

種数2の曲線の族の特異

ファイバーについて

名大 理 浪川 幸彦

§0. 序

この研究は、上野健爾（東大）との共同研究による。詳しい結果は我々の論文を見られたい([9])。

次の問題を考える。

$$\pi: X \longrightarrow D$$

を、円板 $D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ 上の compact な曲線の族とする。さらに次の2つの仮定を置く。

1) X は非特異曲面で、第一種例外曲線を含まない。

2) 穴ある円板 $D' = D - \{0\}$ 上で π は smooth。

$t \in D'$ に対し、一般ファイバー $X_t = \pi^{-1}(t)$ は種数 g の compact Riemann 面である。

この時、特異ファイバー $X_0 = \{\pi = 0\} = \sum n_i C_i$ (C_i は既約, n_i は C_i の重複度) を分類せよ。”

$g = 0$ の場合は X_0 も射影曲線 P^1 でしかありえない。
 $g = 1$ の場合は小平によつて詳しく研究された ([7])。
 我々は $g = 2$ の場合を扱う。この方法は小平の研究に由来し、
 principle としては一般の g でなりたつ。

§1. 特異ファイバーの必要条件 —数値的分類—

特異ファイバー X_0 は、曲線 C_i , その重複度 n_i , 他のもとの交わり $(C_i \cdot C_j)$ (C_i 上の因子として与える) を与えることによつて決まる。この節では、因子 $X_0 = \sum n_i C_i$ が、ある後の特異ファイバーとなる為の条件を考える。

X_0 に対し、次の数に対応させよう。

$$\begin{cases} \pi_i = \pi(C_i) & (C_i \text{ の位数}) \\ n_i = C_i \text{ の重複度} \\ m_i = (K \cdot C_i) & (K \text{ は } X \text{ の canonical divisor}) \\ C_{ij} = (C_i \cdot C_j) & (\text{交叉数}) \end{cases}$$

これらは独立ではなく、曲面の Riemann-Roch の定理により、

$$2\pi_i - 2 = C_{ii} + m_i$$

となっている。

さらに、 X_0 がファイバーであることから、

$$1) \ X_0 \text{ は連結} \quad \left(\text{ex. } \sum_{i \neq j} C_j > 0 \ (j \text{ fix}) \right).$$

$$2) (C_i \cdot X_0) = 0 \quad \therefore \sum_j C_{ij} = 0$$

$$3) (K \cdot X_0) = 2g - 2 \quad \therefore \sum_i n_i m_i = 2g - 2$$

よって

$$a) C_{ii} = C_i^2 \leq 0$$

$$C_{ii} = 0 \text{ ならば } X_0 = n_i C_i.$$

$$C_{ii} = -1 \text{ ならば } \pi_i > 0. \text{ (才 - 非例外曲線な)} \quad \pi_i = g$$

$$b) g > 0 \text{ ならば } m_i = K C_i \geq 0 \quad (\pi_i \geq 0 \text{ より})$$

$$c) \pi_i = \pi(C_i) \leq g \quad g \geq 2 \text{ のとき}$$

$$\pi_i = g \text{ ならば } X_0 = C_i.$$

Winters によって、次の存在定理が示された([15]).

定理: $(C_i, \pi_i, n_i, m_i, C_{ij})$ が 上の条件を満たし、さらに 各 C_i はある滑らかな曲面に含まれているとする。

(C_i の特異点の embedding dimension が関係する。) このとき、 $X_0 = \sum n_i C_i$ となる曲線族 X があって、 $m_i = K C_i$, $C_{ij} = (C_i \cdot C_j)$ となる。

よって、 X_0 の数的な型は、上の条件によって分類される。

$g = 1$ の場合は小平 (ibid.) により、 $g = 2$ の場合は O_{gg} ([11]) と飯高 ([6]) とにより独立になされた。しかし、

この数的な分類のみでは X_0 の幾何的な性質は分らない。例

えば $g=1$ で $X_0 = C$ (既約) のとき $(C; \frac{1}{2}, 0, 0)$,
 とる C は, 非特異楕円曲線 (小平の分類で, 型 I_0) と, 1
 個の通常重複点をもつ有理曲線 (I_1) と, 1 個の尖点をもつ
 有理曲線 (II) と 3 種類あるが, 各々の幾何的性質は全く違
 う.

従って, 我々はさらに X_0 の幾何的性質を調べる必要が
 ない.

§ 2. 特性写像

以下, $g=2$ の場合に話を限ることとする.

$\mathcal{V}_2 = \{ Z \in M(2, \mathbb{C}) ; Z = {}^t \bar{Z}, \operatorname{Im} Z > 0 \}$
 を次数 2 の Siegel 上半平面 とする. ここには symplectic
 群 $Sp(2, \mathbb{Z})$ が, 各 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z})$ とすると,

$$MZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

と, $\mathcal{V}_2$ 上に作用する (cf. [12]).

$\mathcal{V}_2$ は二次元の principal polarization をもつ Abel
 多様体の moduli の空間として重要である. $\pi': X' \rightarrow D'$
 は smooth である. 各 $t \in D'$ のファイバー X_t に対し,
 その Jacobi 多様体 J_t と対応させることにより, Abel 多

標体の族 $J' \xrightarrow{\omega} D'$ ができる。これから自然に多価正則写像

$$T_\pi: D' \rightarrow \mathcal{V}_2$$

が定義される (詳しくは [13] 又は [9] を見られたい)。

二つの正則写像 $T_i: D' \rightarrow \mathcal{V}_2$ ($i=1, 2$) が、ある $M \in Sp(2, \mathbb{Z})$ を用いて $T_1(t) = M T_2(t)$ ($\forall t \in D'$) とおける時、 T_1 と T_2 とは 同値である と呼ぶ。上記の T_π はこの同値関係を除いて、一意に定まる。

この T_π を 族 π の 特性写像 と呼ぶ。それは次の定理がなりたつからである。

定理^{*)} 二つの族 $X_i \xrightarrow{\pi_i} D$ ($i=1, 2$) があって、その特性写像達が互いに同値であるとする。この時、 D より小さい開板 $E = \{t \in D, |t| < \varepsilon'\}$ をとれば、同型写像 $\tau: X_{1|E} \longrightarrow X_{2|E}$ があって、次の可換図式をみたす。

$$\begin{array}{ccc} X_{1|E} & \xrightarrow{\tau} & X_{2|E} \\ \pi_{1|E} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi_{2|E} \\ E & \xlongequal{\quad} & E \end{array}$$

^{*)} p. 9 の脚注参照。

§3. X_0 の特性数の構成 — 幾何的分類 —

§2 の定理によれば, T_π には原点の近傍での X についての情報はすべて含まれている。そこでこの中から, X_0 を特徴づける情報を選びだそう。それは次の3つの段階に分れる。

1) X_0 の戸籍を調べること。

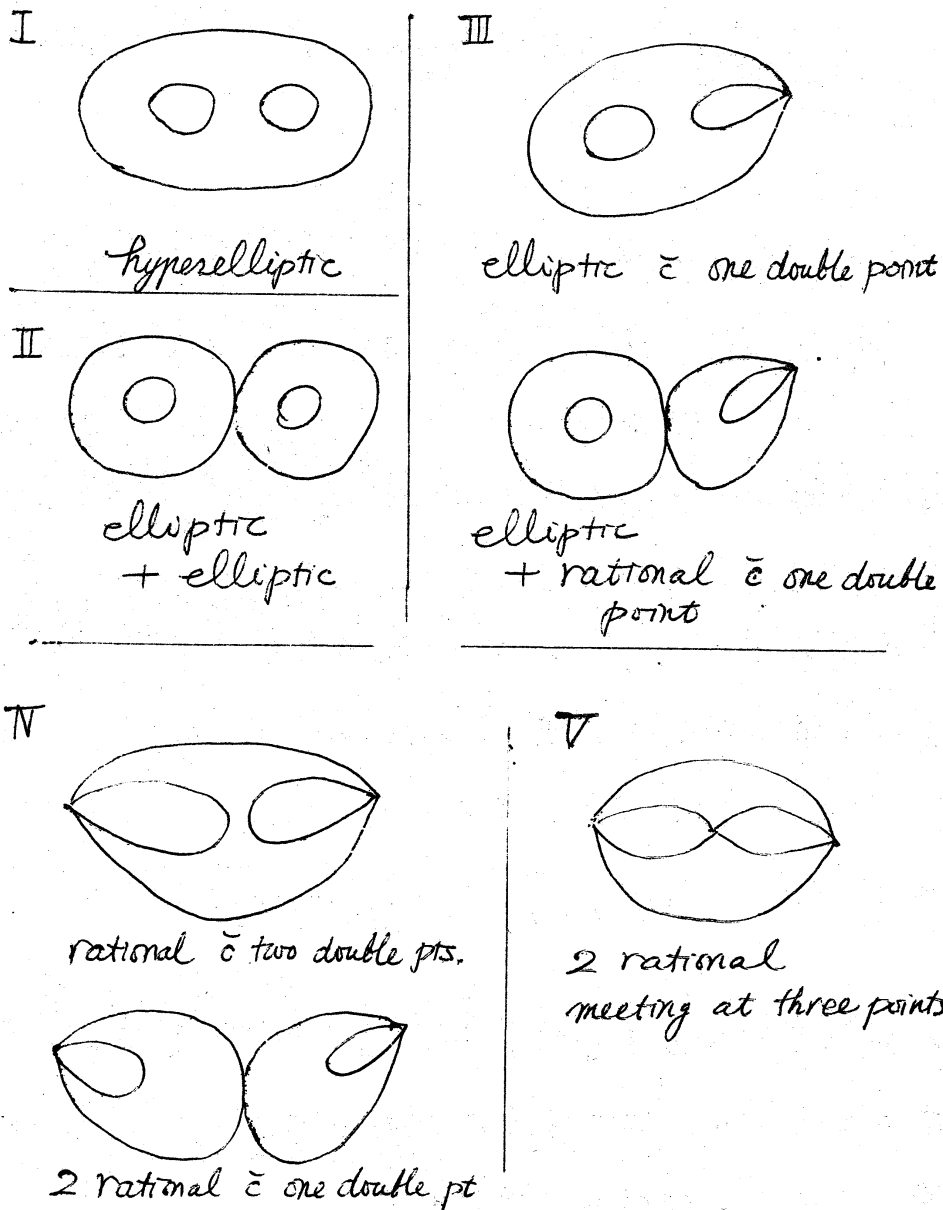
$\mathcal{V}_2^* = \mathcal{V}_2 / Sp(2, \mathbb{Z})$ は自然に解析空間となる。この元は principally polarized Abel 多様体の同型類と一対一に対応する。曲線の同型類は、その Jacobi 多様体のそれによって決まる (Torelli の定理) から、種数2の閉 Riemann 面の同型類の全体 $\mathcal{M}_2$ は $\mathcal{V}_2^*$ の部分集合とみなせる。Hoyt の結果 ([5]) を更に詳しくして、次のことが分る。

命題. $\mathcal{M}_2$ は $\mathcal{V}_2^*$ 内の閉集合で、その補集合 $\mathcal{N}_2$ は余次元1の既約解析集合である。 $\mathcal{N}_2$ 内の点に対応する Abel 多様体は、2つの楕円曲線の直積に自然に偏極構造を入れたものである。^{*}

さて $\mathcal{M}_2$ は種数2の曲線達の戸籍である。では X_0 の属すべき戸籍は何かと考えると、これは種数2の Riemann 面の極限であるから、戸籍 $\mathcal{M}_2$ をはみ出してしまうことがある。そこで、これら極限全体を含めた戸籍を作る必要がある。即ち

^{*}) 2つの楕円曲線の直積に、別の偏極構造が入って、既約曲線の Jacobi 多様体になることがある ([10])。

moduli 空間の compact 化の問題で、代数幾何での大きな問題の一つである。これについては佐武, 井草, Mumford らの研究があるが、特に Deligne - Mumford による最近の結果 ([2]) は注目すべきである。これによれば、種数 2 の曲線の極限は、位相的に次のようなものである。



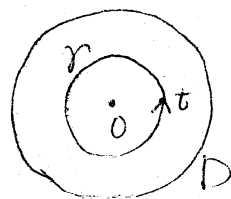
これらの曲線の同型類全体 $\overline{\mathcal{Y}}_2^*$ は compact な射影代数多様体になる (Mumford 未発表)。I 類の全体が $\mathcal{M}_2$, II 類の全点が $\mathcal{M}_2^*$ である。

さて, 特性写像 $T_\pi: D' \rightarrow \mathcal{Y}_2$ を考える。自然な全射 $\mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathcal{Y}_2^* \subset \overline{\mathcal{Y}}_2^*$ との合成 $\overline{T}_\pi: D' \rightarrow \overline{\mathcal{Y}}_2^*$ を考える時, 極限 $Z_\pi = \lim_{t \rightarrow 0} \overline{T}(t) \in \overline{\mathcal{Y}}_2^*$ が X_0 の属すべき戸籍である。

2) X_0 の戸籍内での位置を調べること。

Z_π に対応する曲線を C_π としよう。戸籍内の家族構成は $Aut(C_\pi)$ によって決まる。これは有限群であることが知られている ([2])。 X_0 が $Aut(C_\pi)$ のどこに対応するかは次の様にして分る。

γ を D' 内の原点をひとまわりする円周とする。このとき $T(t)$ を γ にそって解析接続した値 $T(\gamma t)$ は, ある $M_\pi \in Sp(2, \mathbb{Z})$ によって,



$$T(\gamma t) = M_\pi T(t)$$

とかける。この M_π の $Sp(2, \mathbb{Z})$ 内の共役類は π によって一意的に定まり, π の (0 のまわりでの) Picard-Lefschetz 変換, 又は monodromy と呼ばれる。

例えば Z_π が **I** 型であるとしよう。 M_π は自然に C_π の Jacobian 多様体 J_π の自己同型をひきおこすが、これが偏極を保つことから、 C_π の自己同型をみらびく。付の場合にも同様にして、 M_π は $\text{Aut}(C_\pi)$ の元に対応することが分る。

3) さらにもう少し X_0 を調べること。

N_2 の T^* 内での閉包 $\overline{N_2}$ は余次元 1 の既約な因子になっている。 Z_π の近傍での $\overline{N_2}$ の定義方程式を f とするとき、

$$\deg \pi = \text{ord}_0 T^* f \quad (nD)$$

と定義する。

これらを用いて、 X_0 を次の様に分類しよう。

型	elliptic		parabolic		
	I	II	III	IV	V
Z_π	I	II	III	IV	V
M_π	有限位数		無限位数		
$\deg \pi$	0	>0	≥ 0	≥ 0	0

この分類は次の定理により、意味をもつ。

定理^{*}) $\pi: X \rightarrow D$ が与えられているとする。このと

^{*}) parabolic type については、未だ厳密な証明がない。

き、特異ファイバー X_0 は Z_π , M_π , $\deg \pi$ によって (解析的に) 一意に定まる。

Z_π が M_π による固定点であることに注意しよう。従って X_0 の分類は、 $Sp(2, \mathbb{Z})$ の共役類と、その固定点をしるべることによってなされる。(ただし、 $Sp(2, \mathbb{Z})$ の共役類すべてに対応して、 X_0 が出てくるといふ訳ではない。) これを elliptic type については既になされていた。即ち、 Z_π については Gottschling ([3], [4]) が、その対応する曲線については Botza ([1]) が、そして M_π については上野 ([13], [14]) が、それぞれ調べている。parabolic type については、妥当と思われる分類は既にある ([8])。

§4. 特異ファイバーの構成

§3 の定理の証明は、逆に Z_π , M_π , $\deg \pi$ を与えたとし、これを特性数とする族をつくる方法を与える。例えば、I 型の場合は次の様にする。

Z_π に対応する曲線 E , M_π に対応する E の自己同型 σ とする。 M_π の位数を m とし、 $e_m = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$, $E = \{s \in \mathbb{C} ; |s| < \varepsilon^{\frac{1}{m}}\}$ と置こう。

自己同型 $g :$

$$g: C \times E \longrightarrow C \times E$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$(\alpha, s) \longmapsto (\sigma(\alpha), e_m s)$$

は位数 m の巡回群 G をつくる。

$$\pi_1: X_1 = C \times E / G \longrightarrow E / G \xrightarrow{\sim} D$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$S \longmapsto S^m$$

は $D' = D - \{0\}$ 上 smooth な解析空間の族である。 X_1 の特異点達は、 g^* 達の $C \times E$ 上の固定点定数から生じる。二次変換によってこれらを除きした $\pi: X \rightarrow D$ が求まるものである。(ただし、非特異 model X は又一種例外曲線の生じない様最小のものをとらねばならない。)

例をあげよう。

$$1) \quad Z_\pi = \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \longleftrightarrow C: y^2 = x(x^4+1)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$M_\pi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \sigma: (x, y)$$

$$\longrightarrow (\sqrt{-1}x, -e_0 y)$$

$$\text{ord } M_\pi = 8$$

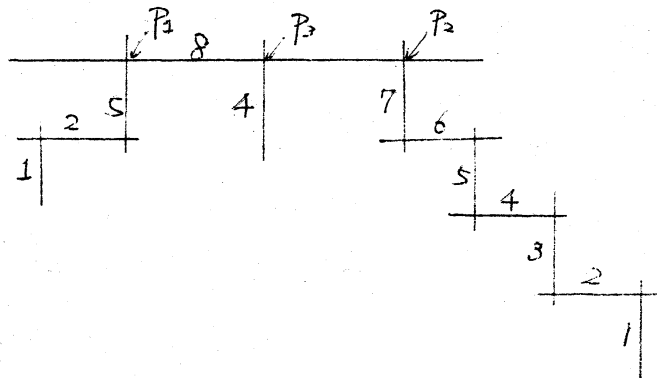
$$g \text{ の固定点 } : p_1 = (\alpha, y; s) = (0, 0, 0)$$

$$p_2 = (\infty; 0)$$

g^4 の固定点：上の他 4 点で、いずれも

$$P_i = (e_i, 0, 0) \text{ に } G\text{-同値。}$$

よって X_0 は



(すべて 成分は P_i , 互いに単純に交わる。

数字は重複度。)

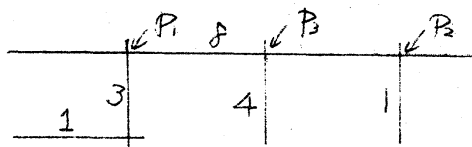
となる。

2) 1) は X_0 をみて, その形の由来の良くわかる例である。ところが X_0 をみてはすぐには由来の分らぬものがある。

Z_π : 1) に同じ。

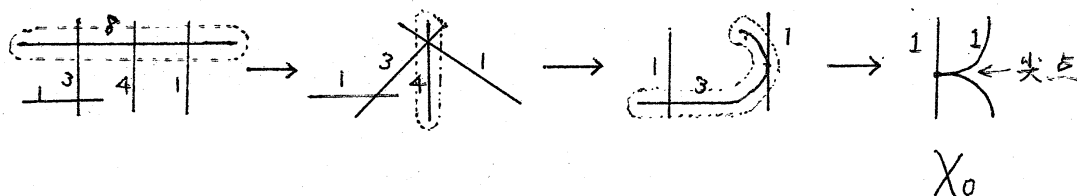
$$M\pi' = -M\pi(m, 1) \leftrightarrow \sigma' : (x, y) \rightarrow (fx, efy)$$

すると固定点は同じだが, その特異点の状態がかわって, X_1 の特異点を標準的に除去すると次のようになる。



これは例外曲線を含んでいるから, 次のように次々と contract

できて、結局最後の図が求める X_0 になる。



3) 最後に $\deg \pi$ がどのように求められるかを例で示そう。

$$Z_\pi = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow C = E_1 + E_2$$

(2つの楕円曲線)

$$(\operatorname{Im} z_1 > 0, \operatorname{Im} z_2 > 0)$$

$$M_\pi = I \text{ (単位行列)} \longleftrightarrow \sigma = \text{identity}$$

$$\deg \pi = d > 0$$

$$\begin{array}{ccc} T: D & \longrightarrow & \mathcal{Y}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} z_1 & t^d \\ t^d & z_2 \end{pmatrix} \end{array} \quad (t: \text{+方向})$$

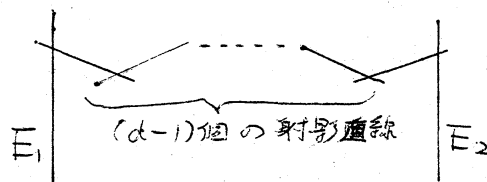
は明らかに上記の特性数をもつ。 $\mathcal{Y}_2$ 上には曲線の族 C があって、各点のファイバーは対応する曲線になっている。 $p = E_1 \cap E_2$ の近くで C は

$$C = \{xy - z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^5 = \{x, y, z_1, z_2, z_3\}$$

と書けているから、 C の T に写す逆像は $C_D = C|_{\mathcal{Y}_2} D$ は $(p, 0)$ の近くで

$$C_D = \{xy - t^d = 0\} \subset \mathbb{C}^3 = \{x, y, t\}$$

とわかる。 C_D は $(p, 0)$ に於てのみ特異点をもつ、これを除去すれば、上記の特性数をもつ種 $\pi: X \rightarrow \mathbb{D}$ がえられる。ところが、容易に分るように、 X_0 は



となる。

REFERENCES

- [1] Bolza, O. : On binary sextics with linear transformations into themselves, Amer. J. Math., Vol.10, (1888) pp47-70.
- [2] Deligne, P. & Mumford, D. : The irreducibility of the space of curves of given genus, Volume dédié au Professeur Oscar Zariski, Publ. I.H.E.S., Vol.36 (1969), pp75-110.
- [3] Gottschling, E. : Über die Fixpunkte der Siegelischen Modulgruppe, Math. Ann., Vol.143 (1961) pp111-149.
- [4] Gottschling, E. : Über die Fixpunktergruppe der Siegelischen Modulgruppe, Math. Ann., Vol.143 (1961),

pp399-430.

- [5] Hoyt, W. L. : On products and algebraic families of jacobian varieties, Ann.^{of} Math. Vol.77(1963), pp415-423.
- [6] Iitaka, S. : On the degenerates of a normally polarized abelian variety of dimension 2 and an algebraic curve of genus 2, (in Japanese), Master degree thesis, 1967.
- [7] Kodaira, K. : On compact analytic surfaces, II-III, Ann. of Math., Vol.77 & 78 (1963), pp563-626 & 1-40.
- [8] Namikawa, Y. & Ueno, K. : The complete classification of fibres of pencils of curves of genus two (to appear).
- [9] Namikawa, Y. & Ueno, K. : On fibres of pencils of curves of genus two (to appear).
- [10] Hayashida, T. & Nishi, M. : Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves, J. Math. Soc. Japan, Vol.17 (1965), pp1-16.
- [11] Ogg, A. P. ; On pencils of curves of genus two, Topology, Vol.5 (1966), pp355-362.
- [12] Siegel, C. L. : Symplectic geometry, Academic Press, New York, 1964 ; Gesammelte Abhandlungen, Vol.II pp274-359, Springer, Berlin, 1966.
- [13] Ueno, K.: On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2, I., J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, Vol.18, (1971), pp37-95.

[14] Ueno, K. : Ditto, II, (to appear in J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo).

[15] Winters, G. B. : On the existence of certain families of curves (to appear).