

## 実代数幾何のためのモデル理論入門

神戸大・自然 菊池 誠 (MAKOTO KIKUCHI)

## はじめに

モデル理論は 1960 年代以降急速に発展してきた数学基礎論の一分野である。以前より Tarski-Seidenberg の定理などのモデル理論の結果が実代数幾何に応用されてきたが、最近、巾を持つ実数体の model-completeness が Wilkie によって証明されたことによって、モデル理論と実代数幾何の関係がより深くなっている。本稿は、Hilbert の第 17 問題や Hilbert の零点定理のモデル理論の手法を用いた証明を紹介することを通してモデル理論の入門的な解説を行う。

§1 では形式的言語の定義をし、§2 ではモデル理論の最も基本的な定理である完全性定理を証明する。さらに、§3 で Tarski-Seidenberg の定理を証明を証明して、§4 ではその応用として Hilbert の第 17 問題および Hilbert の零点定理のモデル理論の手法を用いた証明を紹介する。最後に §5 で最近の話題に簡単に触れる。

なお、本稿は他の文献を参照しなくても読めるように心掛けたが、より詳しく知りたい方はモデル理論の教科書を参照して欲しい。標準的な参考書としては van Dalen [2], Chang-Keisler [1], Hodges [8] などがある。このなかで最も初等的なのが van Dalen [2] で、本稿の §§1, 2 の内容がより詳しく丁寧に解説されている。Chang-Keisler [1] はモデル理論の古典的な教科書であり、初等的な内容から比較的高度な話題に至るまで多くのことが書かれている。Hodges [8] は網羅的であり、最近の話題についても多くのことが触れられているが、極めて分量が多く、教科書というよりは百科事典に近い。

---

§4 で紹介する Hilbert の零点定理の証明は東京女子大の永山操先生に教えていただいたものです。多くの貴重な助言を下さった永山先生に感謝します。

## §1. 言語, 論理式, 証明図

数学基礎論が数学の他の分野と大きく異なる点は, 数学基礎論が述語論理の上に形式化された言語を用いる点にある. この節では, その形式化された言語を紹介し, また, その言語を用いて形式化された証明を紹介をする.

**定義 1.1.**  $\{f_i\}_{i \in I}$ ,  $\{R_j\}_{j \in J}$ ,  $\{c_k\}_{k \in K}$  をそれぞれ関数記号 (function symbol), 関係 (述語) 記号 (relation (predicate) symbol), 定数記号 (constant symbol) の集合とする. このとき  $\mathcal{L} = \{f_i, R_j, c_k\}_{i \in I, j \in J, k \in K}$  を (一階述語論理の) 言語 (language (of first-order logic)) という.

それぞれの記号の集合は空集合であっても, 有限集合であっても無限集合であっても構わない.

**例 1.2.** (1) 順序の言語:  $\mathcal{L}_{Ord} = \{<\}$ .

(2) 群の言語:  $\mathcal{L}_{Grp} = \{ \cdot, e \}$ .

(3) 順序体の言語:  $\mathcal{L}_{OF} = \{ +, -, \cdot, <, 0, 1 \}$ .

特にことわらなくてもそれぞれの関数記号, 関係記号は引き数 (arity) が定まっているものとする. 例えば  $+$  の引き数は 2.

**定義 1.3.** 以下の記号を論理記号 (logical symbol) という.

(1) 変数 (variable):  $v_0, v_1, v_2, \dots$

(2) 命題結合子 (propositional connective):  $\wedge$  (and),  $\vee$  (or),  $\neg$  (not),  $\rightarrow$  (imply),  $\leftrightarrow$  (equivalent).

(3) 量化子 (quantifier):  $\forall$  (forall),  $\exists$  (there exists).

(4) 等号 (equality):  $=$ .

等号は引き数 2 の関係記号であるが, 全ての言語に共通する記号として, その他の関係記号とは区別する. また, 変数記号の略記として  $x, y, z, \dots$  などを用いる. (命題結合子, 量化子といった訳語はあまり一般的でない.)

以下,  $\mathcal{L}$  を固定する.  $\mathcal{L}$  の元からなる記号の有限列として項および論理式を定める. 簡単にいえば定数記号と変数をもとに関数記号を用いて表される記号の有限列

のうち意味をなすものが項であり、項をもとに関係記号と等号を用いて表される記号の有限列で意味をなすものが論理式である。なお、便宜上括弧を用いて項や論理式を表わすが、本来、必要なものではない。

**定義 1.4.**  $\mathcal{L}$  の項 (term) は以下のように定められる。

- (1)  $\mathcal{L}$  の定数記号および変数は項。
- (2)  $t_1, \dots, t_n$  が項,  $f$  が  $n$  引数の関数記号のとき  $f(t_1, \dots, t_n)$  は項。
- (3) 以上を有限回繰り返して得られるもののみが項。

**例 1.5.** (1)  $\{\mathcal{L}_{Ord} \text{ の項} \} = \{\text{変数}\}$ 。

(2)  $\{\mathcal{L}_{OF} \text{ の項} \} = \{\mathbb{Z} \text{ 係数の多項式}\}$ 。

**定義 1.6.**  $\mathcal{L}$  の論理式 (formula) は以下のように定められる。

- (1)  $t_1, \dots, t_n$  が項,  $R$  が  $n$  引数の関係記号のとき  $R(t_1, \dots, t_n)$  は論理式。
- (2)  $\phi, \psi$  が論理式のとき  $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi$  は論理式。
- (3)  $\phi$  が論理式,  $x$  が変数のとき  $\forall x\phi, \exists x\phi$  は論理式。
- (4) 以上を有限回繰り返して得られるもののみが論理式。

以下,  $s, t, u, \dots$  で項を,  $\phi, \psi, \rho, \dots$  で論理式を表す。

**定義 1.7.** (1) Quantifier のかかる変数を束縛変数 (bound variable), かからない変数を自由変数 (free variable) という。

(2) 自由変数を含まない論理式を文 (sentence) という。

**例 1.8.** 次の論理式を考える：

$$x = y \rightarrow \exists x(x = y).$$

最初に現れる  $x$  には  $\forall x$  も  $\exists x$  もかかっていないので自由変数。次に現れる  $x$  は quantifier  $\forall$  に付随する変数なので束縛変数とも自由変数とも言わない。最後に現れる  $x$  は束縛変数。この論理式に現れる  $y$  はいずれも自由変数。また、この論理式は自由変数を含むので文ではないが、例えば

$$\forall x \exists y (x = y \rightarrow \exists x (x = y))$$

は文.

「論理式」は自由変数についての何らかの主張であり,「文」は対象を定めたときに真偽が決まる主張である.

**定義 1.9.** 文の集合を理論 (theory), もしくは公理系 (system of axioms) という.

**例 1.10.** (1) 群の理論:  $T_{Grp}$  = 群の公理の集合.

(2) 実閉体の理論:  $T_{RCF}$  = 実閉体の公理の集合.

論理式や文は命題の形式化である. 多くの人にとってこの論理式は馴染みの無い物に違いないが, 似たような形式化は数学の随所で行われている. たとえば多項式を「何かを入れたら何かがでてくる」という素朴な意味での「関数」と見るよりは, 変数という単なる記号と加法や乗法を表す記号などからなる単なる文字列と考えて形式的に多項式環の演算を考えたりすることも多い. このとき, 多項式によって表現されている関数が, 多項式を表わす文字列によって形式化されていると見ることもできよう. 関数を形式化する代わりに命題を形式化したものが論理式である.

次に, 論理式を用いた, 証明の形式化について述べる. 簡単にいえば, 証明を論理式の機械的な書き換えと考えるものが証明図である.

**定義 1.11.** 以下の形をした論理式を logical axiom という.

(1) 恒真式 (tautology):  $\phi \rightarrow \phi$  や  $\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$  のように, 命題結合子の使われ方だけから正しいことがわかる論理式を恒真式という.

(2) quantifier axiom :

(i)  $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$  (ただし  $\psi$  は  $x$  を自由変数としては含まない),

(ii)  $\forall x\phi(x) \rightarrow \phi(t)$  ( $t$  は任意の項).

(3) equality axiom :  $t$  を項,  $\phi$  を論理式として,

(i)  $x = x$ ,

(ii)  $x = y \rightarrow t(x) = t(y)$ ,

(iii)  $x = y \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y))$ .

ある論理式が logical axiom かどうかはその論理式の形だけから分かるので機械的に判定できる.

**定義 1.12.** 次の論理式の変形を推論規則 (rule of inference) という.

- (1) modus ponens :  $\phi$  と  $\phi \rightarrow \psi$  から  $\psi$  を導く.
- (2) generalization :  $\phi(x)$  から  $\forall x\phi(x)$  を導く.

**定義 1.13.**  $T$  を理論とし,  $\phi$  を論理式とする. 以下の条件を満たす論理式の有限列  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$  が存在するとき,  $\phi$  は  $T$  から証明可能 (provable, derivable) であるといい,  $T \vdash \phi$  と書く. また, その論理式の有限列を証明図,  $n$  をその証明図の長さと呼ぶ.

- (1)  $\phi_n = \phi$ .
- (2) 任意の  $i = 0, 1, \dots, n$  について次のいずれかが成立.
  - (i)  $\phi_i$  は  $T$  の元, または logical axiom.
  - (ii)  $\phi_i$  はそれより前に現れる論理式から推論規則を用いて導かれる.

さて, 一般に  $\phi \rightarrow \psi$  を証明するためには  $\phi$  を仮定して  $\psi$  を導けばよい. 次の定理は同じことが今の形式化された証明で成り立つことをいう.

**定理 1.14 (演繹定理, The Deduction Theorem).**  $T$  を理論,  $\phi, \psi$  を文とする. このとき

$$T \cup \phi \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \phi \rightarrow \psi.$$

$\Leftarrow$  は明らか. (modus ponens から直ちに得られる.)  $\Rightarrow$  は証明図の長さに関する帰納法で証明できる.

## §2. 完全性定理

証明図は通常の証明の概念を極端に簡略化しているが, 前節に書いた公理や推論規則の正当性はあまり明らかでない. そして, これらの公理や推論規則が必要十分なものであると主張するのが完全性定理である. この節では, この完全性定理の紹介をする.

**定義 2.1.**  $\mathcal{L}$  の元に対応する構造を持つ集合を  $\mathcal{L}$  の構造 (structure for  $\mathcal{L}$ ) という.

例 2.2. (1) 関係記号  $<$  に対応する二項関係が定まっている集合が  $\mathcal{L}_{Ord}$  の構造.  
 (2) 関数記号  $\cdot$  に対応する 2 引き数の関数と  $e$  に対応する元が定まっている集合が  $\mathcal{L}_{Grp}$  の構造.

定義 2.3.  $\mathfrak{M}$  を  $\mathcal{L}$  の構造,  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  を論理式,  $a_1, \dots, a_n$  を  $\mathfrak{M}$  の元とする.  
 $\mathfrak{M}$  の上で  $\phi(a_1, \dots, a_n)$  が成り立つとき  $\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$  と書く.

例 2.4.  $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1 \rangle$  を  $\mathcal{L}_{OF}$  の構造とみたとき,

$$\mathbb{R} \models \forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y (x \cdot y = 1)).$$

定義 2.5.  $T$  を  $\mathcal{L}$  の理論とする.

- (1)  $\mathfrak{M}$  を  $\mathcal{L}$  の構造とする. 任意の  $T$  の元  $\phi$  について  $\mathfrak{M} \models \phi$  のとき,  $\mathfrak{M}$  は  $T$  のモデルであるといい,  $\mathfrak{M} \models T$  と書く.  
 (2)  $\phi$  を文とする.  $T$  の任意のモデル  $\mathfrak{M}$  について  $\mathfrak{M} \models \phi$  のとき,  $T \models \phi$  と書く.

例 2.6.  $T_{Grp}$  のモデルとは群のこと.  $T_{RCF}$  のモデルとは実閉体のこと.

注 2.7.  $\mathfrak{M} \models T, T \vdash \phi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \phi$ . (証明図の長さに関する帰納法で証明される.)

さて, すべての群の上で成り立つ命題を「群に関する定理」と呼ぼう. (これは通常の数学の習慣に照らしてそう不自然なことではなかろう.) つまり,  $T_{Grp} \models \phi$  のとき  $\mathcal{L}_{Grp}$  の文  $\phi$  は群に関する定理であるという. 実は, 群に関する定理はすべて群の公理から, 前節に定めた形式的な証明の意味で証明可能となる. このことを一般的な形でいうのが完全性定理である.

定理 2.8 (完全性定理, The Completeness Theorem).  $T \vdash \phi \Leftrightarrow T \models \phi$ .

$\Rightarrow$  は明らか (証明図の長さに関する帰納法). 本質的なのは逆向きである. 逆向きを証明するためには一般化された完全性定理を用いる.

定義 2.9. (1) ある論理式  $\phi$  が存在して  $T \vdash \phi \wedge \neg \phi$  のとき,  $T$  は矛盾する (inconsistent) という.

(2)  $T$  が矛盾しないとき,  $T$  は無矛盾である (consistent) であるという.

補題 2.10. (1)  $T$  が矛盾  $\Leftrightarrow$  任意の論理式  $\phi$  について  $T \vdash \phi$ .

(2)  $T \vdash \phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\}$  が矛盾.

(3)  $T \not\vdash \phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\}$  が無矛盾.

証明. (1)  $\Leftarrow$  は自明.  $\Rightarrow$  は任意の文  $\phi, \psi$  について  $\phi \wedge \neg\phi \rightarrow \psi$  が恒真式なことから明らか.

(2)  $\Rightarrow$  は明らか.  $\Leftarrow$  を示す.  $T \cup \{\neg\phi\}$  が矛盾すると仮定する. このとき, 論理式  $\psi$  が存在して  $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$ . 演繹定理より  $T \vdash \neg\phi \rightarrow \psi \wedge \neg\psi$  となり,  $T \vdash \neg(\psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \phi$ . ここで  $\neg(\psi \wedge \neg\psi)$  は恒真式なので  $T \vdash \phi$ .

(3) は (2) の対偶.  $\square$

定理 2.11 (一般化された完全性定理, The Generalized Completeness Theorem).  $T$  が無矛盾  $\Leftrightarrow T$  がモデルを持つ.

一般化された完全性定理を用いた完全性定理の証明.  $T \models \phi \Rightarrow T \vdash \phi$  を示したい.  $T \not\vdash \phi$  とする. このとき, 前の補題から  $T \cup \{\neg\phi\}$  は無矛盾. よって, 一般化された完全性定理により  $T \cup \{\neg\phi\}$  はモデル  $\mathfrak{M}$  を持つ. この  $\mathfrak{M}$  について  $\mathfrak{M} \models T$  かつ  $\mathfrak{M} \not\models \phi$  なので  $T \not\models \phi$ .  $\square$

さて, 一般化された完全性定理の証明だが,  $T$  が矛盾すればモデルを持たないことは明らか. よって逆 (上の証明で使っているのもこの部分) を示せばいい. これは,  $T$  が無矛盾であることを仮定して, 実際に  $T$  のモデルを作ることによって証明される.

この,  $T$  のモデルの存在の証明の基本的な考え方は代数的閉包の存在の証明とよく似ている. 代数的閉包を作るには, まず与えられた体の元を係数に持つ多項式を並べ, それぞれの多項式に対応する「記号」を用意してもとの体に加えて, 適当な同値関係で割って体にする, という操作を可算無限回繰り返す, それらの和集合をとる. モデルを作る場合には多項式を並べる代わりに  $\exists x\phi(x)$  という形の論理式を並べ, それぞれの論理式に対応する定数記号を用意してもとの言語に加えるという操作を可算無限回繰り返す, 最後に定数記号の集合を適当な同値関係で割ってその集合の上に構造を定める. 代数的閉包の存在の証明のときに多項式を並べるのでは

なく,  $\exists x(f(x)=0)$  という形の論理式を並べると考えれば, その類似性はより明らかであろう.

なお, 代数的閉包の存在の証明と同様, 完全性定理の証明にも選択公理が必要になる. 数学基礎論の定理の証明に選択公理が用いられていることに違和感を感じる人もあるかもしれないが, 特に断わらない限り, 基礎論以外の数学と同様, 数学基礎論でも必要なものは何でも使う.

完全性定理は多くの応用を持つが, 多くの場合, 完全性定理そのものよりもコンパクト性定理の方が使いやすい.

**補題 2.12.**  $T \vdash \phi$  ならば  $T$  の有限部分集合  $T'$  が存在して  $T' \vdash \phi$ .

証明.  $T$  から  $\phi$  を導く証明図の中に現れる  $T$  の元が高々有限個なことから明らか.  
□

**定理 2.13 (コンパクト性定理, The Compactness Theorem).**  $T$  がモデルを持つ  $\Leftrightarrow T$  の任意の有限部分集合がモデルを持つ.

証明.  $\Rightarrow$  は自明.  $\Leftarrow$  を証明する.  $T$  がモデルを持たないとする. このとき, 完全性定理から  $T$  は矛盾し, 前の補題から  $T$  の有限部分集合  $T'$  が存在して  $T'$  も矛盾. 完全性定理によって, この  $T'$  はモデルを持たない. □

補題 2.12 のこともコンパクト性定理と呼ぶことがある.

### §3. TARSKI-SEIDENBERG の定理

$\mathcal{L}_{OF}$  および  $T_{RCF}$  を考える.

**定義 3.1.** Quantifier を含まない論理式を open (もしくは quantifier-free) formula という.

**定義 3.2.**  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  とする.  $X$  が open formula で定義可能  $\Leftrightarrow$  open formula  $\phi(\bar{x}, \bar{y})$  と  $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$  が存在して  $X = \{\bar{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{R} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$ .

**注 3.3.**  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  が open formula で定義可能  $\Leftrightarrow X$  が semi-algebraic.

**定理 3.4 (Tarski-Seidenberg の定理).** 任意の論理式  $\phi(\bar{x})$  に対して open formula  $\psi(\bar{x})$  が存在して,

$$T_{RCF} \vdash \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

( $\psi$  の自由変数が  $\phi$  の自由変数に含まれることに注意.)

この定理は初め Tarski によって証明され, 後に Seidenberg によって別証が与えられた. また, この定理は  $\phi$  の中に含まれる quantifier を消去できることを意味するので,  $T_{RCF}$  に関する quantifier elimination theorem とも呼ばれている. この定理を証明するためには任意の open formula  $\phi(\bar{x}, y)$  に対して open formula  $\psi(\bar{x})$  が存在して

$$T_{RCF} \vdash \forall \bar{x} (\exists y \phi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$$

となることを示せばいい. これは論理式の複雑さ (論理式に現れる論理記号の数) に関する帰納法で証明できる. ここで, 前に書いたように open formula で定義可能と semi-algebraic であることが同値なので,  $\phi(\bar{x}, y)$  で定義される集合は semi-algebraic となり,  $\exists y \phi(\bar{x}, y)$  で定義される集合はその projection になる. それが再び open formula で定義可能, すなわち semi-algebraic になるという. よって, Tarski-Seidenberg 定理は semi-algebraic の projection が semi-algebraic になることを意味する.

ここからは  $\mathcal{L}_{OF}$ ,  $T_{RCF}$  に限らず, 一般の言語  $\mathcal{L}$ , 理論  $T$  を考える.

**定義 3.5.** 任意の  $T$  のモデル  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  と,  $\mathfrak{M}'_1 \cong \mathfrak{M}'_2$  を満たすそれらの部分構造  $\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2$  に対して

$$\mathfrak{M}'_1 \subseteq \mathfrak{M}''_1 \subseteq \mathfrak{M}_1$$

$$\mathfrak{M}'_2 \subseteq \mathfrak{M}''_2 \subseteq \mathfrak{M}_2$$

$$\mathfrak{M}''_1 \cong \mathfrak{M}''_2$$

を満たす  $T$  のモデル  $\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2$  が存在するとき  $T$  は isomorphism condition を満たすという.

注 3.6. Artin-Schreier の定理から  $T_{RCF}$  が isomorphism condition を満たすことがわかる.

定義 3.7.  $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$  を満たす任意の  $T$  のモデル  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$  と任意の open formula  $\phi(\bar{x}, y)$ , 任意の  $\mathfrak{M}'$  の元  $\bar{a}$  について

$$\mathfrak{M}' \models \exists y \phi(\bar{a}, y) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$$

となるとき  $T$  は submodel condition を満たすという.

注 3.8.  $T_{RCF}$  は submodel condition を満たす.

次の定理がこの節の目標である.

定理 3.8.  $\mathcal{L}$  が定数記号を持ち,  $T$  が isomorphism condition と submodel condition を満たすなら  $T$  で quantifier elimination が成り立つ. すなわち, 任意の論理式  $\phi(\bar{x})$  に対して open formula  $\psi(\bar{x})$  が存在して,

$$T \vdash \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

以下,  $\mathcal{L}$  は定数記号を持つとする. 変数を全く含まない sentence を variable free な sentence といい, variable free な sentence 全体からなる集合を  $VF_s$  とする. 同様に, 変数を全く含まない term を variable free な term といい, variable free な term 全体からなる集合を  $VF_t$  とする.  $\mathcal{L}$  が定数記号を持つと仮定したので,  $VF_s$  および  $VF_t$  は空集合ではない.

定義 3.9.  $\mathcal{L}$  の構造  $\mathfrak{M}$  について

$$\Delta_{\mathfrak{M}} = \{\phi \in VF_s \mid \mathfrak{M} \models \phi\}.$$

補題 3.10.  $\phi$  を sentence とする. 任意の  $T$  のモデル  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  について,  $\Delta_{\mathfrak{M}_1} = \Delta_{\mathfrak{M}_2}$  ならば

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}_2 \models \phi$$

とする. このとき  $\psi \in VF_s$  が存在して,

$$T \vdash \phi \leftrightarrow \psi.$$

証明.

$$\Gamma = \{\psi \in VF_s \mid T \vdash \phi \rightarrow \psi\}$$

とおく.  $T \cup \Gamma \vdash \phi$  と仮定する. コンパクト性定理から  $\Gamma$  の有限部分集合  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  が存在して,

$$T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vdash \phi.$$

$\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$  とすると  $\psi \in VF_s$  で  $T \cup \{\psi\} \vdash \phi$  となり,  $T \vdash \psi \rightarrow \phi$ . また  $i = 1, 2, \dots, n$  について  $T \vdash \phi \rightarrow \psi_i$  なので  $T \vdash \phi \rightarrow \psi$  となり,  $T \vdash \phi \leftrightarrow \psi$ . よって  $T \cup \Gamma \vdash \phi$  を示せばいい.

$T \cup \Gamma \not\vdash \phi$  とする. 補題 1.23 から  $T \cup \Gamma \cup \{\neg\phi\}$  は無矛盾. よって, 一般化された完全性定理によって  $T \cup \Gamma \cup \{\neg\phi\}$  はモデル  $\mathfrak{M}$  を持つ. 明らかに  $\Gamma \subseteq \Delta_{\mathfrak{M}}$ .  $T \cup \Delta_{\mathfrak{M}} \vdash \neg\phi$  を示したい.

$\mathfrak{M}'$  を  $T \cup \Delta_{\mathfrak{M}}$  の任意のモデルとする.  $\mathfrak{M}' \models \Delta_{\mathfrak{M}}$  より  $\Delta_{\mathfrak{M}} = \Delta_{\mathfrak{M}'}$ . よって, 補題の仮定から  $\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \phi$  となり,  $\mathfrak{M}' \models \neg\phi$ .  $\mathfrak{M}'$  は任意だったので  $T \cup \Delta_{\mathfrak{M}} \vdash \neg\phi$ .

コンパクト性定理から  $\Delta_{\mathfrak{M}}$  の有限部分集合  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  が存在して

$$T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vdash \neg\phi.$$

$\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$  とおく. 明らかに  $\psi \in VF_s$  で  $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\phi$ . よって  $T \vdash \psi \rightarrow \neg\phi$  となり,  $T \vdash \phi \rightarrow \neg\psi$ . このとき  $\Gamma$  の定義から  $\neg\psi \in \Gamma$  となるが,  $\Gamma \subseteq \Delta_{\mathfrak{M}}$  だったので  $\neg\psi \in \Delta_{\mathfrak{M}}$ . よって  $\mathfrak{M} \models \neg\psi$ . また, 任意の  $i = 1, \dots, n$  について,  $\psi_i \in \Delta_{\mathfrak{M}}$  から  $\mathfrak{M} \models \psi_i$ . よって  $\mathfrak{M} \models \psi$ . 矛盾.

ゆえに  $T \cup \Gamma \vdash \phi$  となり, 補題は証明された.  $\square$

定理 3.8 の証明.  $T$  が isomorphism condition と submodel condition を満たすとする. 簡単のため, 任意の open formula  $\phi(y)$  に対して open formula (この場合は sentence)  $\psi$  が存在して

$$T \vdash \exists y \phi(y) \leftrightarrow \psi$$

となることを証明する. ( $\phi$  が  $y$  以外の変数を持つ場合でも, 変数を適当な新しい定数記号に置き換えることによってこの場合に帰結できるので, この場合がのみでも本質的なところはすべて含むといえる.)

$\phi(y)$  を open formula とする. 前の補題により, 任意の  $T$  のモデル  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  について,  $\Delta_{\mathfrak{M}_1} = \Delta_{\mathfrak{M}_2}$  ならば

$$\mathfrak{M}_1 \models \exists y \phi(y) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_2 \models \exists y \phi(y)$$

となることを示せばよい.

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  を  $\Delta_{\mathfrak{M}_1} = \Delta_{\mathfrak{M}_2}$  を満たす  $T$  のモデルとする.  $i = 1, 2$  について  $t \in VF_t$  が表す  $\mathfrak{M}_i$  の元を  $t_{\mathfrak{M}_i}$  で表し,

$$\mathfrak{M}'_i = \{t_{\mathfrak{M}_i} \mid t \in VF_t\}$$

とおく.  $\mathfrak{M}'_i$  は  $\mathcal{L}$  の関数に関して閉じているので  $\mathfrak{M}_i$  の部分構造となる.  $\mathfrak{M}'_1 \cong \mathfrak{M}'_2$  を示したい.

まず,  $\mathfrak{M}'_1$  から  $\mathfrak{M}'_2$  への関数  $f$  を,  $t \in VF_t$  に対して

$$f(t_{\mathfrak{M}_1}) = t_{\mathfrak{M}_2}$$

によって定義する. 任意の  $VF_t$  の元  $t, t'$  について

$$t_{\mathfrak{M}_i} = t'_{\mathfrak{M}_i} \Leftrightarrow \mathfrak{M}_i \models t = t'$$

であり,  $\Delta_{\mathfrak{M}_1} = \Delta_{\mathfrak{M}_2}$  かつ  $t = t' \in VF_s$  なので

$$\mathfrak{M}_1 \models t = t' \Leftrightarrow \mathfrak{M}_2 \models t = t'.$$

よってこの定義は well-defined となり, また isomorphism になる. ゆえに  $\mathfrak{M}'_1 \cong \mathfrak{M}'_2$ .

$T$  は isomorphism condition を満たすので,  $\mathfrak{M}'_1 \cong \mathfrak{M}'_2$  を満たす  $T$  のモデル  $\mathfrak{M}''_1, \mathfrak{M}''_2$  が存在して,

$$\mathfrak{M}'_i \subseteq \mathfrak{M}''_i \subseteq \mathfrak{M}_i.$$

$T$  は submodel condition を満たすので

$$\mathfrak{M}_i \models \exists y \phi(y) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_i'' \models \exists y \phi(y).$$

また,  $\mathfrak{M}_1' \cong \mathfrak{M}_2'$  から明らかに

$$\mathfrak{M}_1'' \models \exists y \phi(y) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_2'' \models \exists y \phi(y).$$

ゆえに

$$\mathfrak{M}_1 \models \exists y \phi(y) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_2 \models \exists y \phi(y).$$

□

以上によって定理 3.4 が証明された.

体の言語  $\mathcal{L}_F = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  の上の代数的閉体の理論  $T_{ACF}$  も isomorphism condition と submodel condition を満たすので,  $T_{ACF}$  においても quantifier elimination が成り立つ.

なお, ここで紹介した証明は Shoenfield [9] による. また, Tarski-Seidenberg の定理の周辺の話は van den Dries [6] に詳しい.

#### §4. 応用

この節では quantifier elimination の応用を紹介する.

**定義 4.1.** 任意の論理式  $\phi$  に関して  $T \vdash \phi$  または  $T \vdash \neg \phi$  がいえるとき  $T$  は完全 (complete) であるという.

**定理 4.2.**  $T$  で quantifier elimination が成り立ち, 任意の open sentence  $\phi$  に関して  $T \vdash \phi$  または  $T \vdash \neg \phi$  がいえるならば  $T$  は完全.

**系 4.3.** (1)  $T_{RCF}$  は完全.

(2)  $T_{ACF}$  に標数が  $n$  であることを示す論理式を公理に加えた理論  $T_{ACF_n}$  は完全.

$T_{RCF}$  が完全なことから  $T_{RCF}$  が決定可能, すなわち,  $\mathcal{L}_{OF}$  の文が与えられたとき, その文が  $T_{RCF}$  から証明可能かどうか判定するアルゴリズムが存在することがわかる.  $T_{ACF_n}$  についても同様である.

注 4.4.  $T_{ACF}$  は完全でない. 上の定理の後半の条件を満たさない.

定義 4.5.  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$  を  $\mathcal{L}$  の構造とする.

(1) 任意の文  $\phi$  について  $\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \phi$  が成り立つとき  $\mathfrak{M}$  と  $\mathfrak{M}'$  は初等的に同値 (elementarily equivalent) であるといい,  $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$  と書く.

(2)  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$  とする. 任意の論理式  $\phi(\bar{x})$  と  $\mathfrak{M}$  の元  $\bar{a}$  について  $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \phi(\bar{a})$  が成り立つとき  $\mathfrak{M}$  は  $\mathfrak{M}'$  の初等的部分構造 (elementary substructure) であるといい,  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}'$  と書く.

注 4.6. (1)  $T$  が完全なら  $T$  の任意のモデル  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$  について  $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$ .

(2)  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}'$  ならば  $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$  だが,  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$  かつ  $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$  でも  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}'$  とは限らない.

さて, quantifier elimination と密接な関係のある概念に model-complete というものがある. この model-complete という概念を通して quantifier elimination の応用を紹介する.

定義 4.7.  $T$  の任意のモデル  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$  について

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}' \Rightarrow \mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}'$$

が成り立つとき,  $T$  は model-complete であるという.

定理 4.8.  $T$  で quantifier elimination が成り立つなら  $T$  は model-complete.

系 4.9.  $T_{RCF}$ ,  $T_{ACF}$  は model-complete. (もちろん  $T_{ACF_n}$  も model-complete.)

注 4.10. Complete だからといって model-complete になるとは限らない. Model-complete だからといって complete になるとも限らない.

$$(\text{complete}) \Leftarrow (\text{quantifier elimination}) \Rightarrow (\text{model-completeness})$$

$$(\text{complete}) \not\Leftarrow (\text{model-complete})$$

$T_{RCF}$ ,  $T_{ACF_n}$  が model-complete であることの応用を二つ紹介する.

定理 4.11 (Hilbert の第 17 問題).  $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$  とする. 任意の実数  $a_1, \dots, a_n$  について  $0 \leq f(a_1, \dots, a_n)$  ならば  $f$  は  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$  の元の 2 乗の和で表せる.

この定理の証明に次の補題を用いる.

**補題 4.12.**  $F$  を実体とする. 任意の  $F$  の元  $a$  について,  $a$  が  $F$  の元の 2 乗の和で表せることと  $a$  が  $F$  に入る任意の順序  $\leq$  で  $0 \leq a$  となることが同値となる.

**定理 4.11** の証明.  $f$  が 2 乗の和で表せないとする. 補題 4.12 より  $f < 0$  とする  $\mathbb{R}(\bar{x})$  上の順序  $\leq$  が存在する.  $R$  を  $(\mathbb{R}(\bar{x}), \leq)$  の実閉包とする. このとき  $R \models T_{RCF}$  で  $\mathbb{R} \subseteq R$ .  $T_{RCF}$  は model-complete なので  $\mathbb{R} \preceq R$ . ( $\bar{x}$  を  $R$  の元とみて)  $R \models f(\bar{x}) < 0$  なので ( $\bar{x}$  を変数とみて)  $R \models \exists \bar{x}(f(\bar{x}) < 0)$ .  $\mathbb{R} \preceq R$  なので  $\mathbb{R} \models \exists \bar{x}(f(\bar{x}) < 0)$ .  
□

**定理 4.13 (Hilbert の零点定理).**  $F$  を代数的閉体とし,  $I$  を  $I \neq F[\bar{x}]$  を満たす  $F[\bar{x}]$  の ideal とすると,

$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

**証明.**  $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$  は明らか.  $I(V(I)) \subseteq \sqrt{I}$  を示したい.  $g \in F[\bar{x}] \setminus \sqrt{I}$  とする.  $g \notin I(V(I))$  を示す.

$$\mathcal{I} = \{J \subseteq F[\bar{x}] : \text{ideal} \mid I \subseteq J, g \notin \sqrt{J}\}$$

とおく.  $I \in \mathcal{I}$  より  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ . また  $\mathcal{I}$  は包含関係で半順序集合を成し, さらに closed under unions of chains なので Zorn の補題から  $\mathcal{I}$  には maximal element  $J$  が存在.  $J$  が prime ideal であることを示す.

$J$  が prime でないと仮定する. このとき,  $h \cdot k \in J$  を満たす  $h, k \in F[\bar{x}] \setminus J$  が存在.  $J$  の maximality から  $g \in \sqrt{J + (h)} \cap \sqrt{J + (k)}$ . 従って  $J$  の元  $j_1, j_2$ ,  $F[\bar{x}]$  の元  $a_1, a_2$ , 自然数  $n_1, n_2 (\geq 0)$  が存在して

$$g^{n_1} = j_1 + a_1 \cdot h, g^{n_2} = j_2 + a_2 \cdot k.$$

このとき,  $g^{n_1+n_2} \in J$  から  $g \in \sqrt{J}$  となり矛盾.

$J$  が prime なので  $F[\bar{x}]/J$  は integral domain.  $K$  を  $F[\bar{x}]/J$  の商体の代数的閉包とする.  $J \neq F[\bar{x}]$  より  $F \subseteq K$ .  $p \in F[\bar{x}] \setminus J$  に対して  $p$  を含む  $F[\bar{x}]/J$  の同値類を

$[p]$  で表す. このとき,  $g \in F[\bar{x}] \setminus J$  より  $K \models [g(\bar{x})] \neq 0$ . (ここで  $[\bar{x}]$  は  $[x_1], \dots, [x_m]$  の略.) また, 明らかに  $K \models g([\bar{x}]) = [g(\bar{x})]$  なので  $K \models g([\bar{x}]) = 0$  一方, 任意の  $I$  の元  $h$  について,  $h \in J$  から  $K \models [h(\bar{x})] = 0$  となるので  $K \models h([\bar{x}]) = 0$ .

さて, Hilbert の basis theorem から  $h_1, \dots, h_n \in I$  が存在して  $I = (h_1, \dots, h_n)$ . この  $h_1, \dots, h_n$  について,

$$K \models g([\bar{x}]) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^n h_i([\bar{x}]) = 0.$$

よって,

$$K \models \exists \bar{x} (g(\bar{x}) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^n h_i(\bar{x}) = 0).$$

$T_{ACF}$  は model-complete なので  $F \preceq K$ . 従って

$$F \models \exists \bar{x} (g(\bar{x}) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^n h_i(\bar{x}) = 0)$$

となり,  $g \notin I(V(I))$ .  $\square$

なお, prime, radical という概念を real prime, real radical などに置き換えることによって, 全く同様の方法で実閉体に体する零点定理の一種 (real-stellensatz) が証明できる.

## §5. 最近の話題

§4 で見たように, Tarski の quantifier elimination theorem から  $Th(\mathbb{R})$  が決定可能なことがわかるが, Tarski はそのことを証明した論文のなかで

「 $Th(\mathbb{R}, \exp)$  は決定可能か？」

という, いわゆる Tarski の問題を提示している. (言語は  $\mathcal{L}$  に exponentiation を表わす 1 変数関数記号を加えたもの.)  $Th(\mathbb{R}, \exp)$  の上では quantifier elimination theorem は成立しないのでこの問題を  $\mathbb{R}$  の場合と同様の方法で解くことはできない.

van den Dries はこの Tarski の問題の解決に向け  $\mathbb{R}$  の持つ「良い」性質はどこからくるのかを分析し ([3]), それをもとに Kight, Pillay, Steinhorn は  $O$ -minimal という概念を導入した ([10, 11, 12]).

**定義 5.1 (*O*-minimality).**  $M$  を全順序が定められている構造とする.  $M$  上で ( $M$  に対応する言語で) 定義可能な  $M$  の部分集合が开区間と点の有限和集合のとき  $M$  は *O*-minimal であるという.

Tarski の問題に関連して van den Dries は「 $(\mathbb{R}, \exp)$  は *O*-minimal か？」という問題を提示している ([4]).

$\mathbb{R}$  に semialgebraic sets 全体, もしくは piecewise linear sets 全体を付け加えた構造以外で *O*-minimal となるものを初めて発見したのは van den Dries である.

**定義 5.2. (Finitely subanalytic sets).**  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  とする.  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (1/\sqrt{1+x_1^2}, \dots, 1/\sqrt{1+x_m^2})$  による  $X$  の像が subanalytic のとき  $X$  は finitely subanalytic であるという.

**定理 5.3. (van den Dries [5]).**  $\mathbb{R}$  にすべての finitely subanalytic set を付け加えた構造は definability に関して閉じている *O*-minimal な構造である.

しかし exponentiation (のグラフ) は finitely subanalytic でないので, この定理は先の van den Dries の問題に答えてはいない.

van den Dries は Tarski の問題に関連して, 次の定理を示している.

**定理 5.4. (van den Dries [7]).**  $Th(\mathbb{R}, \exp|_{[0,1]}, \sin|_{[0,\pi]})$  は model-complete.

Wilkie は [13] で  $Th(\mathbb{R}, \exp)$  の model-completeness に関する部分的な結果を出している. さらに最近,  $\mathbb{R}$  に  $[0, 1]$  上に制限された Pfaffian functions を付け加えた構造に対応する theory が model-complete となることを示し ([14]), それをもとに次の定理を証明している.

**定理 5.5. (Wilkie [15]).**  $Th(\mathbb{R}, \exp)$  は model-complete.

この定理から  $(\mathbb{R}, \exp)$  が *O*-minimal となることがわかる.

## REFERENCES

1. Chang, C.C. and Keisler, H.J., *Model Theory (3rd ed.)*, North-Holland, 1990.
2. van Dalen, D., *Logic and Structure (3rd ed.)*, Springer, 1994.

3. van den Dries, L., *Remarks on Tarski's problem concerning  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$* , Logic Colloquium '82 (L.G. Longo and A. Macintyre, eds.), North-Holland, 1984, pp. 97-121.
4. ———, *Tarski's problem and Pfaffian functions*, Logic Colloquium '84 (J.B. Paris, A.J. Wilkie, and G.M. Wilmers, eds.), North-Holland, 1986, pp. 59-90.
5. ———, *A Generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results*, Bull. AMS **15** (1986), 189-193.
6. ———, *Alfred Tarski's elimination theory for real closed fields*, J. Symbolic Logic **53** (1988), 7-19.
7. ———, *On the elementary theory of restricted elementary functions*, J. Symbolic Logic **53** (1988), 796-808.
8. Hodges, W., *Model Theory*, Cambridge, 1993.
9. Shoenfield, J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.
10. Pillay, A. and Steinhorn, C., *Definable sets in ordered structures*, Bull. AMS **11** (1984), 159-162.
11. ———, *Definable sets in ordered structures. I*, Trans. AMS **259** (1986), 265-592.
12. Knight, J.F., Pillay, A., and Steinhorn, C., *Definable sets in ordered structures. II*, Trans. AMS **259** (1986), 593-605.
13. Wilkie, A., *On the theory of the real exponential field*, Illinois J. Math. **33** (1989), 384-408.
14. ———, *Model completeness results for expansions of the real field I: restricted Pfaffian functions*, J. AMS (to appear).
15. ———, *Model completeness results for expansions of the real field II: the exponential function*, J. AMS (to appear).

657 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院 自然科学研究科  
 E-mail address: kikuchi@godel.seg.kobe-u.ac.jp