

On Namioka Spaces

岡山大理 吉岡 巖 (Iwao Yoshioka)

§0. 序

二つの空間 X, Y の直積 $X \times Y$ から空間 Z へ *separately continuous* な関数 $f: X \times Y \rightarrow Z$ が与えられているとしよう。その時 $X \times Y$ のある *nice set* P が取れて、その各点で f が *jointly continuous* になるための、空間 X, Y, Z の条件および $X \times Y$ における P の状態を決定する問題は 1900 年の初期より研究されてきたようであるが、その過程において 1974 年に I. Namioka [7] は、次節で述べるように、空間 X がある条件をみたす時、*compact* 空間 Y と *metric* 空間 Z に対して、*separately cont.* $f: X \times Y \rightarrow Z$ は X のある *dense G_δ-set* A に対して $A \times Y$ 上の全ての点で f は *jointly cont.* になるという興味ある結果を示し同時に位相群や関数解析への応用を与えた。これ等の方面への応用も興味あると思はれるが、この *note* においては、 Z は *metric* 空間として

空間 X と Y の条件を各々どこまで弱め得るかについて、
Namioka の結果以後の研究を紹介する。

§1. Namioka の定理.

定義 (1.1). X, Y, Z を空間とする. $f: X \times Y \rightarrow Z$ について、 $f(\cdot, y): X \rightarrow Z$ cont. for any $y \in Y$ and $f(x, \cdot): Y \rightarrow Z$ cont. for any $x \in X$ の時 f を *separately continuous* と云う。
また $(x, y) \in X \times Y$ について、 $f(x, y)$ の任意の近傍 $S[f(x, y)]$ に対して (x, y) の、 $X \times Y$ における、近傍 $U(x, y)$ が存在して、 $f[U(x, y)] \subset S[f(x, y)]$ のとき f は (x, y) で *jointly continuous* という。

定義 (1.2). 空間 X において open coverings の列 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、次の条件をみたす時 X を *strongly countably complete* という。

条件: X の closed sets の列 $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ で、 $F_n \subset G_n$ for some $G_n \in \gamma_n$ ($n=1, 2, \dots$) ならば、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ 。

定理 (1.3) [7 ; Namioka の定理] X を strongly countably complete, regular 空間, Y を locally compact, σ -compact 空間, Z を metric 空間とし、 $f: X \times Y \rightarrow Z$ を separately cont. とする。そのとき X の dense G_δ -set A が存在して、 $A \times Y$ の全ての点で f は jointly cont. である。

P. Kenderov [6] は 1980 年の論文で Namioka の定理を、形

式'上少し一般化しているの'で'ここに紹介する。

定義 (1.4) Y を空間, (Z, d) を metric 空間とする。

$C(Y, Z) = \{f \mid f: Y \rightarrow Z \text{ cont.}\}$ とし, この集合に各々 pointwise convergence-topology, compact-open topology, sup-norm topology を与えた空間を $C_p(Y, Z)$, $C_k(Y, Z)$, $C_n(Y, Z)$ で'示すことにする。(sup-norm topo. は Y が "compact" の時)

更に $d(f, g) = \sup\{d(f(y), g(y)) \mid y \in Y\}$ for $f, g \in C(Y, Z)$

$U(f, \varepsilon) = \{g \in C(Y, Z) \mid d(f, g) < \varepsilon\}$ for $f \in C(Y, Z)$, $\varepsilon > 0$ とし $\{U(f, \varepsilon) \mid f \in C(Y, Z), \varepsilon > 0\}$ を base とする $C(Y, Z)$ の topology を $C_u(Y, Z)$ で'示す。 Y が "compact" 空間のとき $C_u(Y, Z) = C_n(Y, Z)$ が'成立している。

Lemma (1.5) X, Y を空間, (Z, d) を metric 空間とし, 二つの条件 (C_1) , (C_2) を考える。

(C_1) : 任意な separately cont. $f: X \times Y \rightarrow Z$ に対して, X の dense G_δ -set A が'存在して, $A \times Y$ の全ての点で f は jointly cont.

(C_2) : 任意な cont. map $F: X \rightarrow C_p(Y, Z)$ に対して, X の dense G_δ -set A が'存在して, A の全ての点で $F: X \rightarrow C_u(Y, Z)$ が' cont.

このとき (C_2) ならば (C_1) が'成立し, Y が "compact" 空間の時 は 逆も成立する。Kenderov は, 空間 X, Z が'定理 (1.3) と同

じ"とき, 条件 (C₂) が, 従って (C₁) が成立するための Y の条件を次のこ"とくえた。

定理(1.6) [6] X を *strongly countably complete, regular* 空間, (Z, d) を *metric* 空間とし, 空間 Y に對して $F: X \longrightarrow C_p(Y, Z)$ *cont.* とする。このとき Y に関して下の条件(*)が"みたされているならば, X の *dense G_δ-set* A が"存在して, A の全ての点で $F: X \longrightarrow C_u(Y, Z)$ が" *cont.*

(*) : X の *countably compact set* Δ と Y の *separable closed set* Y_1 に對して, $r_{Y_1} F(\Delta)$ が" $C_u(Y_1, Z)$ の *separable set* である。(但し $r_{Y_1}: C(Y, Z) \longrightarrow C_u(Y_1, Z)$ は $r_{Y_1}(f) = f|_{Y_1}$: *restriction on Y_1 of f for $f \in C(Y, Z)$*)

更に彼は次の定理によつて Y が *compact* 空間の時, 上の条件(*)が"満されることを示した。

定理(1.7) [6] X は *strongly countably complete, regular* 空間, (Z, d) は *metric* 空間, Y を *compact* 空間とする。

$F: X \longrightarrow C_p(Y, Z)$ が" *cont.* とするならば, 定理(1.6) の(*)が"みたされる。

[注]: 定理(1.7) に於いて, 空間 Y の条件を本質的に弱めることが"できるかどうかは不明であるが, Y が" *hemi-compact* 空間のとき定理(1.6) と類似の方法で"次の結果を得たので, 一応証明をのべておく。この結果から

Namioka の定理は直接の系として得られる。

定理(1.8) X を *strongly countably complete, regular* 空間, (Z, d) を *metric* 空間, Y を *hemicompact* 空間とし, $F: X \longrightarrow C_p(Y, Z)$ を *cont.* とする。このとき X の *dense G_δ -set* A が存在して, A の全ての点で $F: X \longrightarrow C_k(Y, Z)$ は *cont.*

[注]: 上の結果は [7 ; Theorem 2.2] から直接示し得るので, Namioka の定理の一般化にはならない。

(定理(1.8) の証明)

Y は *hemicompact* であるから, 可算個の *compact sets* $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して, $K_n \subset K_{n+1}$, $Y = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$ 更に Y の任意な *compact set* はある K_i の *subset* になっている。 $f, g \in C(Y, Z)$ について

$$p_n(f, g) = \sup \{d(f(y), g(y)) \mid y \in K_n\}$$

$$\mu_n(f, g) = \min \{1/2^n, p_n(f, g)\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^\infty \mu_n(f, g)$$

と定義すると, ρ によって $C_k(Y, Z)$ は *metrizable* であることが良く知られている。さて *strongly countably complete* の条件をみたす X の *open coverings* の列を $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ について,

$$H_n = \{x \in X \mid \delta(F(U)) (\equiv \text{diameter of } F(U) \text{ w.r. to } \rho) > \frac{1}{2^n} \text{ for any open set } U \ni x\}$$

とすると, 各 H_n は X の閉集合であって, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - H_n)$ は X の G_δ -set となり, A の各点で $F: X \longrightarrow C_k(Y, Z)$ が連続になることは明らかである。従って各 H_n が nowhere dense in X であることを示せば証明は終る。そのために必要な次の Lemma を証明する。

Lemma: γ を X の open covering, $U_0 \subset X$ は X の open set で $U_0 \cap H_n \neq \emptyset$ なるものとするとき, X の open sets U_{00}, U_{01} と, 一点 $y_0 \in K_{n+1}$ が存在して以下の条件をみたす。

- (1) $\overline{U_{00}} \cup \overline{U_{01}} \subset U_0, \quad \overline{U_{00}} \cap \overline{U_{01}} = \emptyset$
- (2) $\overline{U_{00}} \subset G_{00}, \quad \overline{U_{01}} \subset G_{01}$ for some $G_{00}, G_{01} \in \gamma$
- (3) $d(F(x')(y_0), F(x'')(y_0)) > \frac{a}{n+1}$ for any $x' \in \overline{U_{00}}, x'' \in \overline{U_{01}}$
 $(a = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}})$

(Lemma の証明) $U_0 \cap H_n \neq \emptyset$ より $\delta(F(U_0)) > \frac{1}{2^n}$, 従って $x'_0, x''_0 \in U_0$ があって,

$$\frac{1}{2^n} < \rho(F(x'_0), F(x''_0)) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i(F(x'_0), F(x''_0)) + \sum_{i=n+2}^{\infty} \mu_i(F(x'_0), F(x''_0))$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i(F(x'_0), F(x''_0)) = A, \quad \sum_{i=n+2}^{\infty} \mu_i(F(x'_0), F(x''_0)) = B \text{ とおくと}$$

$$A > \frac{1}{2^n} - B, \quad B \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ より } A > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = a$$

従ってある $l (1 \leq l \leq n+1)$ について,

$$\frac{a}{n+1} < \mu_l(F(x'_0), F(x''_0)) \leq \rho_l(F(x'_0), F(x''_0))$$

であるから, $y_0 \in K_l \subset K_{n+1}$ が存在して

$$\frac{a}{n+1} < d(F(x'_0)(y_0), F(x''_0)(y_0)).$$

この時 $F: X \rightarrow C_p(Y, Z)$ cont. より X の open sets $U_{00} \ni x'_0$, $U_{01} \ni x''_0$ と γ の元 G_{00}, G_{01} が存在して (1) (2) (3) をみたす。

さて, 空でない open set $U_0 \subset H_n$ の存在を仮定するとき, γ_1 に対して Lemma (1)~(3) をみたす X の open sets U_{00}, U_{01} と $y_0 \in K_{n+1}$ が存在する。続いて γ_2 と $U_{00} \subset H_n$ に関して Lemma の (1)~(3) をみたす X の open sets U_{000}, U_{001} と $y_{00} \in K_{n+1}$ を得る。同様に γ_2 と $U_{01} \subset H_n$ に関して, U_{010}, U_{011} と $y_{01} \in K_{n+1}$ を得る。以下続けて X の open sets の族

$\{U_{j_0 j_1 \dots j_k} \mid j_0=0, j_i=0 \text{ or } 1 \text{ for } 1 \leq i \leq k; k \in \mathbb{N}\}$ と K_{n+1} の countable set

$$Q = \{y_{j_0 j_1 \dots j_k} \mid j_0=0, j_i=0 \text{ or } 1 \text{ for } 1 \leq i \leq k; k \in \mathbb{N}\}$$

が取れて次の条件をみたす。

- (4) $\overline{U_{j_0 j_1 \dots j_p j_k}} \subset U_{j_0 j_1 \dots j_p} \quad \forall p < k$
- (5) $\overline{U_{j_0 j_1 \dots j_k}} \subset G_{j_0 j_1 \dots j_k}$ for some $G_{j_0 j_1 \dots j_k} \in \gamma_k$
- (6) $\{\overline{U_{j_0 j_1 \dots j_k}} \mid j_0=0, j_i=0 \text{ or } 1 \text{ for } 1 \leq i \leq k\}$: disjoint
- (7) $j_i = j'_i (0 \leq i \leq k)$ and $j_{k+1} \neq j'_{k+1}$ ならば

$$d(F(x')(y_{j_0 j_1 \dots j_k}), F(x'')(y_{j'_0 j'_1 \dots j'_k})) > \frac{1}{n+1} \quad (x' \in \overline{U_{j_0 j_1 \dots j_k j_{k+1}}}, x'' \in \overline{U_{j'_0 j'_1 \dots j'_k j'_{k+1}}})$$

さて $S = \{(j_i)_{i \geq 0} : \text{sequence} \mid j_0=0, j_i=0 \text{ or } 1 : i \in \mathbb{N}\}$ は uncountable set であって, 任意の $\rho = (j_i)_{i \geq 0} \in S$ について, $\Delta(\rho) = \bigcap \{\overline{U_{j_0 j_1 \dots j_k}} \mid k \geq 0\}$ とおくと $\Delta(\rho)$ は X の non-empty closed set となり, $\Delta = \bigcup \{\Delta(\rho) \mid \rho \in S\}$ は X の countably

compact set である。次に

(8) $A = (j_i)_{i \geq 0}, A' = (j'_i)_{i \geq 0} \in S$ について, $j_i = j'_i$ ($0 \leq i \leq k$), $j_{k+1} = j'_{k+1}$ ならば, (7) より

$$d(F(x)(y_{j_0 j_1} \dots j_k), F(x')(y_{j'_0 j'_1} \dots j'_k)) > \frac{q}{n+1} \quad (x \in \Delta(A), x' \in \Delta(A'))$$

が成立する。ここで写像 $X \xrightarrow{F} C_p(Y, Z) \xrightarrow{\gamma_{\bar{Q}}} C_p(\bar{Q}, Z)$ を考えると, $\gamma_{\bar{Q}} F(A)$ は $C_n(\bar{Q}, Z)$ の separable subset でない事が示される。そのために

$$W(A) = \{g \in C(\bar{Q}, Z) \mid \|g - h\| < \frac{q}{2(n+1)} \text{ for some } h \in \gamma_{\bar{Q}} F(A)\} \quad (A \in S)$$

とおくと, $A = (j_i)_{i \geq 0} \neq A' = (j'_i)_{i \geq 0}$ ならば (8) より $W(A) \cap W(A') = \emptyset$ が示せるから $\{W(A) \mid A \in S\}$ は uncountable open collection in $C_n(\bar{Q}, Z)$ となり $\gamma_{\bar{Q}} F(A)$ は $C_n(\bar{Q}, Z)$ の separable subset でない。一方 $\gamma_{\bar{Q}} F$ は cont. で, $\bar{Q}$ は separable compact 空間であるから, 定理(1.7)によって $\gamma_{\bar{Q}} F(A)$ は $C_n(\bar{Q}, Z)$ の separable subset となり, この矛盾は H_n が nowhere dense in X を示す。

$\mathfrak{M}$ = 可算公理を満足する空間に関連しては, 1979年に次の結果が得られている。

定理(1.9)[1] X を空間, Y を $\mathfrak{M}$ = 可算公理をみたす空間, Z を metric 空間とし, $f: X \times Y \rightarrow Z$ separately cont. とする時, X に於ける residual set A が存在して, $A \times Y$ の全ての点で, f は jointly cont. になる。

(但し A が "residual in X で" あるとは, $X-A$ が, X で "nowhere dense sets" の可算和になっている)

§2. Namioka 空間.

1980 年に入って J.P.R. Christensen [3, 4] は, Namioka 空間の概念を定義した.

定義(2.1). Hausdorff 空間 X が "Namioka 空間" であるとは, 任意な compact 空間 Y と metric 空間 Z に対して, 任意に separately cont. $f: X \times Y \rightarrow Z$ が与えられたとき, X の dense G_δ -set A が存在して, $A \times Y$ の全ての点で f は jointly cont. になることを言う. この定義において, metric 空間 Z の代りに, 閉区間 $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ にしても同値であることは彼によって示されている.

Namioka の定理より, strongly countably complete, regular T_1 -空間は Namioka 空間であるが, 以後 Christensen; S. Raymond [8]; M. Talagrand [9] 等によって, Namioka 空間であるための, より弱い条件が研究されている. この節で, それ等の空間の定義と相互の関係で知られているところを述べておく.

定義(2.2) 空間 X の, どのような open dense sets in X の列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ に対しても, $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ が X で dense のとき, X を Baire 空間と言う.

以下空間 X に topological game を定義するが, その前に記号を与える。 $\mathcal{T}_X^* = \{U \mid X \supset U: \text{non-empty open set in } X\}$, $\mathcal{K}_X = \{K \mid X \supset K: \text{non-empty compact set}\}$ とする。

定義(2.3) 空間 X に topological games G, G_0, G_K を定義する。最初に G における play は二人の players α, β で行う。最初に β が, $U_1 \in \mathcal{T}_X^*$ を取り, 続いて α が, $V_1 \in \mathcal{T}_X^*$ と $x_1 \in X$ の組 (V_1, x_1) を $U_1 \supset V_1 \ni x_1$ で"あるように取る。続いて β が, $U_2 \in \mathcal{T}_X^*$ を $U_2 \subset V_1$ で"あるように取り, 続いて α が, $V_2 \in \mathcal{T}_X^*$ と $x_2 \in X$ の組 (V_2, x_2) を $U_2 \supset V_2 \ni x_2$ で"あるように取る。以下これをくり返す。この時 game G において, α の strategy $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ を

$$\lambda_n: (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^* \times X$$

$$\lambda_n(U_1, \dots, U_n) = [\lambda_n^1(U_1, \dots, U_n), \lambda_n^2(U_1, \dots, U_n)] \text{ with}$$

$$\lambda_n^2(U_1, \dots, U_n) \in \lambda_n^1(U_1, \dots, U_n) \subset U_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で与えるとき, 任意の play: $U_1, \lambda_1(U_1), U_2, \lambda_2(U_1, U_2), \dots$ について, $\{\lambda_n^2(U_1, \dots, U_n)\}_{n=1}^\infty$ が $\bigcap_{n=1}^\infty \lambda_n^1(U_1, \dots, U_n)$ 内に cluster point を持つならば, λ を winning strategy for α in game G という。一方, β の strategy $t = (t_n)_{n=0}^\infty$ を

$$t_0 \equiv U_1 \in \mathcal{T}_X^* \quad t_n: (\mathcal{T}_X^* \times X)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^*$$

$$t_n((V_1, x_1), \dots, (V_n, x_n)) \equiv U_{n+1} \subset V_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で与えるとき, 任意の play: $U_1, (V_1, x_1), U_2, (V_2, x_2), \dots$

について, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 内に cluster point を持たないならば, t を winning strategy for β in game G という。

次に game G_α における play は二人の players α, β で"行い, game G における定義を「 β が, $U_n \in \mathcal{T}_X^*$ を取った時, α が $V_n \in \mathcal{T}_X^*$ と $x_n \in X$ の組 (V_n, x_n) を $U_n \cap V_n$ で"あるように取る」と変えて得られる game を G_α とする。このとき, α, β の各々 winning strategy in game G_α は, game G の時に類似に定義される。

最後に game G_K における play は二人の players α, β で"行い, game G における定義を「 β が, $U_n \in \mathcal{T}_X^*$ を取ったとき, α が, $V_n \in \mathcal{T}_X^*$ と $K_n \in \mathcal{K}_X$ の組 (V_n, K_n) を, $U_n \cap V_n$ で"あるように取る」と変えて得られる game を G_K とする。このとき α, β の各々 winning strategy in game G_K : $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, $t = (t_n)_{n=0}^{\infty}$ は,

$$\lambda_n : (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^* \times \mathcal{K}_X$$

$$t_n : (\mathcal{T}_X^* \times \mathcal{K}_X)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^*$$

として, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ の cluster point を考えることによって, game G の時と類似に定義される。

定義(2.4) 空間 X において, 各々, game G で", game G_α で", game G_K で", α が" winning strategy を持っているとき, X を α -well α -favorable, $(\alpha-\alpha)$ -favorable, $(K-\alpha)$ -favorable と呼ぶ, 各々, game G で", game G_α で",

game G_K で、 β が "いかなる winning strategy も持たない" とき、 X を α -well β -defavorable, $(\alpha-\beta)$ -defavorable, $(K-\beta)$ -defavorable と呼ぶ。

更に G. Choquet [2] によって与えられた α -favorable 空間の概念は次の定義で与えられる。

定義(2.5). 空間 X の topological game G_0 を定義する。

play は二人の players α, β で行い, game G_1 における定義を「 β が、 $U_n \in \mathcal{T}_X^*$ を取った時、 α が $V_n \in \mathcal{T}_X^*$ を、 $U_n \supset V_n$ であるように取る」に変えて得られる game を G_0 とする。この strategy $\rho = (\rho_n)_{n=1}^\infty$ は $\rho_n: (\mathcal{T}_X^*)^n \rightarrow \mathcal{T}_X^*$ $\rho_n(U_1, \dots, U_n) \subset U_n$ で与えられて、任意の play: $U_1, \rho_1(U_1), U_2, \rho_2(U_1, U_2), \dots$ について $\bigcap_{n=1}^\infty \rho(U_1, \dots, U_n) \neq \emptyset$ のとき、 ρ を winning strategy for α in game G_0 という。一方 β の strategy $t = (t_n)_{n=0}^\infty$ は、 $t_0 \equiv U_1 \in \mathcal{T}_X^*$, $t_n: (\mathcal{T}_X^*)^n \rightarrow \mathcal{T}_X^*$ $t_n(V_1, \dots, V_n) \subset V_n$ で与えられて、任意の play: $U_1, V_1, t_1(V_1), V_2, t_2(V_1, V_2), \dots$ について、 $\bigcap_{n=1}^\infty V_n = \emptyset$ のとき、 t を winning strategy for β in game G_0 という。game G_0 において、 α が winning strategy を持つとき、 X を α -favorable, β が "いかなる winning strategy も持たない" とき、 X を β -defavorable と呼ぶ。

以上、topological game によって定義される空間と

Tychonoff space になることはよい。 X は α -favorable であることを見る。

$U \in \mathcal{T}_X^*$ について, $h_U \in U$, $J_U \subset I$: countable, non-empty set を各々固定する。この時 $U \supset W(h_U, J_U)$ をめたすようにする。 game G_0 における α の strategy $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ を

$$\lambda_n: (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^* \quad \lambda_n(U_1, \dots, U_n) = W(h_{U_n}, J_{U_n}) \subset U_n$$

とする。この時, 任意な play $U_1, \lambda_1(U_1), U_2, \lambda_2(U_1, U_2), \dots$ について, $W(h_{U_n}, J_{U_n}) \supset W(h_{U_{n+1}}, J_{U_{n+1}})$. 従って

$$J_{U_1} \subset J_{U_2} \subset \dots \quad ; \quad h_{U_{n+1}}|_{J_{U_n}} = h_{U_n}$$

$$J = \bigcup_{n=1}^\infty J_{U_n} : \text{countable set of } I$$

今 $l \in X$ を $l(t) = \begin{cases} h_{U_n}(t) & \text{if } t \in J_{U_n} \\ 0 & \text{if } t \notin J \end{cases}$ と定義するとき,

$l \in \bigcap_{n=1}^\infty \lambda_n(U_1, \dots, U_n)$ 従って X は α -favorable.

次に X は not Namioka 空間であることを見る。

I の Stone-Čech compactification βI を作って。

$$f: X \times \beta I \longrightarrow \{0, 1\} \subset [0, 1] \text{ を}$$

$(h, y) \in X \times \beta I$ について $f(h, y) = \beta y(h)$ と定義する。ここに $\beta h: \beta I \longrightarrow \{0, 1\}$ extension of h とする。

f が separately cont. を示す

$h_0 \in X$ については, $f(h_0, y) = \beta h_0(y): \beta I \longrightarrow \{0, 1\}$ は連続。

$y_0 \in \beta I$ については, 次の二つの事が示される。

(A) $J \subset I$: non-empty countable set with $y_0 \in \overline{J}^{\beta I}$ ならば,
 $h \in X, k \in W(h, J)$ について $\beta h(y_0) = \beta k(y_0)$.

何故ならば, net $\{t_\alpha\} \subset J$ が存在して, $t_\alpha \rightarrow y_0$ より
 $\beta h(t_\alpha) \rightarrow \beta h(y_0), \beta k(t_\alpha) \rightarrow \beta k(y_0)$ 更に $\beta h(t_\alpha) = h(t_\alpha) = k(t_\alpha)$
 $= \beta k(t_\alpha)$ であるから $\beta h(y_0) = \beta k(y_0)$.

(B) $y_0 \notin \overline{J}^{\beta I}$ for any countable set $J \subset I$ ならば, $\beta h(y_0)$
 $= 0$ for any $h \in X$.

何故ならば, ある $h \in X$ について $\beta h(y_0) = 1$ とすると,
 βI に於ける, y_0 の近傍 W が存在して, $y \in W$ ならば,
 $|\beta h(y_0) - \beta h(y)| < \frac{1}{2}$. このことは $\beta h(y) = 1$ for $y \in W$ を意
 味する. 今 $J_0 = \{t \in I \mid h(t) = 1\}$ を考えると, $y_0 \in \overline{J_0}^{\beta I}$
 となり矛盾する.

この事実より $f(h, y_0) = \beta h(y_0): X \rightarrow \{0, 1\}$ は連続である.

何故ならば $y_0 \in \overline{J}^{\beta I}$ for some countable set $J \subset I$ なら
 ば, $h \in W(h, J)$ で, $k \in W(h, J)$ ならば $f(k, y_0) = \beta k(y_0) =$
 $\beta h(y_0) = f(h, y_0)$. 反対に $y_0 \notin \overline{J}^{\beta I}$ for any countable set J
 $\subset I$ ならば, $h \in X$ で, $k \in X$ ならば $f(k, y_0) = \beta k(y_0) = 0$
 $= \beta h(y_0) = f(h, y_0)$.

更に X の全ての h に対して, $y_h \in \beta I$ が存在して, f は
 (h, y_h) で not jointly cont. を示す.

もしある $h \in X$ に対して, 全ての $(h, y) \in \{h\} \times \beta I$ で f が

jointly cont. とするならば, βI の compact 性より, h の近傍 $W(h, J_h)$ が存在して, $k \in W(h, J_h)$ ならば

$$\frac{1}{2} > |f(k, y) - f(h, y)| = |\beta k(y) - \beta h(y)| \text{ for any } y \in \beta I$$

とできる。一方, $y_0 \in I - J_h$ を一つ固定するとき, $l \in X$ を

$$\begin{cases} l(y_0) \neq h(y_0) \\ l(t) = h(t) \text{ if } t \neq y_0 \end{cases}$$

なるものとする, $l \in W(h, J_h)$ より

$$\frac{1}{2} > |\beta l(y_0) - \beta h(y_0)| = |l(y_0) - h(y_0)| = 1$$

これは矛盾である。従って X は Namioka 空間であり得ない。

[注] 例(2.6)より, Baire空間が, どのような条件のもとで Namioka 空間になるか, 良い条件を求めることは, 一つの問題である。

§3. Talagrand の問題

M. Talagrand は, [9] に於いて, 次の大変興味ある問題を提起した。

Problem: Y を compact 空間とする。このとき, 全ての Baire 空間 X と全ての separately cont. $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, X の dense G δ -set A が存在して, $A \times Y$ の全ての点で, f が jointly cont. となるような Y は, どのような条件をみたすか。

この問題に対して, 彼は同じ論文で, Y が Eberlein

compact 空間で"あれば"充分で"あることを示している。この後, G. Debs [5] は 1985 年の preprint において, より一般的な結果を示したので, それをのべることにする。

定義(3.1) X を compact 空間とする。index set Λ が"あって, X が, $\{x = (x(\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \in [0, 1]^\Lambda \mid |\{\lambda \mid x(\lambda) > 0\}| \leq \aleph_0\}$ のある compact set と homeomorphism で"あるとき, X を Carson-compact という。

Eberlein compact は Carson compact で"あることは知られている。

定理(3.2) [5] X を Baire 空間, K を Carson compact 空間とする時, continuous map $f: X \rightarrow C_p(K, \mathbb{R})$ が与えられたならば, X の dense Go-set A が存在して, A の全ての点で, $f: X \rightarrow C_n(K, \mathbb{R})$ は continuous で"ある。

(証明) 最初に, $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ を compact 空間の族とすると, 次の事実はよく知られている。

(1). $B \subset A$ で, $\pi_B: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ を projection とする。 $\overset{\circ}{\pi}_B: C_n(\prod_{\alpha \in B} X_\alpha) \rightarrow C_n(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$ を, $\overset{\circ}{\pi}_B(\varphi) = \varphi \pi_B$ for $\varphi \in C_n(\prod_{\alpha \in B} X_\alpha)$ で与えられるとき, $\overset{\circ}{\pi}_B$ は linear norm-preserving embedding で"ある。

(2). $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A$ で, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ のとき, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{\pi}_{A_n}[C(\prod_{\alpha \in A_n} X_\alpha)]$ は, $C_n(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$ の uniformly dense set

である。

以後用いる記号を定めておく。 $\tilde{N} = \{0\} \cup \mathbb{N}$ とし、空間 Z に対して、 $C(Z, \mathbb{R})$ を $C(Z)$ で示す。

ある index set I に対して、 $K \subset [0, 1]^I$ と考えてよいから、 $y = (y(i))_{i \in I} \in K$ について、 $S(y) = \{i \in I \mid y(i) > 0\}$ は可算集合である。各 countable set $J \subset I$ について、 $C_n([0, 1]^J)$ における uniformly dense set $\{\varphi_J^k \mid k \in \tilde{N}\}$ を固定する。各 finite set $F \subset K$ について、 $S(F) = \{i \in I \mid y(i) > 0 \text{ for some } y \in F\}$, $\Phi(F) = \{\varphi_{S(F)}^k \mid k \in \tilde{N}\}$, $\Phi_n(F) = \{\varphi_{S(F)}^k \mid 0 \leq k \leq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) とする。

さて、 $n \in \mathbb{N}$ について、

$A_n = \bigcup \{U \mid U: \text{non-empty open in } X \mid \text{diameter of } f(U) \leq \frac{1}{n}\}$ とすると、 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の全ての集で、 $f: X \rightarrow C_n(K)$ は連続である。よって、今の場合、 A が X で dense でない、と仮定する。このとき、 X は Baire 空間であるから、ある $m \in \mathbb{N}$ に対して、 X の non-empty open set ω が存在して、 $A_m \cap \omega = \emptyset$ 。 $\frac{1}{m} = \varepsilon$ とおく。次に、Baire 空間と β -defavorable の同値を用いるために、 X における game G_ε について、 player β の strategy $t = (t_n)_{n=0}^{\infty}$ を与える。それと同時に各 $n \in \tilde{N}$ に対して、 $t'_n: (T_X^*)^n \rightarrow \mathcal{F}_K = \{E \mid E \subset X: \text{non-empty finite set}\}$ を与える。

$t_0 = U_0 = \omega$, $t'_0 = F_0 = \{y_0\}$ ($y_0 \in K$ を固定) とし, 帰納的に

$$(1)_n \quad U_0 \supset V_0 \supset t_1(V_0) = U_1 \supset V_1 \supset \dots \supset t_n(V_0, \dots, V_{n-1}) = U_n \supset V_n$$

$$(2)_n \quad F_0 \subset t'_1(V_0) = F_1 \subset t'_2(V_0, V_1) = F_2 \subset \dots \subset t'_n(V_0, \dots, V_{n-1}) = F_n$$

$$(3)_n \quad m+1 \leq n \text{ について, } x \in U_{m+1}, 0 \leq k \leq m, \varphi \in \Phi_m(F_k)$$

ならば, $y \in F_{m+1}$ が存在して, $|(f(x) - \varphi)(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$ とする

U_i, F_i が作れたとする。このとき, $t_{n+1}(V_0, \dots, V_{n-1}, V_n) = U_{n+1}$,

$t'_{n+1}(V_0, \dots, V_{n-1}, V_n) = F_{n+1}$ を作る。

$$C([0, 1]^I) \supset \bigcup_{0 \leq k \leq n} \Phi_n(F_k) = \{\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^p\} \text{ とおく。}$$

$0 \leq m \leq p$ について,

$$W^m = \{x \in V_n \mid |(f(x) - \varphi^m)(y)| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ for some } y \in K\}$$

とおくとき, W^m は X の non-empty open set であり, $V_n - W^m$ は

nowhere dense in V_n である。 V_n は Baire 空間であるから,

$a \in \bigcap_{m=0}^p W^m$ が存在する。よって, $0 \leq m \leq p$ なる各 m について

$b_m \in K$ が存在して $|(f(a) - \varphi^m)(b_m)| > \frac{\varepsilon}{2}$ 。

このとき

$$t_{n+1}(V_0, \dots, V_n) = U_{n+1} = \bigcap_{m=0}^p \{x \in \bigcap_{m=0}^p W^m \mid |(f(x) - \varphi^m)(b_m)| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$t'_{n+1}(V_0, \dots, V_n) = F_{n+1} = F_n \cup \{b_0, b_1, \dots, b_p\} \text{ とする。}$$

$\{x \in \bigcap_{m=0}^p W^m \mid |(f(x) - \varphi^m)(b_m)| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ は各 m について, X の open

set であるから, U_{n+1} は X の open set であり, $a \in U_{n+1}$ 。また

$F_n \subset F_{n+1}$ は明らか。

更に $x \in U_{n+1}$, $0 \leq k \leq n$, $\varphi \in \Phi_n(F_k)$ ならば, ある m

$(0 \leq m \leq p)$ に對して $\varphi = \varphi^m$ であるから $|(f(x) - \varphi^m)(b_m)| > \frac{\varepsilon}{2}$
for $b_m \in F_{m+1}$

X は β -defavorable であるから game G_0 における, ある
play: $U_0 \supset V_0 \supset U_1 \supset V_1 \supset \dots$ と, K の finite set の列
 $F_0 \subset F_1 \subset \dots$ が存在して, 各 $n \in \mathbb{N}$ について (1)_n, (2)_n,
 $B|_n$ をみたし, 更に ある $x_0 \in X$ に對し $x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$.

次に $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ について, $J_n = S(F_n) \subset I$ とし $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ とする
と $L = \{y \in K \mid S(y) \subset J\} = \bigcap_{i \in I \setminus J} \{y \in K \mid y(i) = 0\}$ は K の閉集合
であるから, projection $\pi_J: [0, 1]^I \longrightarrow [0, 1]^J$ を考え
ると L と $\pi_J(L)$ は homeomorphism である.

さて $\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi(F_n)$ とする. このとき $\Gamma \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} C([0, 1]^{J_n})$
 $\subset C([0, 1]^J)$. $\Gamma_L = \{\varphi|_L \mid \varphi \in \Gamma\}$ とすると, Γ は uniformly
dense in $C_n([0, 1]^J)$ であるから, Γ_L は uniformly
dense in $C_n(L)$ である.

一方 $f(x_0)|_L \in C(L)$ に對して $\|f(x_0)|_L - \varphi|_L\|_{C_n(L)} > \frac{\varepsilon}{2}$
for any $\varphi \in \Gamma$ である.

何故ならば, $\varphi \in \Gamma$ に對して, $\varphi \in \Phi(F_k)$ for some $k \in \tilde{\mathbb{N}}$.
よって $\varphi = \varphi^l_{S(F_k)}$ ($l \in \tilde{\mathbb{N}}$). 今 $m = \max\{k, l\}$ とすると,
 $k \leq m$, $\varphi \in \Phi_m(F_k)$. ところで $x_0 \in U_{m+1}$ であるから
induction の仮定より $y \in F_{m+1} \subset L$ が存在して
 $|(f(x_0) - \varphi)(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$ 従って $\|f(x_0)|_L - \varphi|_L\|_{C_n(L)} > \frac{\varepsilon}{2}$

この矛盾は定理を証明する。

[注] Y を compact 空間とする。任意な Baire 空間 X と任意な separately cont. $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, X の dense G_δ -set A が存在して, $A \times Y$ の全ての点で, f が "jointly cont." となるならば, Y は Corson compact であるか. という問題は未解決であると考えられる。

文献

- [1] J. Calbrix et J.P. Troallic, Applications séparément continues; C.R. Acad. Sci. Paris. 288 (1979) 647~648
- [2] G. Choquet, Lectures on analysis, vol 1; Benjamin, New York and Amsterdam. (1969)
- [3] J.P.R. Christensen, Joint continuity of separately continuous functions; Proc. Am. Math. Soc. 82 (1981) 455~461
- [4] J.P.R. Christensen, Remarks on Namioka spaces and R.E. Johnson's theorem on the norm separability of the range of certain mappings; Math. Scand. 52 (1983) 112-116.
- [5] G. Debs, Convergence forte et convergence simple dans l'espace des fonctions continues sur un

compact de Corson; preprint.

- [6] P. Kenderov, Dense strong continuity of pointwise continuous mappings; Pacific J. Math 89 (1980) 111~130.
- [7] I. Namioka, Separate and joint continuity: Pacific J. Math. 51 (1974) 535~537.
- [8] J. S. Raymond, Jeux topologiques et espaces de Namioka; Proc. Am. Math. Soc. 87 (1983) 499-504.
- [9] M. Talagrand, Espaces de Baire et espaces de Namioka. Math. Ann. 270 (1985) 159~164.