

不変集合のパターンについて

徳島大学 工学部

赤松 則男

京都大学 工学部

上田 暁亮

1. はじめに

物理的あるいは工学的に実現可能な現象のほとんどは数学的には多様体の上の不変集合に関連する。不変集合の性質およびその分類は G. Birkhoff により詳細に調べられているが、実際にどのような不変集合のパターンが発生するかは明らかでない。ここでは電気回路の簡単な例として、負性抵抗素子を含む発振器に正弦波外力を加えた系に発生する非周期振動について実験的結果を述べる。

2. 基礎方程式の導出

Fig. 1(a) の負性抵抗素子を含む発振器に於いて、図示の記号を用いて、次の回路方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} + R i + v = E \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$i_1 = C \frac{dv}{dt}, \quad i = i_1 + i_2 \quad \int$$

Fig. 1 (b) に示す負性抵抗素子 N の電圧, 電流特性を

$$i_2 = S v \left(-1 + \frac{v^2}{V_S^2} \right) \quad (2)$$

(1)式と(2)式から電流を消却して, 電圧に関する次式を得る。

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \mu (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + c_1 x + c_3 x^3 = B \cos v\tau \quad (3)$$

ここに,

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{V_S} \sqrt{\frac{3LS}{LS - RC}}, & \tau &= \frac{t}{\sqrt{LC}} \\ B &= \frac{E}{V_S} \sqrt{\frac{3LS}{LS - RC}}, & \mu &= \frac{LS - RC}{\sqrt{LC}} \quad v = \omega \sqrt{LC} \\ c_1 &= 1 - RS, & c_3 &= \frac{R(LS - RC)}{3L} \end{aligned}$$

(3)式は van der Pol 型の damping を有し, 復元項は Duffing 型である。従って B が比較的小さいときは van der Pol 型の特徴を示し, B が充分大きくなると, Duffing 型の性質を表わす。 B が中間的な値をとるときには, 両者の性質が表われて複雑な現象が発生する。

(3)式に於いて, τ を改めて t とし, 次に相変数標準形

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \mu (1 - x^2) y - c_1 x - c_3 x^3 + B \cos vt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

に書き直す。

3. 力学系

M を 2次元距離空間として, $\phi: \mathbb{Z} \times M \longrightarrow M$ を M の上の離散力学系とする。同相写象 $f: M \longrightarrow M$ に対して, $\phi(n, x) = f^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in M$ とおき f で生成される力学系を定義する。

以下の実験例では $M = \mathbb{R}^2$ (x, y 相平面) とし, f の mapping rule は (4) 式の解により規定されるとする。すなわち, (4) 式の解の $t = nT$ ($n \in \mathbb{Z}$, $T = \frac{2\pi}{v}$) における状態に着目する。

4. 数値例

(4) 式において, $\mu = 0.2$, $c_1 = 0$, $c_3 = 1$ とした場合に解の概略を述べる。

$B = 0$ のときは, (4) 式は autonomous 系にな

り xy 相平面上に stable limit cycle が発生する。 $0 < B \ll 1$ ならば M 上には安定な不変閉曲線 C が表われる。この C は torus と同相である。Poincaré により定義された C に対応する rotation number ρ を導入する。

i) ρ が有理数のときは系には周期振動が発生する。

ii) ρ が無理数のときは系には非周期振動が発生する。

最初に $\rho=1$ となる場合の不変集合を Fig. 2 に示す。パラメータは $B=0.2$, $\nu=1.6$ である。図示の不変曲線の説明の爲に E. ZEHNDER の notation を用いる。

D^n 点を directly unstable n -periodic point とする。すなわち, $f^n(D^n) = D^n$ である。このとき D^n 点の stable manifold (ω 枝) を

$$M^s(D^n) = \{x \mid f^{nm}(x) \rightarrow D^n \text{ as } m \rightarrow \infty\}$$

とし, D^n 点の unstable manifold (α 枝) を

$$M^u(D^n) = \{x \mid f^{-nm}(x) \rightarrow D^n \text{ as } m \rightarrow \infty\}$$

と記す。

Fig. 2 では ω 枝を D^n 点に入ってくる矢印を持つ細線で示し, α 枝を D^n 点から出る矢印を持つ太線で示す。

Fig. 2 の状態からパラメータ B, ν を増加すると、完全安定点付近で湾状に入り込んでいる太線 (D^1 点の α 枝) が U^1 点から出る細線 (D^1 点の ω 枝) と交わる。この場合の代表的不変集合の例を Fig. 3 に示す。 D^1 点に出入りする α 枝と ω 枝が交わり homoclinic 点を生ずる。

パラメータは $B = 8.5, \nu = 3.0$ である。 $\nu = 3.0$ として、Fig. 3 の状態から B を増加しても減少しても α 枝と ω 枝の交わりを解き Fig. 4 に示す不変集合になる。パラメータは $B = 5.8, \nu = 3.0$ である。Fig. 2 の場合には、 U^1 点の近傍を V とすると、 $p \in V, p \neq U^1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = S^1$ である。しかし Fig. 4 の場合には $p \in V$ (U^1 の近傍), $p \neq U^1$ ならば、

$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = \Omega \neq S^1$ である。以下の議論では不変集合 Ω に注目する。

Ω に対応する振動は複雑な周波数成分を有し非周期的である。系のパラメータが homoclinic 点を発生する近くにあるので、Fig. 4 に示すように D^1 点の α 枝の一方は複雑に波打っている。この為 Ω 自体も非常に入り込んだ集合になる。この種の Ω の一例を Fig. 5 に示す。パラメータは $B = 17, \nu = 4$ である。ただし Fig. 4 の S^1 点と D^1 点は合体して消滅している。この集合の近傍

には多くの周期点(D点とI点)が存在する。2周期点とそれらに継る α 枝(太線)と ω 枝(細線)をFig. 6に示す。Fig. 5に示す点列はFig. 6の不変曲線に接近するが、決して不変曲線上には乗らない。Fig. 5とFig. 6から各不安定周期点へ入る ω 枝が限りなく Ω を分断していることがわかる。従って Ω はG. Birkhoffが定義したdiscontinuous recurrent motion*に相当すると推測される。Fig. 4の場合には Ω に対応する振動を物理的にも実現させることができる。しかしFig. 3では D^1 点の α 枝と ω 枝が交わるので、非周期振動を実現させることが不可能である。すなわち、 α 枝と ω 枝が交わることにより、 U^1 点の近くまで S^1 点へのdomain of attractionがくるので、最初は U^1 点の周囲を運動していてもわずかのdisturbanceにより最終的には S^1 点へ収束する。従って Ω の安定性(長時間持続できるか否かという意味において)は α 枝と ω 枝が交わるという事に依存する。

* G. D. Birkhoff: "Surface transformations and their dynamical applications," Acta Math., 43, p. 104 (1920).

"Recurrent point groups Σ may be classified as follows: if a point P of Σ exists such that all sufficiently near points of Σ are connected to P through Σ then P is continuous type; in the contrary case Σ is of discontinuous type."

非周期振動に相当する不変集合 Ω の各種のパターンを Fig. 7 以下に示す。 $f^3(x)=x$ すなわち 3-周期点を表われるパラメータの近くでは Ω は Fig. 7 になる。3個の S^3 点が U^3 点に変わり、 Ω がそれらの周囲に3個に分裂して表われる。Fig. 7 の3個の島は B , ν を少し変えると、Fig. 8 に示すように3個の不変集合が結合する。 U^1 点付近には小さい空白部があり、3個の U^3 点付近には Fig. 7 と同様に大きな空白部がある。Fig. 8 のパラメータから ν を固定し、 B を下るとこの空白部が広くなって結合し Fig. 9 に示す Ω になる。さらに B を減少すると不変集合は Fig. 10 になる。同図では高次の分岐調波振動の影響も考えられる。次に空白部が2個ある例を Fig. 11 に示す。2個の島が結合した結果である。この種のパターンは B , ν を第2高調波振動の引込領域付近に設定した場合に表われる。第3高調波振動の引込領域の近くでは、 Ω が Fig. 12 に示すパターンになり、全面的に点列が分散し、空白部が無くなる。この場合も Ω の近傍にある D 点と E 点に継る ω 枝が Ω を分断しており、不連続回帰運動が発生する。この状態から B を増加すると点列は Fig. 13 に示すように、ほぼ曲線上に分布する。

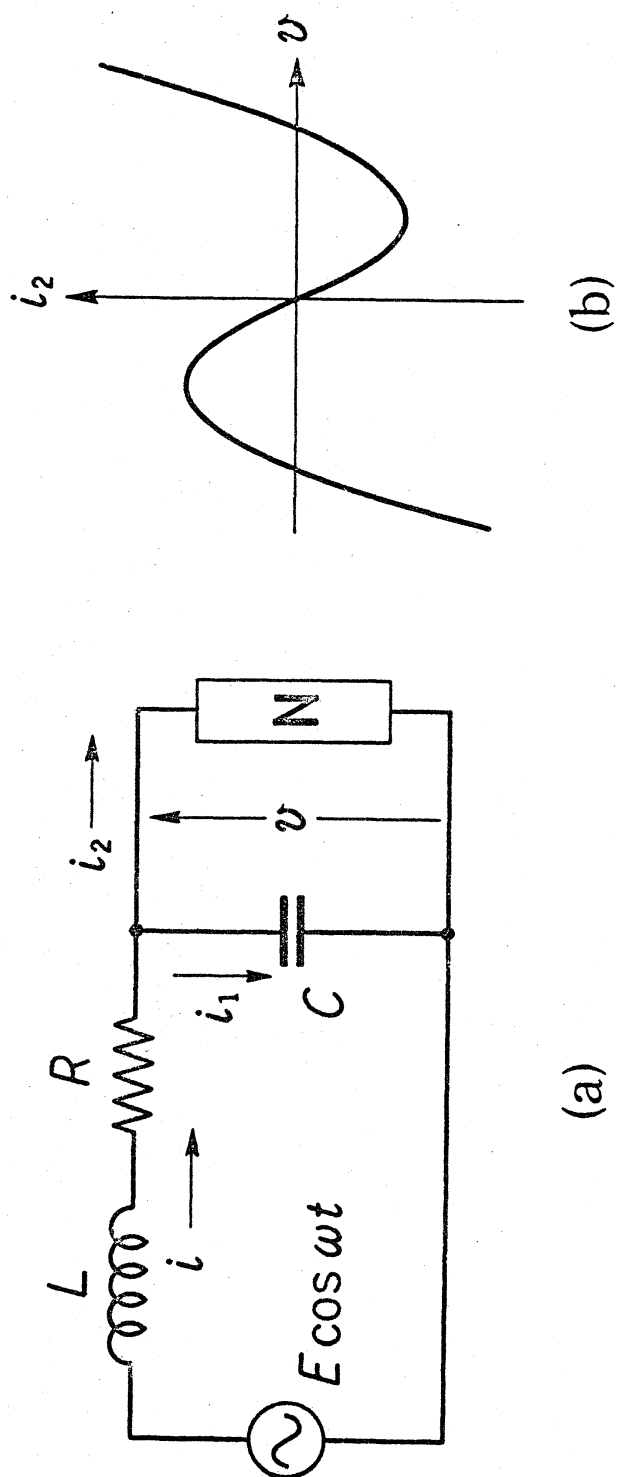


Fig. 1 (a) Negative-resistance oscillator with external force.
 (b) Nonlinear characteristic of the negative-resistance N .

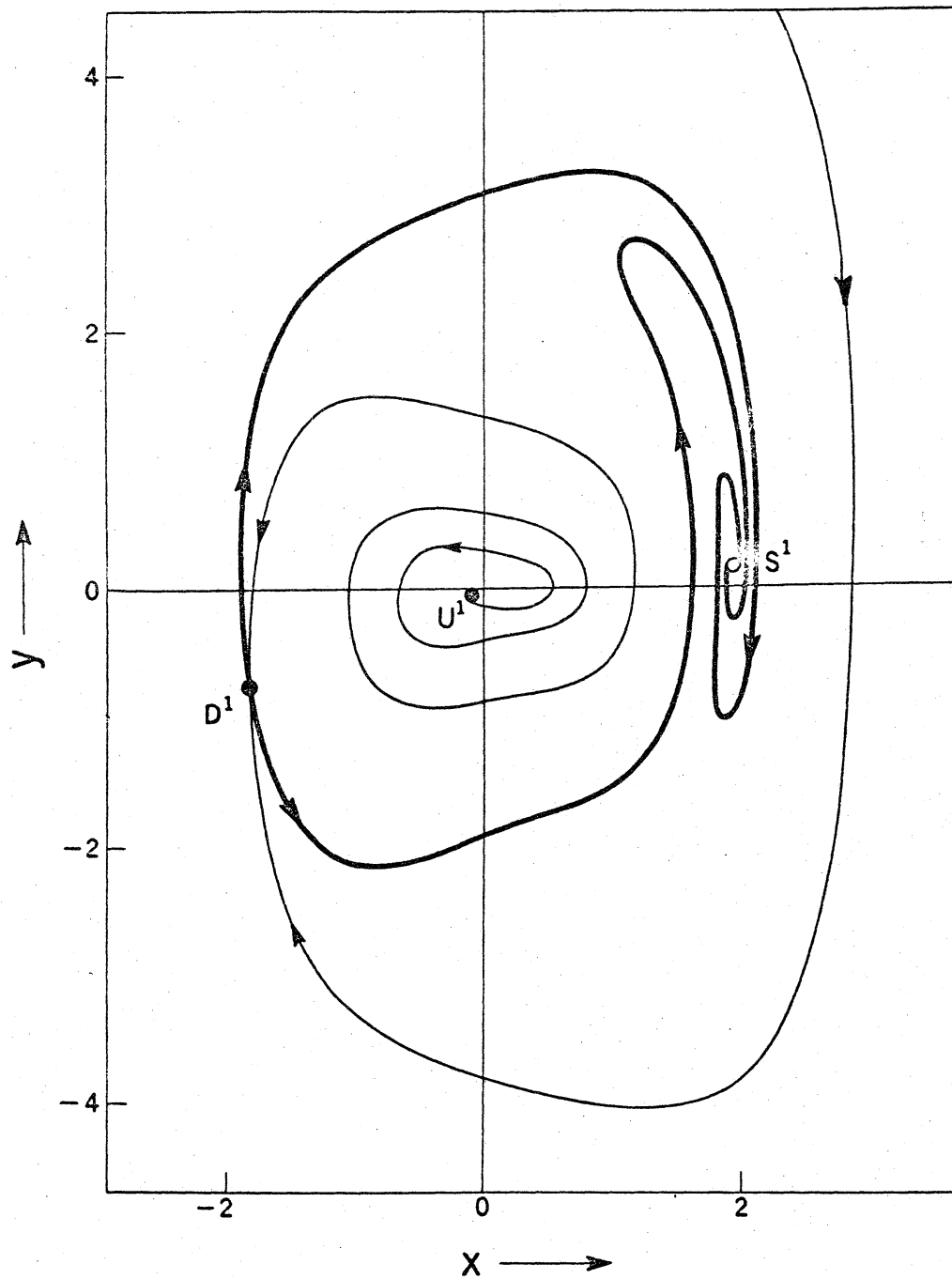


Fig. 2 Fixed points and invariant curves of the mapping for Eq. (4). ($B = 0.2$, $\nu = 1.6$)

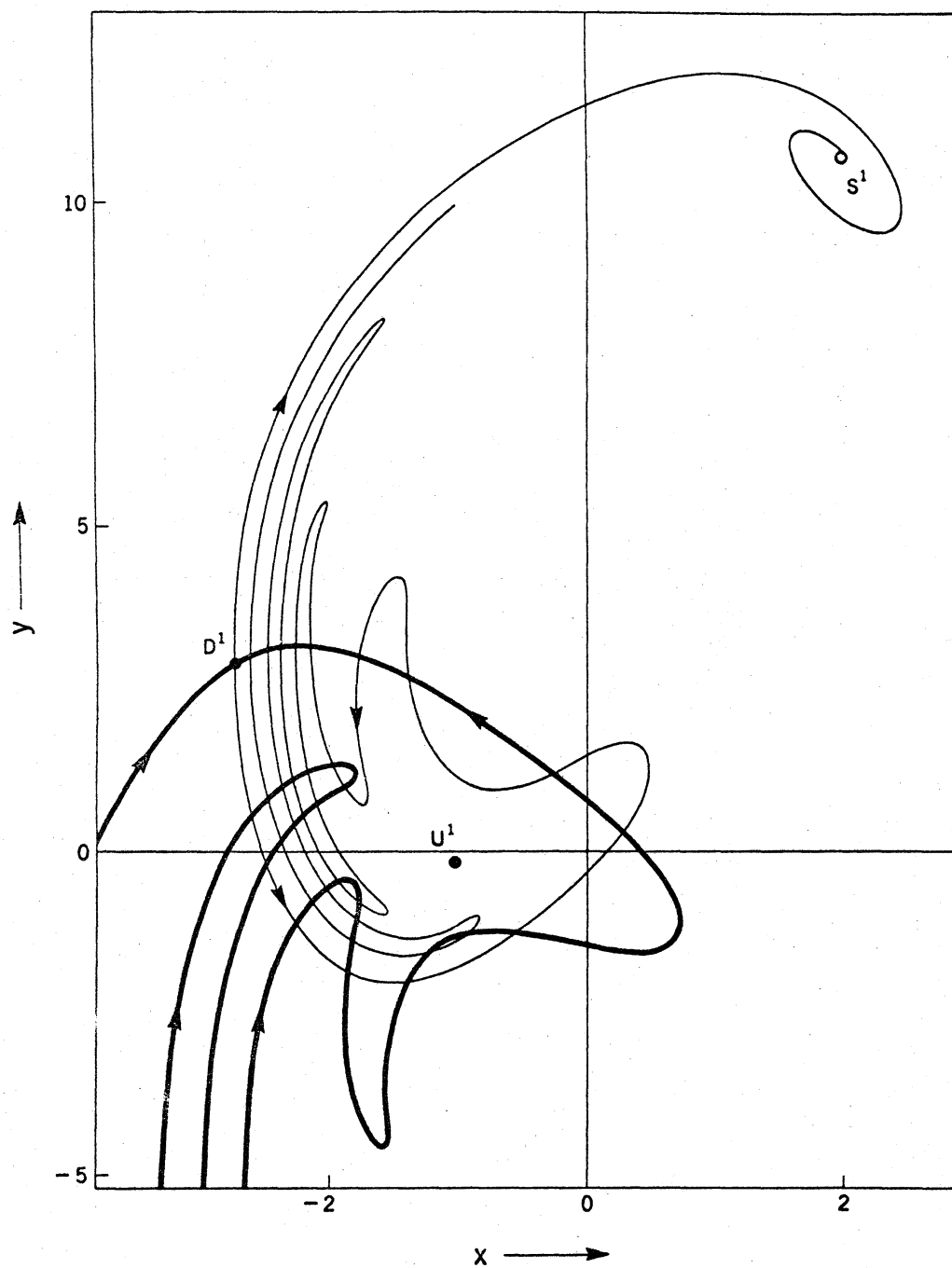


Fig. 3 Fixed points and invariant curves of the mapping for Eq. (4). ($B = 8.5$, $v = 3.0$)

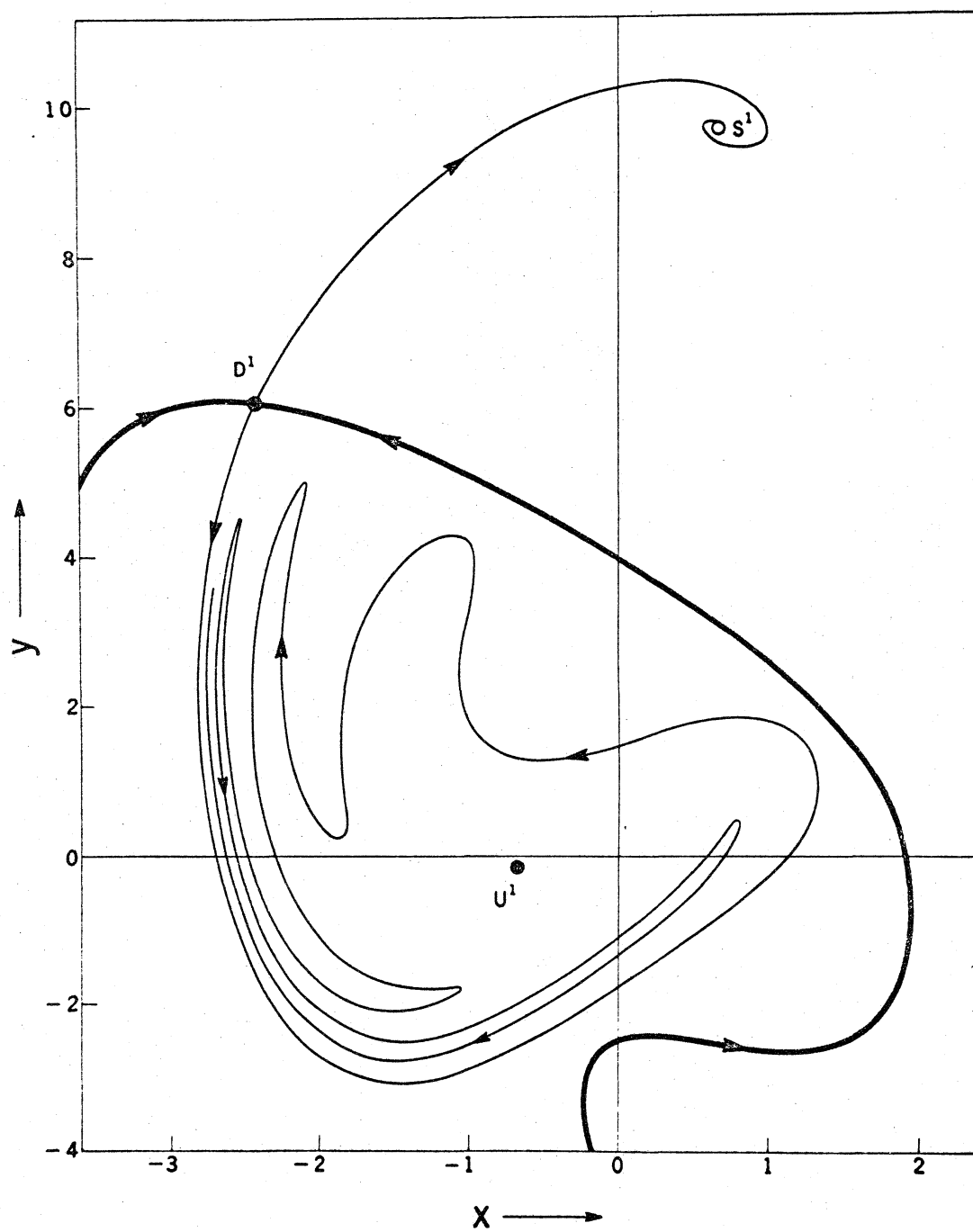


Fig. 4 Fixed points and invariant curves of the mapping for Eq. (4). ($B = 5.8$, $\nu = 3.0$)

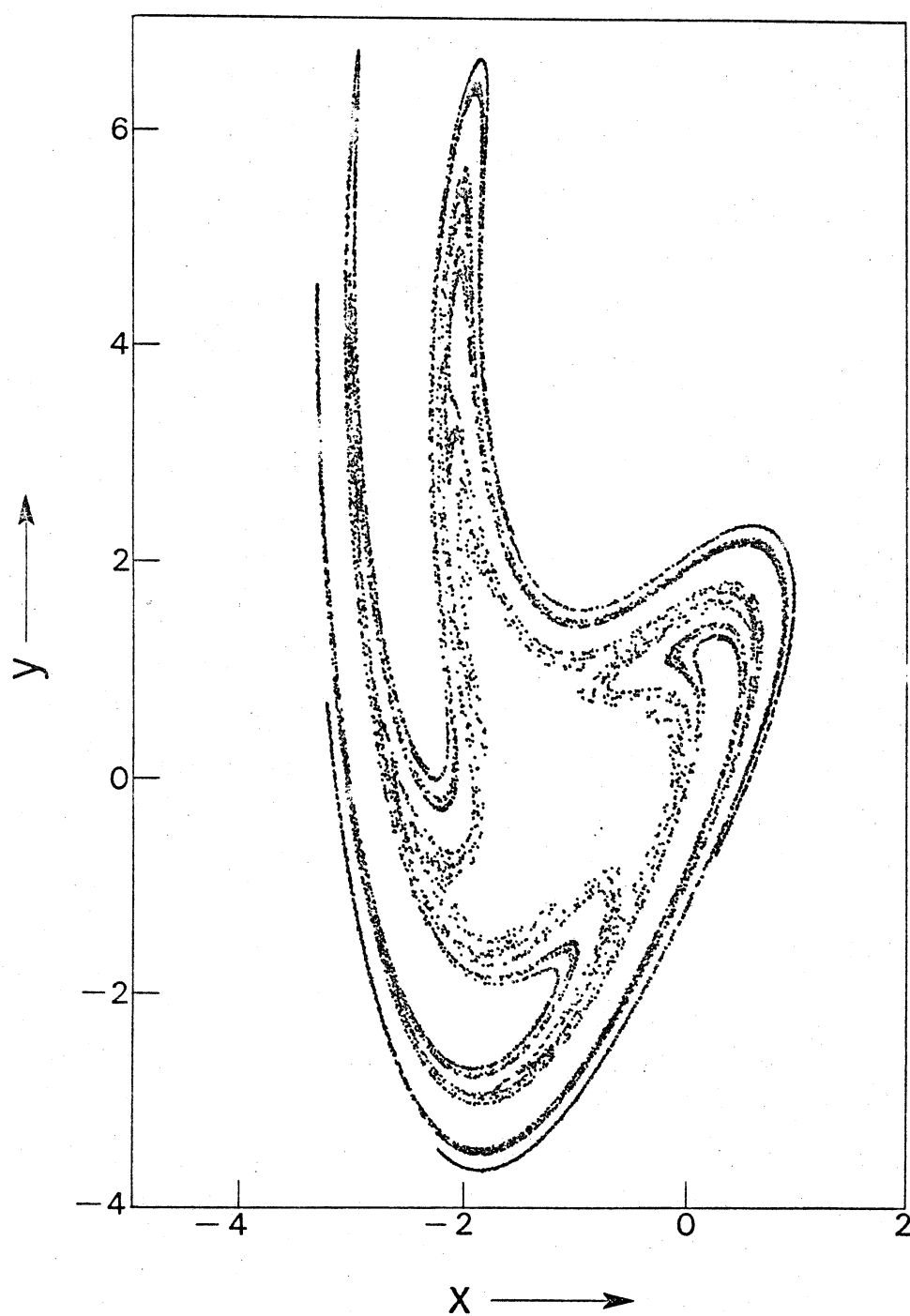


Fig. 5 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 17.0$, $\nu = 4.0$)

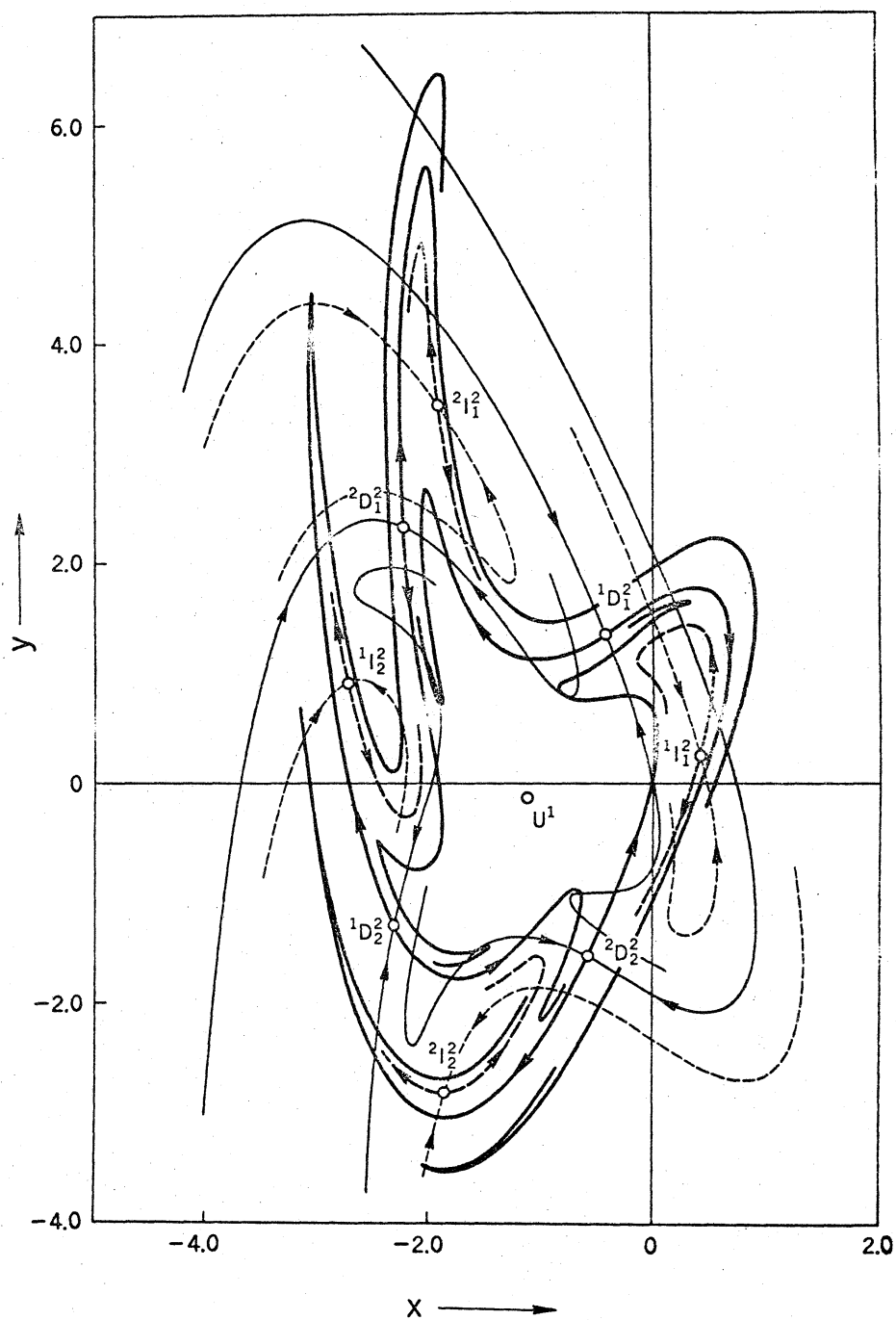


Fig. 6 Fixed point and invariant curves of the mapping for Eq. (4). ($B = 17.0$, $v = 4.0$)

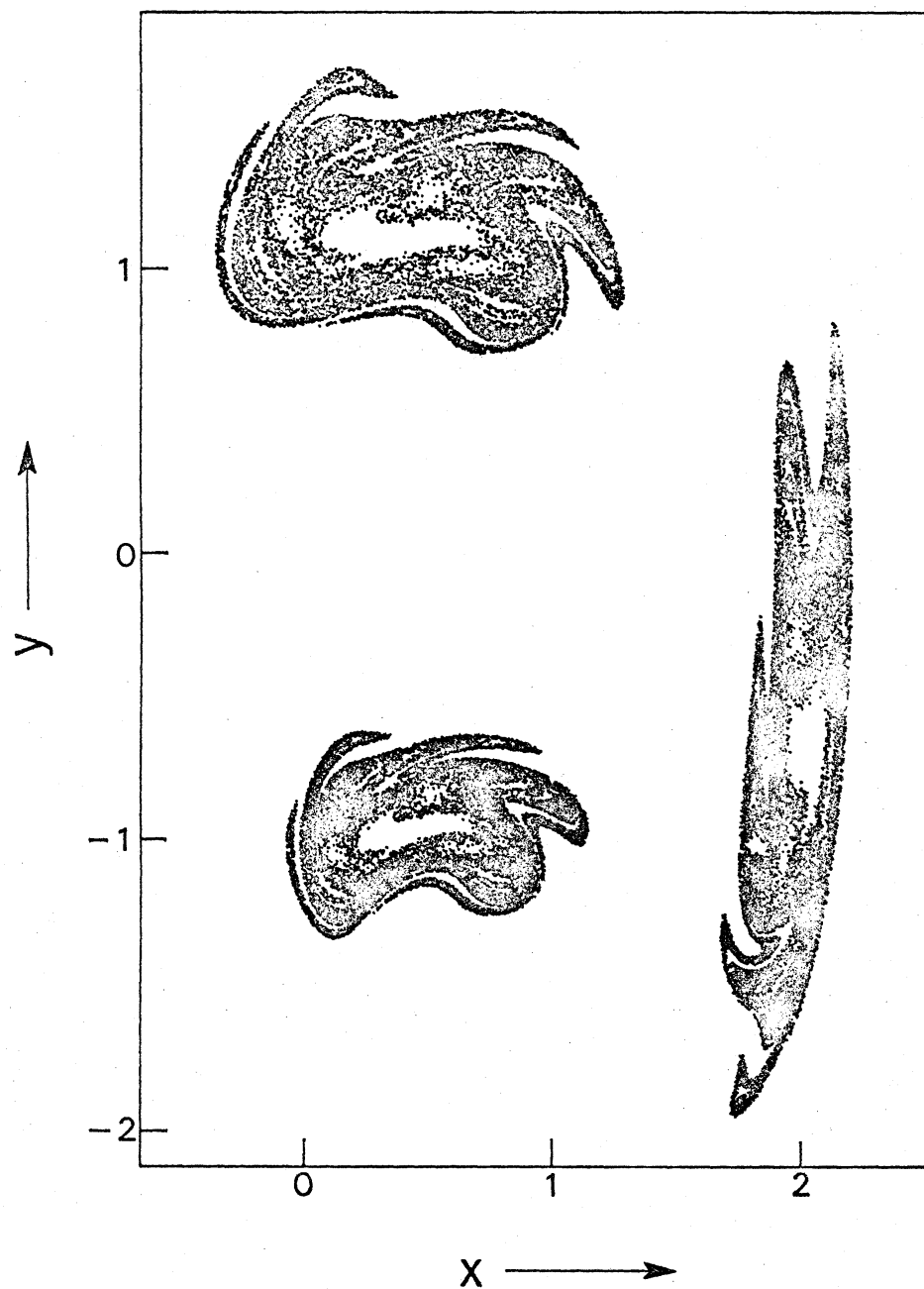


Fig. 7 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 1.2$, $v = 0.92$)

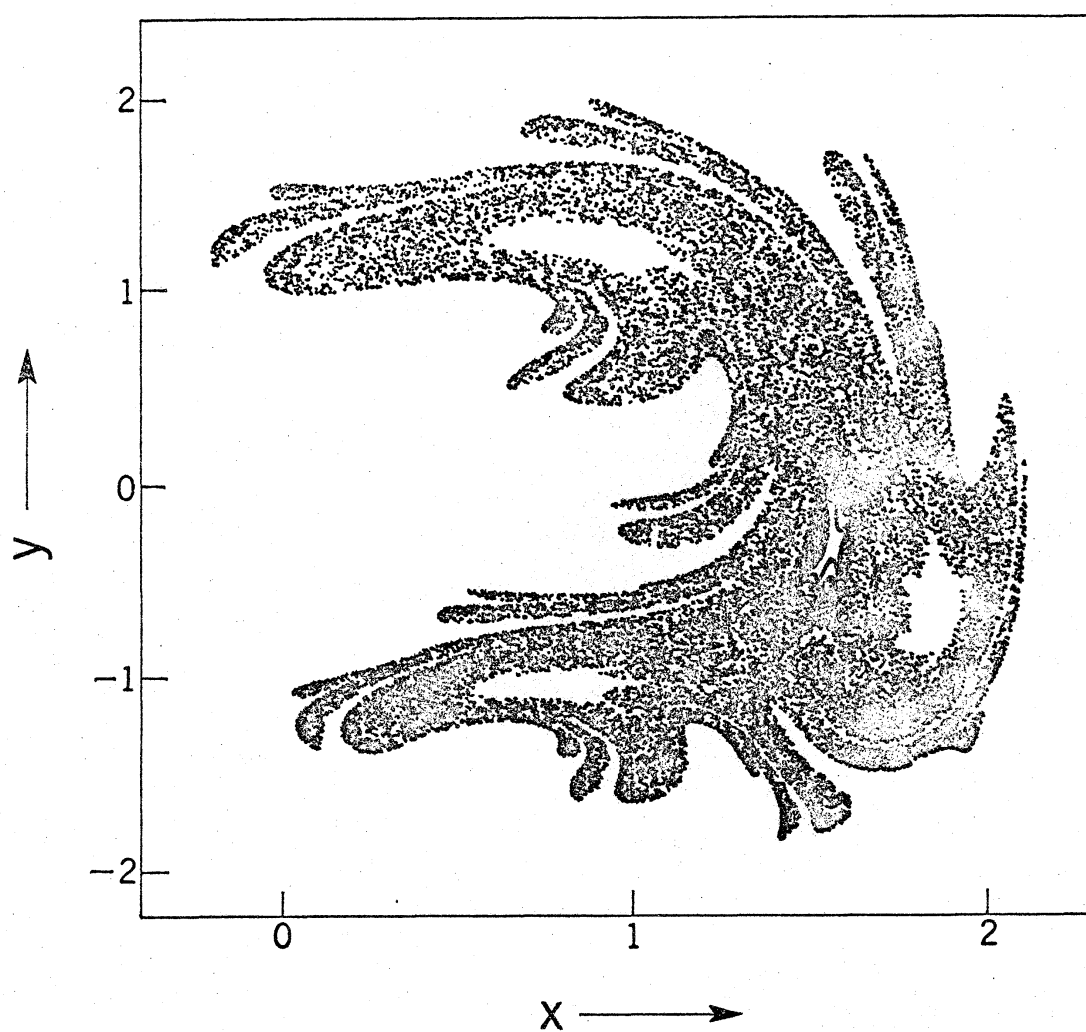


Fig. 8 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 1.12$, $v = 0.94$)

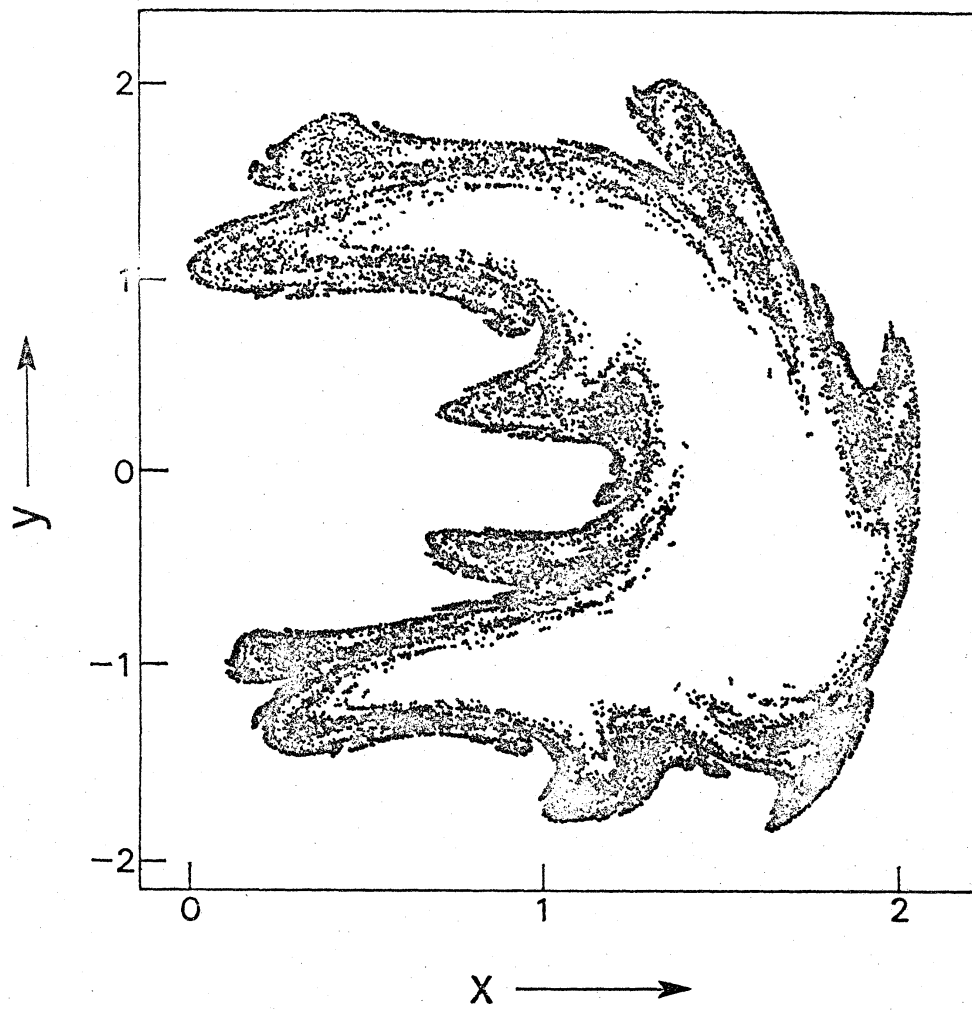


Fig. 9 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 1.07$, $v = 0.94$)

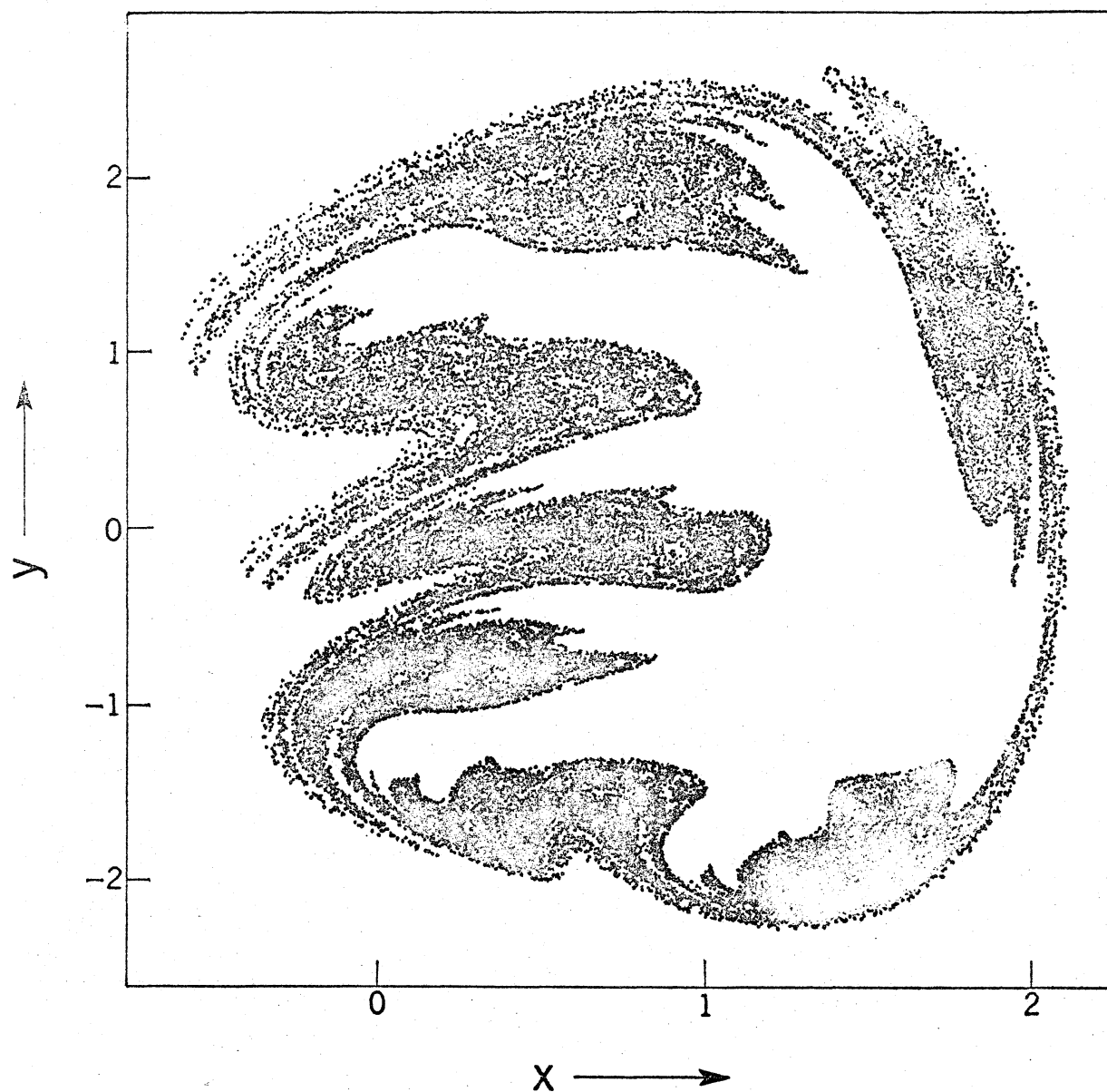


Fig. 10 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 1.0$, $v = 0.94$)

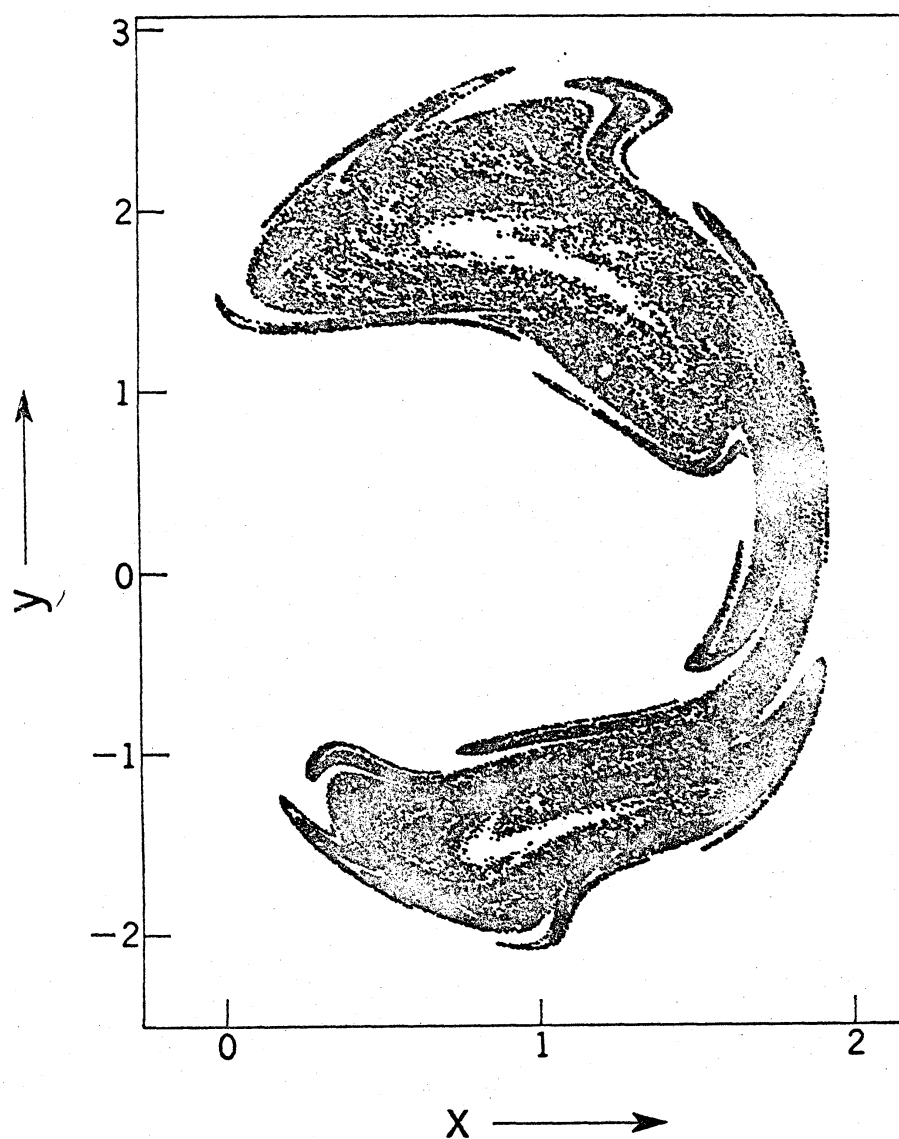


Fig. 11 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 1.6$, $\nu = 0.8$)

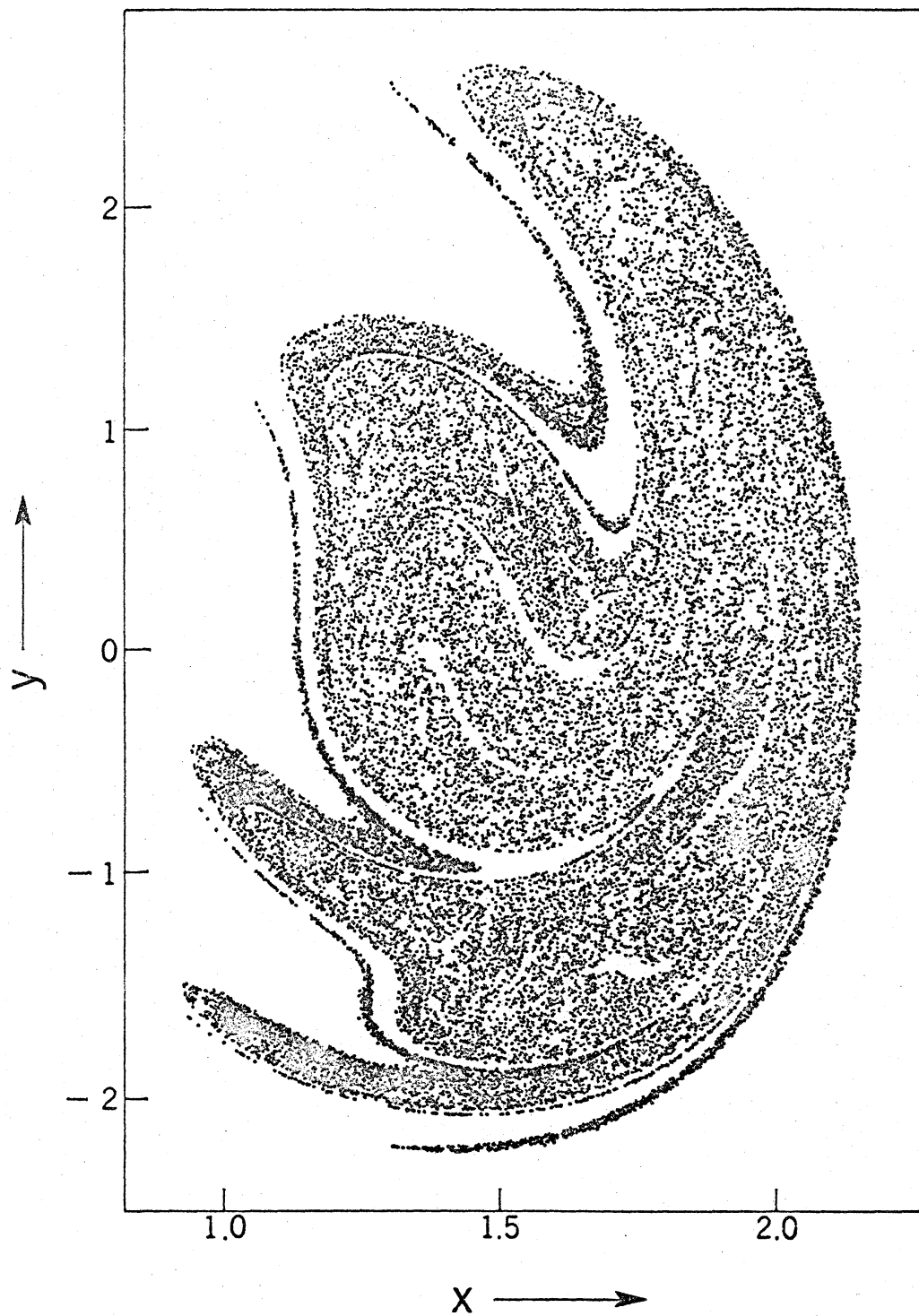


Fig. 12 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 2.0$, $\nu = 0.6$)

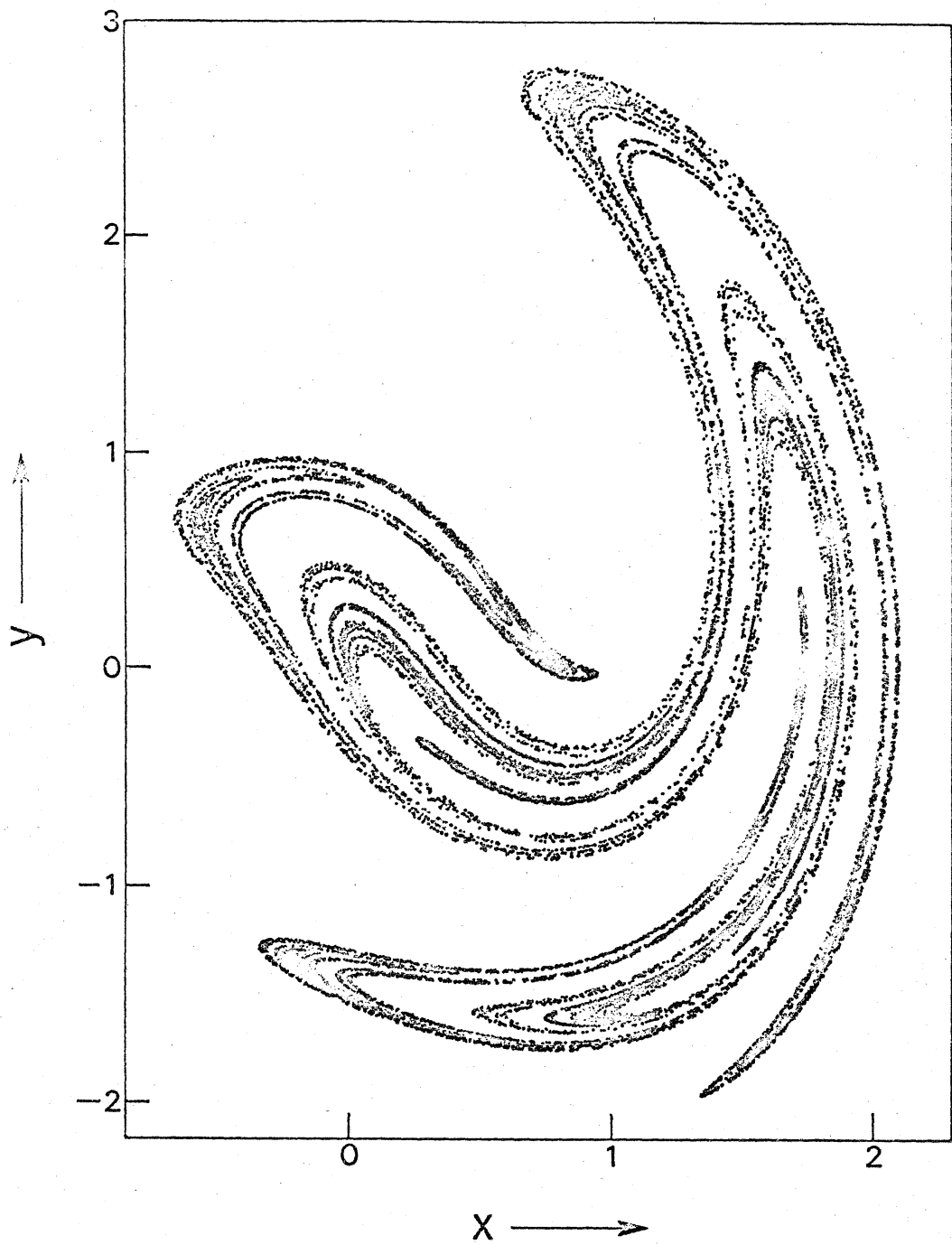


Fig. 13 Invariant set of the mapping for Eq. (4).
($B = 2.4$, $v = 0.7$)