

流体现象における対称性の低下と解の分岐

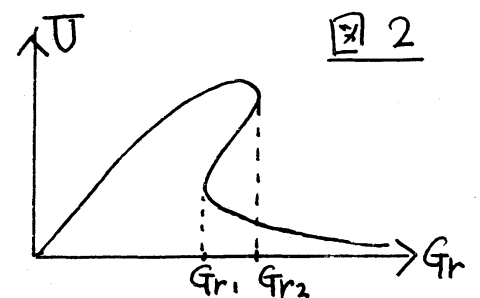
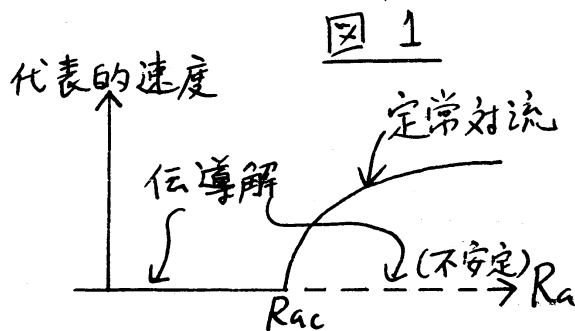
東京学芸大 松田佳久

1. 序 乱流の生成に関して、流れの不安定化と新しい解の出現は重要な現象である。このような現象は根本において、流体力学の基礎方程式が非線型であることに因っている。この非線型性に因って、同一の外的条件に対して複数の定常解が存在することが可能になる。例えば Bénard 対流の問題では、臨界 Rayleigh 数以下では伝導解のみが存在するが、それ以上では不安定な伝導解と共に安定な定常対流の解が存在する。(図 1 参照) つまり臨界 Rayleigh 数の前後において、その系は定常解の個数や安定性を異にするのである。従来このような流体现象における定常解の複数性の問題は個別的に論じられるのみで、一般的観点からは単に方程式が非線型であるから複数の定常解が存在し得るという常識に留まっていたようである。依って、本研究では Rayleigh 数のような外部パラメータを変えることにより、流体系にはどのような種類の臨界

現象が生じ得るのかも一般的に研究して見た。但し、今回は系が振動しない定常な場合に話を限った。

既に述べた Rayleigh 問題は図 1 に示してあるように、臨界点を境に今まであった安定な解が不安定化し、別の安定な無限小振幅の解が (系の状態を指定する位相空間において) 分岐するのが特徴である。この場合、重要なことは臨界点以下の解とそれ以上の新しい解とは速度場や温度場における対称性を異にしていることである。例えば Bénard 対流の問題では、伝導解は水平方向に完全に一様であるが、対流 (セル) が生ずると、そのような対称性は失われる。

一方、図 2 に示してあるような系では、位相空間での複数解の発生が全く異なっている。図 2 は気象学に流体力学の方程式を適用した例で、筆者が金星の上層大気に見られる高速の東西方向に吹く流れ (帯状流) を説明するために提出したモデルにおいて、太陽に依る南北加熱差 G_r を与えた時、定常解が取る帯状流の風速 U を模式的に示したものである。この場合は $G_r = G_{r1}$ と G_{r2} で定常解の対生成と対消滅が見



られる。2種の分岐の例は今まで余り例を見なかったが、最近、気象学において今述べた例 (1980, Jour. Meteor. Soc. Japan) の他にも見ることが出来る (^{Charney & Devore} 1979, Jour. Atmos. Sci.)。2型の分岐には速度場等における対称性の変化は関与しない。

本研究では対称性の低下が関係するか否かに依り、二つの異なった型の分岐が生ずることを示すことを試みた。

2. 対称性の低下を伴う場合

その為にあず、速度場 (と温度場) を或る対称性を持つモード $\omega_j^s(x)$ と持たないモード $\omega_j^a(x)$ で展開し、その系の状態を各モードの振幅 Ω_j^s, Ω_j^a で表現することにする；

$$W = \sum \Omega_j^s \omega_j^s(x) + \sum \Omega_j^a \omega_j^a(x)$$
。速度場がその対称性を持つ定常解は $\Omega_j^s \neq 0, \Omega_j^a = 0$ 、持たない解は $\Omega_j^s \neq 0, \Omega_j^a \neq 0$ である。ところで、各モードは方程式の非線型項 (移流項) を通して相互に励起し合っているので、 $\Omega_j^s \neq 0, \Omega_j^a = 0$ という解が可能な為には $\omega_j^s(x)$ 同士が相互作用しても $\omega_j^a(x)$ を作らなければならないことが必要である。つまり、 $\omega_j^s(x), \omega_{j'}^s(x), \omega_{j''}^a(x)$ の間のモード結合が生じなければならない。このことを考慮すると、この場合の振幅方程式は次のような形を持たなくてはならない。

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega_i^s}{\partial t} = -\nu_i \Omega_i^s + \sum_{j,k} \sigma_{jk}^i \Omega_j^s \Omega_k^s + \sum_{(i=1, \dots, L)} \tau_{jk}^i \Omega_j^s \Omega_k^s + Q_i \\ \frac{\partial \Omega_i^a}{\partial t} = -\nu_i \Omega_i^a + \sum_{j,k} \alpha_{jk}^i \Omega_j^s \Omega_k^s + \sum_{(i=1, \dots, M)} \beta_{jk}^i \Omega_j^s \Omega_k^s \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

ここで外部加熱等の外力は対称性を持つものとし Q_i で表わし、簡単のため $Q_i = \delta_i Q$ とし、 Q を変じ得る唯一の外パラメータとする。ここで問題は $Q = Q_0$ で $\Omega_i^s \neq 0$, $\Omega_i^a = 0$ の定常解が存在している時、 Q を $Q_0 + \delta Q$ に変えるとその解がどのように変形されるかという問題である。 $Q = Q_0 + \delta Q$ での解を $\Omega_i + \delta \Omega_i$ とし、 $\textcircled{1}$ から $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ とし、 $\delta \Omega_i$ に対する方程式を作ると

$$A \begin{pmatrix} \delta \Omega_1^s \\ \vdots \\ \delta \Omega_1^a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum \sigma_{jk}^1 (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) + \sum \tau_{jk}^1 (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) \\ \vdots \\ \sum \alpha_{jk}^1 (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) + \sum \beta_{jk}^1 (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_i \delta Q \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

但し、 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ $A_1 = \begin{pmatrix} -\nu_1 + \sum \sigma_{jk}^1 \Omega_j^s \Omega_k^s & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} -\nu_1 + \sum \alpha_{jk}^1 \Omega_j^s \Omega_k^s & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ $\textcircled{2}$

となる。 $\det A_2 \neq 0$ である限りは $\delta \Omega_i^a = 0$ なので、対称性の低下は見られない。従って、ここでは $\det A_2 = 0$ の場合を調べる。 ω_i^s, ω_i^a の一次変換により A_1, A_2 を対角化する。 A_1, A_2 の固有値を $\lambda_1^s, \dots, \lambda_L^s; \lambda_1^a, \dots, \lambda_M^a$ とすると $\det A_2 = 0$ なので、 A_2 の固有値のうち少なくとも一つは零である。それ

を λ_M とする。(各固有値は各固有モードの増幅率を意味するので、 $\det A = 0$ は或る固有モードに対して最初に仮定した定常解が中立になることを意味する。) 一次変換したモードに対して ② を書き直すと次の式になるが、この連立代数方程式を解けばよい。

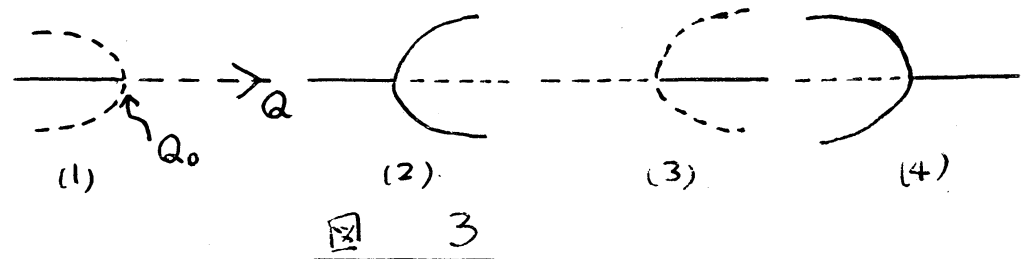
$$\begin{pmatrix} \lambda_1^s \delta \Omega_1^s \\ \vdots \\ \lambda_i^s \delta \Omega_i^s \\ \vdots \\ 0 \cdot \delta \Omega_M^s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum \alpha_{jk}^s (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) + \sum \tau_{jk}^s (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) \\ \vdots \\ \sum \alpha_{jk}^s (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) + \sum \beta_{jk}^s (\delta \Omega_j^s) (\delta \Omega_k^s) \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_i \delta Q \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad \text{③}$$

$\delta \Omega_i^s \equiv 0$ とすると、③の下半分は自動的に満たされ、 $\delta \Omega_i^s = (\tau_i / (-\lambda_i^s)) \cdot \delta Q$ を得るが、これは $\delta Q > 0$ でも $\delta Q < 0$ でも存在する対称性低下を伴わない解である。

問題なのは $\delta \Omega_i^s \neq 0$ の場合である。 $\varepsilon \equiv \sqrt{|\delta Q|}$ で $\delta \Omega_i^s = a_i^{(1)} \varepsilon + a_i^{(2)} \varepsilon^2 + \dots$, $\delta \Omega_i^a = a_i^{(1)} \varepsilon + a_i^{(2)} \varepsilon^2 + \dots$ と展開して、 ε の各巾の式を作る。 ε^1 の式からは $a_i^{(1)} = 0$, $a_i^{(2)} = 0$ ($i \neq M$) が、 ε^2 の式からは $a_i^{(2)} = (-\lambda_i^s)^{-1} [\tau_i \delta Q / |\delta Q| + \tau_{MM}^s (a_M^{(1)})^2]$, $a_i^{(2)} = (-\lambda_i^a)^{-1} [\beta_{MM}^s (a_M^{(1)})^2]$ ($i \neq M$) が得られる。 ε^3 の式に依り、最初で不安定化するモードの振幅 $a_M^{(1)}$ が決まる。つまり、 $a_M^{(1)} = \pm \sqrt{|P/R|}$ [$P = \sum \alpha_{jM}^s \tau_j / (-\lambda_j^s)$, $R = \sum \alpha_{jM}^s \tau_{MM}^s \cdot (-\lambda_j^s)^{-1} + 2 \sum \beta_{Mj}^s \beta_{MM}^s (-\lambda_j^a)^{-1}$]。但し $\text{sgn}(\delta Q) = \text{sgn}(-P/R)$ でのみ解は存在する。この定常解の決定の手続きは Rayleigh

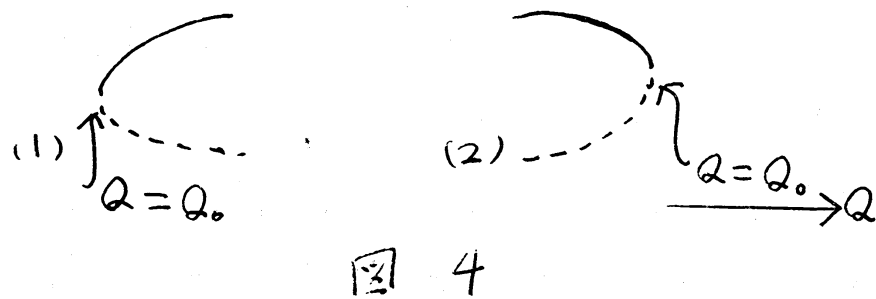
問題等における有限振幅決定のそれと本質的に同じである。
つまり、後者の手続では系の対称性低下が起こる場合一般に
妥当する手続であったのである。

以上により、定常解が得られたので、次にこれらの解の安
定性を擾動方程式を作ることに依りて調べた。その結果は解
の分岐の様相と合わせて、図4と同じような模式図として図
3に示してある。但し、この図では実線は安定解を、破線は
不安定解を意味する。この4つの場合のうちどれが実際に現
われるかは P と R の符号に依る。



3. 対称性低下の伴わない場合

この場合は①式で Ω_2 モードのみを問題にすればよい。以
上と同様の議論により、この場合の分岐と安定性は次の二つ
の模式図にまとめられる。



4. ポテンシャルに依る記述

よく知られているように René Thom はポテンシャルの存在する勾配系において生じ得るカタストロフィーを7つの型に分類した。以上で調べた二種類の「分岐」の型がそれぞれどのような関係にあるかを次に明らかにしたい。

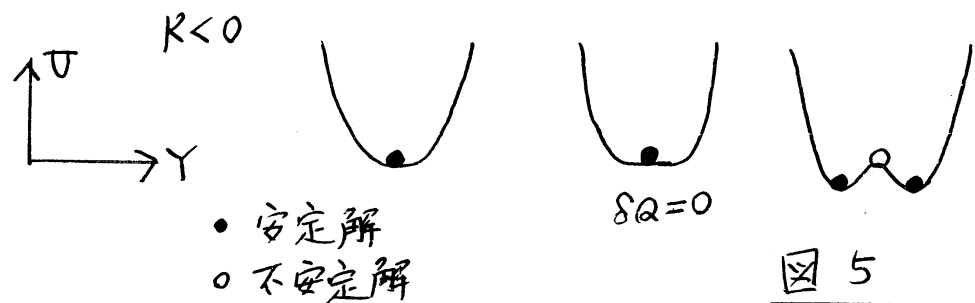
方程式系①は勾配系ではないが、以下のように近似的にポテンシャルを構成することが出来る。先ず、対称性低下を伴う場合を考察する。 ΔQ を δQ の代表的大きさと、 $\varphi \equiv \delta Q / |\Delta Q|$, $X_i \equiv \delta \Omega_i^s / |\Delta Q|$, $Y_i \equiv \delta \Omega_i^c / |\Delta Q|$, $Y \equiv \delta \Omega_M^a / \sqrt{|\Delta Q|}$ として、必要なオーダーのみを取り、時間微分の項を入れると③は

$$\begin{cases} \frac{\partial X_i}{\partial t} = \lambda_i^s X_i + \alpha_{MM}^i Y^2 + \varphi_i \varphi \\ \frac{\partial Y_i}{\partial t} = \lambda_i^c Y_i + \beta_{MM}^i Y^2 \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = \varepsilon^2 \left(\sum \alpha_{jM}^M X_j + 2 \sum \beta_{jM}^M Y_j \right) Y \end{cases} \quad \text{--- ⑤}$$

と書ける。最後の式の右辺にのみ微少な ε^2 が入っていることに注意すると、 Y のみゆっくした時間スケール $T \equiv \varepsilon^2 t$ で変化し、それに X_i, Y_i が速い時間スケールでなじむことが出来る。故に⑤は

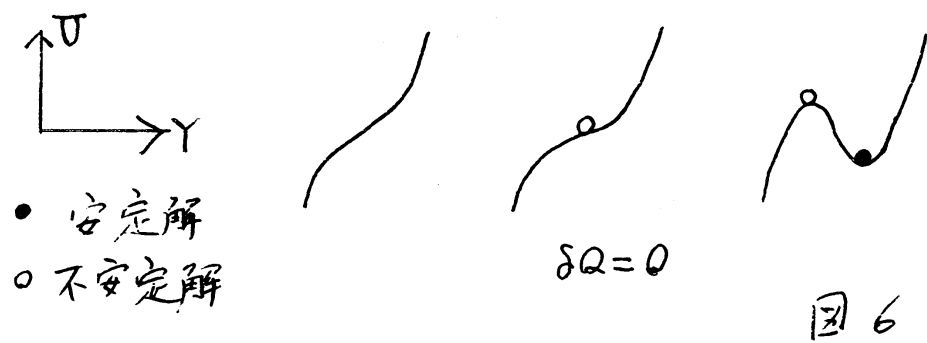
$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial t} &= - \frac{\partial V}{\partial X_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial t} = - \frac{\partial V}{\partial Y_i} \\ \frac{\partial Y}{\partial T} &= - \frac{\partial U(Y)}{\partial Y} \quad \text{但し} \quad U(Y) = (-K)Y^4 - \frac{P}{2} \varphi Y^2 \end{aligned}$$

と二つのポテンシャルを使って書ける。 V の函数形は省略したが、それは φ が変化しても本質的な変化はない。一方、 $U(\gamma)$ は初等カタストロフィーでくさびカタストロフィーのポテンシャル形 $\pm x^4/4 + (u/2)x^2 + vx$ で $v=0$, $u=-1 \cdot \varphi/|K|$ としたものに他ならず、 φ つまり δQ の変化に伴うそのポテンシャル形の変化は次のようである。



$R > 0$ の場合の図は上の図の上下を逆にしたものである。 $R < 0$ の場合が図 3 の (2), (4) に、 $R > 0$ の場合が (1), (3) に対応する。

同様の議論により、対称性の低下に伴う場合のポテンシャルは折り目のカタストロフィーのポテンシャル $x^3/3 + ux$ であることが分かった。図 6 にその変化を示した。



最後に、下記の論文で方程式系が或る対称性を持つという
場合の臨界現象の型分類が群論を用いて一般的かつ厳密にな
されていることを著者自身から御教示していただいたことを
付記しておきます; Hiroshi Fujii and Masaya Yamaguti,
"Structure of singularities and its numerical
realization in nonlinear elasticity" (1980),
J. Math. Kyoto Univ.