範囲だけで判断してしまい、 $x \rightarrow \infty$ の極限を考えなくてはならないことを見落としてしまった。
5. 「増え方が大きい」ということの意味がよく分からなかった。

1番目のコメントについては、課題実行中の被験者の行動観察の結果とよく合致する。すなわち、本課題で問題となるのはグラフの上下関係の推移という図形的な対象のみであり、数値的な計算は求められていないにも関わらず、代入計算を実施している被験者が非常に多かったことは注目すべきだと考えられる。また、3番目のコメントについて、関数の大小比較といえ、 y 軸方向のグラフの上下を見ればよいことが当然の前提として理解されているであろうというのが数学教員としての期待であるにもかかわらず、必ずしもそうっていない事例があることがうかがえる。

3 専門科目での状況からの示唆

本節では、前節でみてきた実験授業から得られる知見とも対照しながら、薬学の専門科目の教育現場で発生している、「図的情報の読み取り」に関わる問題についてみていくことにする。

3.1 変数名の問題

これは薬学系の数学教育を担当する教員が微分方程式を教える際などによく経験することだと思われるが、「関数」を表現する場合、独立変数は x 、従属変数は y で表すのが常態化しているために、専門科目の内容に合わせてそれ以外の変数名が使われた場合、理解不能の状態に陥るという問題である。簡単な例をあげると、 K を比例定数として関数 $v = KC$ を考えるという場合、横軸を C 、縦軸を v としてグラフを描く課題に対しては図7の左図のように的確に回答できる学生でも、横軸を C 、縦軸を K にとったらどうなるかと問われた途端に回答できなくなるといった事例である。この例は、定数関数を関数としてきちんと認識できるかという微妙な問題を含むが、 $y = Cx$ という表記に対応した問題であれば、正答率が上昇するのは明らかである。

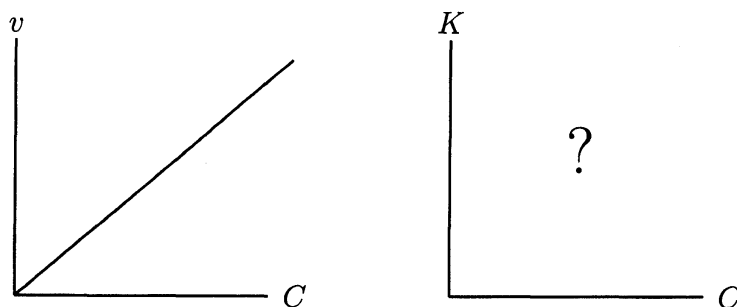


図7 変数名の問題

この点で、単なる表記法の問題としてとらえることもできるが、そもそも関数を「代入計算を行うための数式表現」としてとらえるのか、「独立変数と従属変数との対応付けを与える規則性」としてとらえるのかという点で、学習者の視点からすると本質的に異なる内容を併せ持つ表現だと考えられる。前節で問題とした「指数とべき」の例と対照してみると、対応関係を表示するグラフの情報に依拠しきれずに、与えられた数式表現に従って値を代入してみないと関数としての把握ができないという状況に対応するのではないかと考えられる。実際、当該課題では $y = x^4$, $y = 2^x$ という通常関数表記がなされていたにもかかわらず、グラフの情報とは独立に、代入計算によって増大度を判断しようとした被験者が少なくなかったことが、上記の見方を裏付けている。

3.2 数字と文字の問題

これまた薬学の専門教育でよく指摘される問題であるが、食塩 5(g) を水 100(g) 中に投入してできる食塩水の濃度は計算できるのに、食塩 $a(g)$ を水 $m(g)$ 中に投入してできる食塩水の濃度を計算せよといわれると、途端にできなくなってしまうという例で、決して稀ではない。

後者に回答できないということは、濃度計算の公式を記憶して回答しているわけではないことの証拠であるから、前者に回答する際には図8のようなイメージが頭の中に浮かんでいるはずである。同様のイメージが頭に浮かんでいながら文字式の場合の問に回答できないということは、東邦大学薬学部の場合にとっても想定できないので、そもそも文字式が出現した状況で数式と図のイメージとが断絶してしまう事態が発生したとみるのが妥当である。

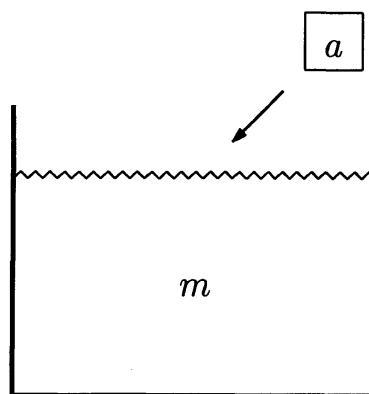


図8 数字と文字の問題

このことは、前節で述べた「区分求積」の課題の状況と対照すると、非常に類似している面がある。すなわち、長方形の面積を計算する程度の状況であれば、図的な情報と数式計算とのリンクを保ちながら推論を進められるのに、 $\sum$ 記号や $\lim$ 記号を使わなくてはならないような複雑な状況になってくると、途端にそうしたリンクが失われてしまい、それがために、記号の脱落といった、通常では考えられないようなミスが高い頻度で発生するようになるのではないかと考えられるわけである。

3.3 傾きの意味の問題

薬学の中心分野の一つである薬物動態学では、時間の経過に伴う薬物濃度の変化を問題にするため、「関数の変化をどうとらえるか」というのは本質的な課題である。本年度の薬剤師国家試験でも、下の図9に示すように、関数の変動をグラフからいかに的確に読み取れるかを問う問題が出題され、非常に正解率が低かった。

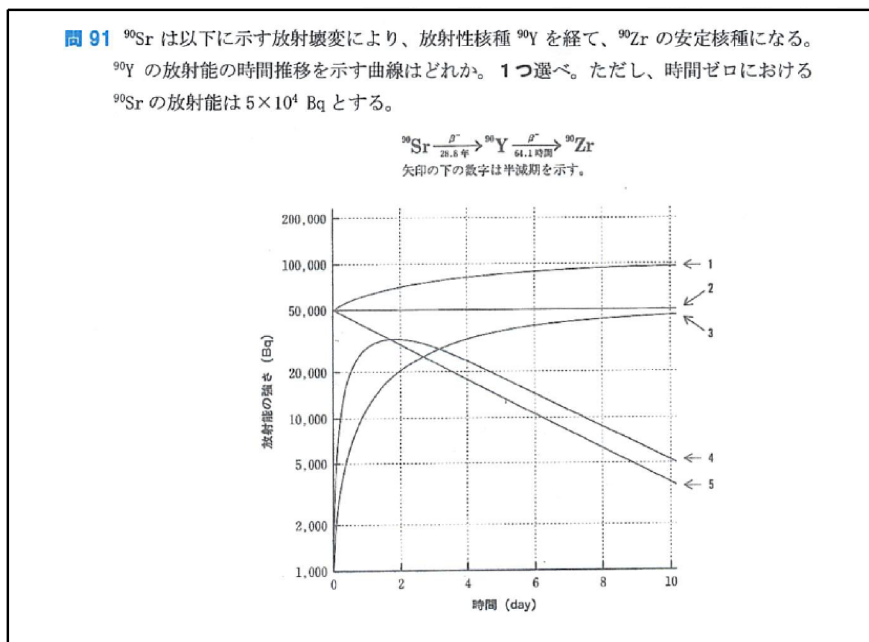


図9 関数の変動の追跡に関連した問題

上記の問題の場合、 $[*]$ によって物質 $*$ の濃度を表すとき、 K_1, K_2 を正の比例定数として、次の微分方程式

$$\frac{d[S_r]}{dt} = -K_1[S_r] \quad \frac{d[Y]}{dt} = K_2([S_r] - [Y])$$

で表される法則性が成り立つことと、物質 Sr の半減期が物質 Y のそれに比べて非常に長いことから、 $[S_r]$ は定数とみなしてよいことを理解している必要があるが、これはかなり多くの学生ができていたと想定される。にもかかわらず、多くの学生が正解できなかったのは、「微分＝変化率」という原則のもとに、微分方程式で与えられている情報と、グラフから読み取れる変化率に関する情報とを、うまく統合させられなかったことが最大の原因だと考えられる。

このような状況は、前節に示した「関数の増大度」の実験事例で、多くの学生が「増え方が大きいということの意味がよく分からなかった」とコメントしていたことを想起させる。実際、増大度の概念を正確に把握するためには、関数の変化率の変動、すなわち関数の2回微分をグラフから読み取らなくてはならず、これはある意味で図9の事例よりも高度である。

3.4 積分の意味の問題

前節で取り上げた実験授業の事例のように、区分求積法を含めた積分の概念を図を用いて教える場合、「積分＝面積」という形で意味づけされることが多いが、このような見方にとどまっていると、面積計算への応用などを想定した場合、現在高等学校の数学IIで教えられているような「微分の逆算」としての積分の概念で十分であり、区分求積法を教える価値が半減する。ここで示す事例は、「積分＝面積」という狭いとらえ方にこだわってしまうことで陥りかねない問題を示すものである。

該当の事例は、下図10に示すような概念図を用いて薬剤の実質的な効力を定量化するテーマを扱うケースである。

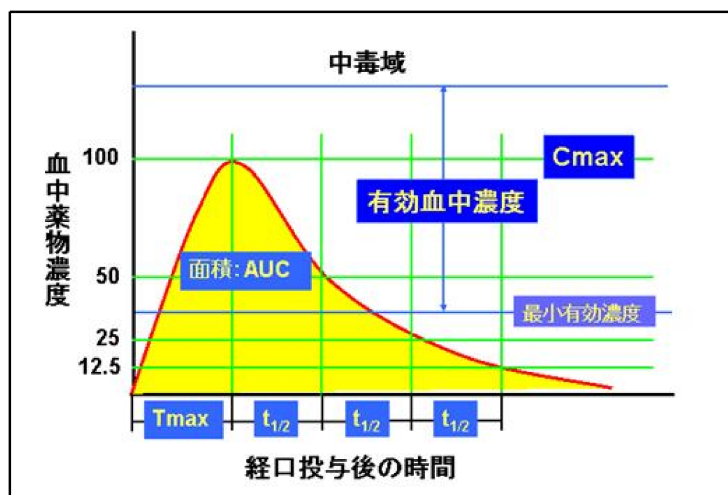


図10 積分の意味づけに関連した問題

横軸に時間、縦軸に血中薬物濃度をとるという設定自体が、数学で学習した積分の概念とのリンケージを難しくするが、とりわけ微分の逆算としての積分の意味づけしか頭に残っていない学習者にとっては、「薬物の実質的な効力はグラフ下側の部分の面積で与えられる」という説明を受けても、理解不能となることは想像に難くない。結果として、上記の事実を公式として用い、薬効を「計算」することができるにもかかわらず、たとえば「同じ量の薬剤を急速に投入した場合と緩やかに投入した場合とで、薬効にはいかなる差が生じると考えられるか」といった基本的な問いにはしどろもどろな説明しかできない学生が続出することになる。

このような状況を踏まえると、とりわけ医歯薬系の学生に図的情報を用いて積分を教える際に重要なのは、長方形の面積和の収束性を強調することよりも、もっと基本的な「小さな長方形の面積」を(場合によっては単位つきの)微小量としてしっかりイメージづけすることではないかと考えられる。逆説的に言えば、このようなイメージが出来て初めて「なぜ面積を長方形の面積和による近似で考えるとよいのか」「なぜ $\sum$ 記号や $\lim$ 記号を用いることに意味があるのか」といった点が学習者に了解されるのではないだろうか。前節に述べた「区分求積」の実験授業で定着度が芳しくない原因として、3.2節では図的情報と数式的表現の断絶を指摘したが、それと同時に、「微分の逆算」という考え方で応用上事足りているととらえる学習者が、そもそも「区分求積」の学習に強い必要性を見出していないという要因も小さくないと考えられる。

3.5 変数のとりかえの問題

前節で述べた「関数の増大度」の課題に対する被験者のコメントの中に「グラフを何枚も見せられることの趣旨がわからなかった」というものがあったが、最後に紹介するのはこれに関連しそうな専門科目における事象である。上記課題の場合、シートが進むにつれて変わっていくのは y 軸方向のスケーリングだけであるが、類似の事例が薬学系でよく使われる片対数のグラフである。下図11はその一例だが、例えば0.5や20といった目盛りが縦軸上のどのあたりに位置するのか、判断に迷う上級生が厳然として存在する。当然、この中に描かれたグラフの意味も今一つはっきりしない結果となる。

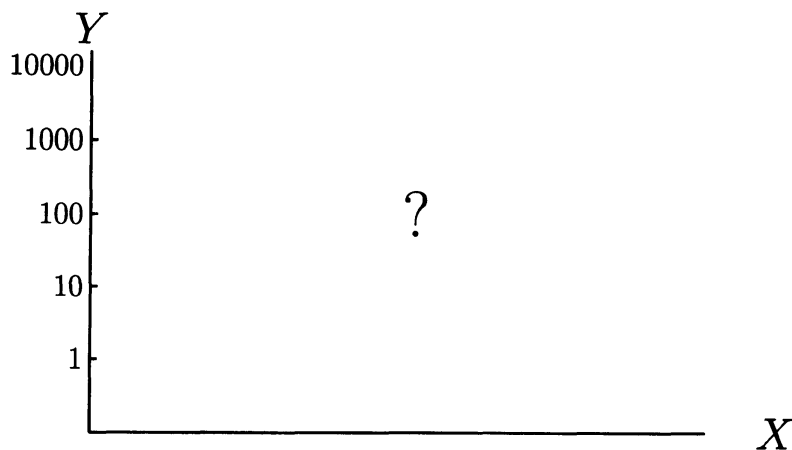


図11 片対数プロットの座標軸

本年度の国家試験でも、下図12に示すような両対数グラフを用いた表示が現れたが、問題の本質に入る前に、この表示の意味を読み取る段階で障害をかかえた学生も散見される。

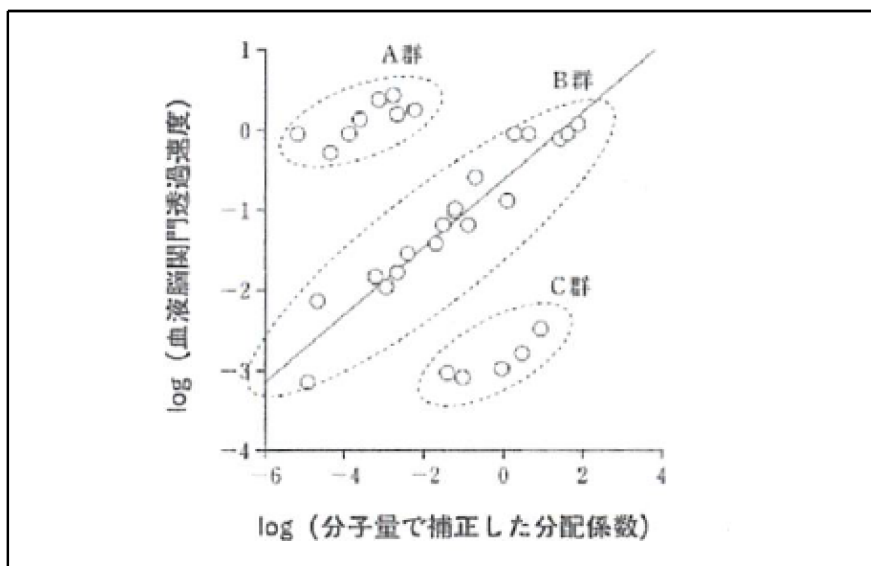


図12 両対数プロットによる表示

これが下図 13 のような問題になると、さらに厄介である。

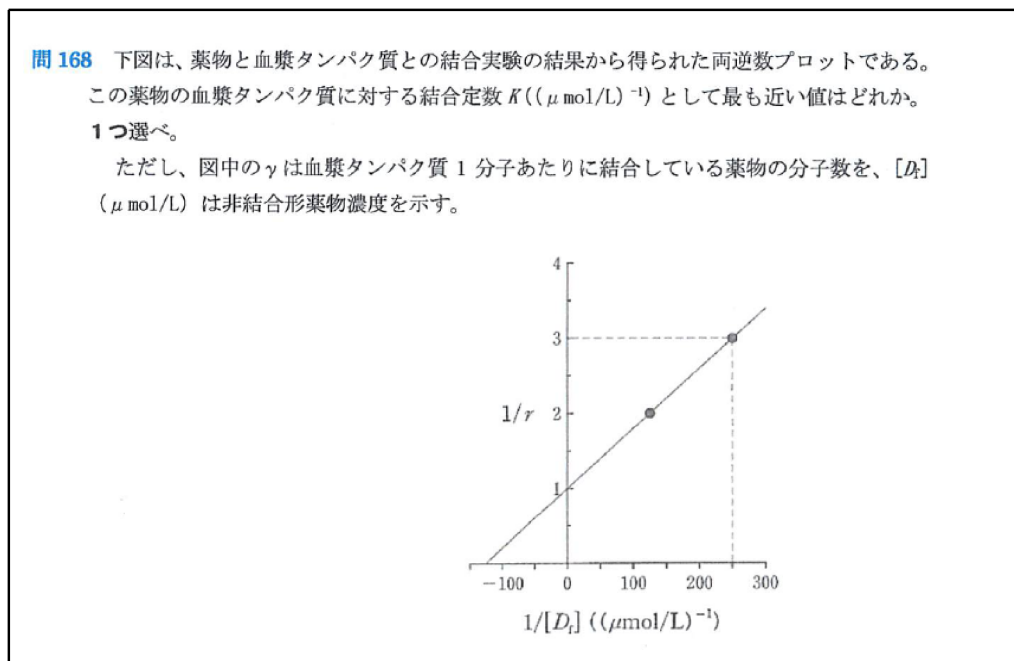


図 13 両逆数プロットによる表示

この問題の趣旨は、薬学生のがほとんどが記憶しているはずの関係式

$$r = \frac{nK[D_f]}{1 + K[D_f]}$$

を適用し、図から係数 K の情報を読み取らせることであるが、上式を変形して得られる $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{[D_f]}$ に関する 1 次式

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{n} + \frac{1}{nK} \frac{1}{[D_f]}$$

に適合するように、出題者側で座標軸の変数をわざわざ取り替えていてくれたにもかかわらず、全く対応できない学生が少なくなかった。上記の式変形自体は、専門科目の講義などで繰り返し学生が目にしてはいるはずのものであることから、解答に支障をきたした主な要因は、普段あまり目にするのではない両逆数プロットによるグラフの提示にあったものと考えられる。以上の例はいずれも、log や逆数などの変数変換が介在することによって、図的情報と数式表現との乖離が生じてしまった事例とみることができる。

4 結論と今後の課題

図的情報を学習者が受容する際に発生する障害の原因について注目した場合、第 2 節でみた実験授業の事例と、第 3 節でみた専門科目での状況との間で、多くの連関が認め

られる。それらは幅広い要素を含むが、以下のように大きく分類されるのではないかと考えられる。

1. 変数の種別や変域をまず把握するなど、図の読み取りに関する基本的な「作法」が身についているか。
2. 独立変数と従属変数の対応付けの規則性を表すものとして、関数のグラフが認識されているか。
3. 関数のグラフの形状から変数の変動を読み取るための典型的なアプローチが修得されているか。
4. 図的情報と数式表現との接続が、思考プロセスの中で維持されているか。

これらの条件については、学習者が当然クリアしているものとして教育者はとらえがちであるが、本稿で示した多くの事例は、実態が大きく異なることを示している。特に医歯薬系の学生にとっては、上記の能力は数学のみならず専門科目の学習において必須のものであり、テクノロジーを用いた図的情報の提供は、それらの養成をも意図して行われる必要がある。

謝辞

本研究は科学研究費補助金・基盤研究(C) (課題番号 24501075) の補助を受けた。

参考文献

- 1) 金子真隆, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫: 「 $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ で楽々 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ グラフ」, イーテキスト研究所, 2011
- 2) Kaneko M., Maeda Y., Hamaguchi N., Nozawa T., Takato S.: “A Scheme for Demonstrating and Improving the Effect of CAS Use in Mathematics Education”, Proc. ICCSA 2013, pp.62–71
- 3) 金子真隆, 前田善文, 濱口直樹, 野澤武司, 大内俊二, 高遠節夫: 「CAS の利用に基づく正確な図の利用がもたらす教育効果検証について」, 京都大学数理解析研究所講究録 1909, pp.136–146, 2014
- 4) 金子真隆, 野澤武司, 碓氷久: 「図の利用効果と数学的モデルの特性との関連について」, 日本科学教育学会第 38 回年会講演論文集, pp.495–496, 2014
- 5) 金子真隆, 野澤武司, 高遠節夫: 「 $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ による数学教材改善の試み」, 東邦大学教養紀要 45, pp.123–134, 2014