

Calabi-Yau 多様体の モジュライ空間と 変形理論

並河 良典

幾千もの例が物語るように、Calabi-Yau 多様体の
モジュライ空間は、通常の意味では、既約から程遠い。
しかし、退化と、双有理写像の2つの操作によって、
多くのモジュライ空間がくもの巣のようにつながっている。
Calabi-Yau 多様体の退化にとれぐらゐの特異点を
許容するかによって、モジュライ空間の様子は異なってくる。
例えば、末端特異点程度の退化であれば、倉西空間
は非特異なままで、モジュライ空間は、ある種の多層構造
(stratification)を持つ (cf. [Na 1])。しかし、標準
特異点にまで退化の範囲を広げると、倉西空間は、既約
でも被約でもなくなることがある。ここでは、変形理論
を用いて、これらの現象を説明する。

X を、標準特異点 (canonical singularity) と持った、
Calabi-Yau 多様体とする。すなわち、 $K_X \sim 0$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$
である様な、標準特異点付き 3次元射影代数多様体
のことである。

この問題を考える：

問題： いっ X は、非特異な Calabi-Yau 多様体
に変形することができるか？

この問題に対する第1ステップは、 X の倉西空間 $\text{Def}(X)$ の研究である；すでに、Bogomolov, Tian, Todorov, Ran, 川又, Deligne, 筆者, Gross と続く一連の結果から、かなりの部分が解明されている。ひとこと言ってしまうと X の様になる。

定理： X の変形の障害は、 X の各特異点の (局所的な) 変形の障害からくる、特に、 X の特異点の変形が全て unobstructed であれば、 X 自身の変形も unobstructed である。

詳しいことは、[Ra], [Ka], [Na2], [Gr1] に仰ねることにして先に進む。自然な写像：

$$\alpha: \text{Ext}^1(\Omega_X', \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \text{Ext}^1(\Omega_X', \mathcal{O}_X))$$

を考える。 α が全射であれば、(あら、はく言うて)

特異点のまわりの1次無限小変形は、 X の1次無限小変形として実現される。さらに、 $\text{Def}(X)$ が非特異であれば、この無限小変形は、実際の変形から来ている。残念ながら、これらのことが満たされるのは、

極めてまれである。

以後、 X が孤立特異点のみを持つ場合と、非孤立特異点を持つ場合に分けて議論する。

Case 1 : X が孤立特異点のみを持つ場合

$\Sigma = \text{Sing}(X)$, $U = X - \Sigma$ と置く。Schlessinger の結果から、 α は、局所コホモロジーのコバウチー-局域

$$H^1(U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow H^2_\Sigma(X, \mathcal{O}_X)$$

と同一視される。 X が 3次元で、 $K_X \sim 0$ であることから

$$H^1(U, \mathcal{O}_U) \cong H^1(U, \Omega^2_U), \quad H^2_\Sigma(X, \mathcal{O}_X) \cong H^2_\Sigma(X, \pi_* \Omega^2_Y)$$

がわかる。さて $\pi: Y \longrightarrow X$ は Σ 以外では同型

てあるような X の特異点解消である。この時、次の

可換図式 (◆) を得る ($E = \pi(\Sigma)$ を置いた)

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{(\textbf{◆})} & H^1(\pi^*(U), \Omega^2) & \rightarrow & H^2_E(Y, \Omega^2_Y) & \xrightarrow{\beta} & H^2(Y, \Omega^2_Y) & (\text{完全}) \\
 & \downarrow & & \uparrow & & & \\
 & H^1(U, \Omega^2_U) & \xrightarrow{\alpha} & H^2_\Sigma(X, \pi_* \Omega^2_Y) & & &
 \end{array}$$

β の双対写像 $\beta^\vee$ は、自然な射

$$H^1(Y, \Omega^1_Y) \longrightarrow H^0(X, R^1\pi_* \Omega^1_Y)$$

に代わらない。 $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ なのて、

$$\mathrm{dlog}: H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{Q}_Y^1)$$

は同型である。そこで、 β^V は次の様に分解する:

$$\begin{array}{ccc}
 (\diamond\diamond) & H^1(Y, \mathcal{Q}_Y^1) & \xrightarrow{\beta^V} H^0(X, R^1\pi_* \mathcal{Q}_Y^1) \\
 & \uparrow \mathrm{dlog} & \uparrow \mathrm{dlog} \\
 & H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} & \longrightarrow H^0(X, R^1\pi_* \mathcal{O}_Y^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}
 \end{array}$$

右端の dlog は、 X の特異点の情報を反映する、

一方、下段の水平方向の射は、 X の大域的な情報を反映している。この可換図式を動機として、一般の

孤立有理特異点 V の不変量 $\mu(V)$, $\sigma(V)$ を

次の様に定義しよう: $f: \tilde{V} \rightarrow V$ を特異点以外では、同型である特異点解消とし、 $f^{-1}(0) = E$ は、 $\tilde{V}$ の単純正規交叉因子と仮定する。この時、

$$\mu(V) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker} [H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_{\tilde{V}}^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{dlog}} H^1(\tilde{V}, \mathcal{Q}_{\tilde{V}}^1)]$$

$$\sigma(V) := \mathrm{rank} \left[\frac{\mathrm{Weil}(V)}{\mathrm{Cart}(V)} \right]$$

但し、 $\mathrm{Weil}(V)$ (すなわち $\mathrm{Cart}(V)$) は、 V 上の Weil 因子

(又は, Cartier 図式) のなる アーベル群である。

μ と σ の性質を列挙しよう。

$$(1) \mu(V) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^1(\log E)(-E))$$

これは, 完全系列

$$0 \rightarrow \Omega_{\tilde{V}}^1(\log E)(-E) \rightarrow \Omega_{\tilde{V}}^1 \rightarrow \hat{\Omega}_E^1 \rightarrow 0$$

と, V が有理特異点であることから容易に証明できる

(2) V がトリーク特異点であれば, $\mu(V) = 0$

(3) V が 3次元 hypersurface 特異点であれば, $\mu(V) = 0$
 であること, V が非特異または通常2重特異
 点 (i.e. $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$) であることは, 同値。

(4) V が 3次元 Gorenstein 特異点とすると,

$$\mu(V) + \sigma(V) \leq \dim T_V^1 \leq 2\mu(V) + \sigma(V).$$

$$\text{但し, } T_V^1 := \text{Ext}^1(\Omega_V^1, \mathcal{O}_V).$$

可換図式 (◆), (◆◆) に戻って議論を続けよう。 μ, σ
 を用いると, 次のことが証明できる。

命題: $\times$ は, 孤立標準特異点のみを持つ
 Calabi-Yau 多様体とする。

$$(i) \quad \dim \operatorname{Coker}(\beta^\vee) \geq \sum_{p \in \operatorname{Sing}(X)} u(X, p) \quad (\text{したがって}$$

$$\text{特に, } \dim \operatorname{im}(\alpha) \geq \sum u(X, p))$$

さらに、もし、 X が $\mathbb{Q}$ -分解的であれば、

$$\dim \operatorname{Coker}(\beta^\vee) \geq \sum_{p \in \operatorname{Sing}(X)} \{u(X, p) + \sigma(X, p)\}$$

$$(\text{したがって、特に、} \dim \operatorname{im}(\alpha) \geq \sum \{u(X, p) + \sigma(X, p)\})$$

(ii) X が トーリック特異点のみしか持たなければ、
 α は全射である。

命題 と、 u と σ の induction によって、この定理
と得る。

定理 : X と 孤立標準特異点を持つ $\mathbb{Q}$ -分解的
Calabi-Yau 多様体とする。 X の特異点 (X, p) は、局
所的には、smoothable で、このいずれかと満たすと仮定：

(i) (X, p) は トーリック特異点。

(ii) 倉西空間 $\operatorname{Def}(X, p)$ は 非特異

この時、 X は、非特異 Calabi-Yau 多様体に変形される。

例 1 : $\operatorname{Sing}(X) = \{p\}$, (X, p) は、次数 5 の

del Pezzo 曲面 E 上の錐の頂点と同型と仮定する。

$\tilde{X}$ を X の点 p における フローイングアップ とすると、 $\tilde{X}$ は、非特異 Calabi-Yau 多様体で、例外因子が $\mathbb{P}^1$ 度、 E に一致する。 (X, p) は、Pfaffian subscheme として得られるので、定理の (ii) と満ちる。したがって、 X が $\mathbb{Q}$ -分解的であれば、非特異 Calabi-Yau 多様体に変形される。

例 2. : $\text{Sing}(X) = \{p\}$, (X, p) は、次数 6 の del Pezzo 曲面 E 上の錐の頂点と同型とする。 $\tilde{X}$ を X の点 p における フローイングアップ とし、例外因子を E と同一視する。 (X, p) は、トリーク特異点になる。 (X, p) は、2 方向の異なる スムージング を持つ：

(I). E を $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の中に $(1, 1)$ の $(1, 1)$ 型完全交叉部分多様体として埋め込む。 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ を $\mathbb{P}^8$ に埋め込む。 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上の錐を、頂点を通る超平面で 2 回切ると (X, p) が得られ、一般の超平面で 2 回切ると、 (X, p) の スムージング が得られる。

(II): $E \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$ に対して、(I) と同じことを行う

(X, p) の倉西空間 $\text{Def}(X, p)$ は、2つの(非特異な) 既約成分を持ち、各々が (I), (II) のタイプのスムージングに対応している。

定理の(i)が満たされているので、 X が $\mathbb{Q}$ -分解的であれば、非特異な Calabi-Yau 多様体に変形可能である。

命題(ii)より 自然な写像

$$\text{Def}(X) \longrightarrow \text{Def}(X, p)$$

は全射になる。したがって、 X は2つの異なるスムージング X_s, X_t を持つ。ここで、 X_s は (I) に対応するスムージング、 X_t は (II) に対応するものとする。この時、 $X_s, X_t, \tilde{X}$ の Betti 数は、次の関係を持つ：

$$b_2(X_s) = b_2(\tilde{X}) - 1 \quad b_3(X_s) = b_3(\tilde{X}) + 4$$

$$b_2(X_t) = b_2(\tilde{X}) - 1 \quad b_3(X_t) = b_3(\tilde{X}) + 2$$

ここで述べた様な X が実際に存在する (cf. [NLS])

Case 2: X が非孤立特異点を持つ場合

$\text{Sing}(X) = \Sigma$ とおく。 X は、標準特異点しか持たないので、

Σ 中の有限集合 Σ_0 を除いたところでは、2次元有理2重点の局所自明な次元族とみなせる。 $H^1(X - \Sigma, \mathcal{O}_{X-\Sigma})$ は、

有限次元にならない。かわりに、 $U = X - \Sigma_0$ と置いて、 $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ と考える。この時、 π の図式が可換になることが証明できる：

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}^1(\underline{\Omega}_X^1, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(X, \text{Ext}^1(\underline{\Omega}_X^1, \mathcal{O}_X)) \\ \cup & & \cup \\ H^1(U, \mathcal{O}_U) & \xrightarrow{\alpha'} & H_{\Sigma_0}^2(X, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

$p \in \Sigma_0$ に対して、孤立特異点の場合の μ の性質(1)を見積らる。

$$\mu(X, p) = \dim_{\mathbb{C}} (R^1 \pi_* \underline{\Omega}_Y^1 (\log E)(-E))_p$$

と定義する。^{*}但し、 $\pi: Y \rightarrow X$ は、 X の特異点解消で、

$\pi^{-1}(\Sigma) = E$ は、 Y 上の単純正規交叉因子とする。

$R^1 \pi_* \underline{\Omega}_Y^1 (\log E)(-E)$ は、 Σ_0 上での4台を持つことに注意する。

$\sigma(X, p)$ も Case 1 と同様に定義する。

命題： X を標準特異点の4を持つ $\mathbb{Q}$ -分解的 Calabi-Yau 多様体とする。この時、

$$\dim \text{im}(\alpha') \geq \sum_{p \in \Sigma_0} \{ \mu(X, p) + \sigma(X, p) \}.$$

^{*} 石田は、du Bois complex $(\underline{\Omega}_X^\bullet, F)$ を用いて、

$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^2(\text{Gr}_F^1(\underline{\Omega}_{X,p}^\bullet))$ としても定義できるので、 π の取り方に依らない

例 3. (cf. [Gr2])

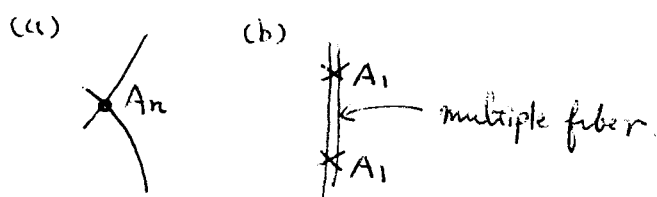
$\tilde{X}$ を非特異 Calabi-Yau 多様体とする。 $\tilde{X}$ から 正規多様体 X へ、双有理射影的正則写像 ν が存在したとする。次を仮定する:

- (i) $\Sigma = \text{Sing}(X)$ に対して、 $\nu^{-1}(\Sigma) = D$ は、高々有理 2 重点を持った曲面で、 $\nu|_D : D \rightarrow \Sigma$ は 2 次曲線束
- (ii) $\Sigma \simeq \mathbb{P}^1$
- (iii) $\rho(\tilde{X}) = \rho(X) + 1$

この状況は、Wilson によって研究された Calabi-Yau 多様体の原始的な双有理縮約 (primitive birational contraction morphism) の典型として現われる。勿論、 X は、

①-分解的 Calabi-Yau 多様体である。

分類による結果、 D の特異点は、 $\nu|_D$ の特異ファイバー上にあるだけあり、次の 2 種類のタイプのものである:



$(D^3)_X \leq 6$ の時に、 X が非特異 Calabi-Yau 多様体に変形されることを証明してみる。

$T_X := \text{Ext}^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ と置く。 T_X は、 Σ 上に台を持つ。

Σ 上の一般の点は、 A_1 -型特異点の^{局所}自明な1次元族である。さらに、 Σ の完全系列が存在する:

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow T_X' \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-D^3) \rightarrow 0$$

$$\text{supp}(\mathcal{I}) \subseteq \Sigma.$$

$\Sigma \subset X$ の十分小さな近傍を V とすると、 $\text{Ext}^2(\mathcal{Q}_V', \mathcal{Q}_V)$

$\simeq H^1(X, T_X')$ であることがわかる。^{*} 上の完全系列から、

$$\dim H^1(X, T_X') \leq 1 \text{ である. } (\because D^3 \leq 6)$$

本稿の最初に述べた定理より、 $\text{Def}(X)$ は、 $\Pi_X' :=$

$\text{Ext}^1(\mathcal{Q}_X', \mathcal{Q}_X)$ の原点の近傍で、高々1つの方程式の零点として定義される。 $D^3 \leq 6$ なので、

$$\sum_{p \in \Sigma_0} \{u(x, p) + v(x, p)\} \geq 2$$

である。命題より、 $\dim_{\mathbb{C}} \text{im}(\alpha') \geq 2$ 、特に、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{im}(\alpha) \geq 2 \text{ である. } \therefore \text{このことから、} \text{Ext}^1(\mathcal{Q}_X', \mathcal{Q}_X)$$

の元と Σ の性質を持つものが存在する

(i) ξ を X の1次無限小変形とみなしたとき、

ξ は X の実際の変形として実現される

(ii) $\alpha(\xi) \neq 0$, $\alpha(\xi) \in H_{\Sigma_0}^2(X, \mathcal{O}_X)$.

$\tilde{X}$ の倉西空間 $\text{Def}(\tilde{X})$ から $\text{Def}(X)$ へ自然な写像が存在する。最初から、この写像は不分岐と仮定できる。

^{*} X は、hypersurface 特異点のみを持つことが証明できる。

両者の接空間の間の射

$$\nu_* : \Pi_{\tilde{X}}^1 := H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \longrightarrow \Pi_X^1$$

を考える。(ii)より、 $\exists \notin \text{im}(\nu_*)$, したがって

$\text{Def}(\tilde{X}) \longrightarrow \text{Def}(X)$ は、全射ではない。この事実から、 X が smoothable であることと導くことは、それほど困難ではない (cf. [Gr 2, Lemma (1.6)]).

References

- [Gr 1] Gross, M.: Deforming Calabi-Yau threefolds, preprint
- [Gr 2] Gross, M.: Primitive Calabi-Yau threefolds, To appear in J. Diff. Geom
- [Ka] Kawamata, Y.: Unobstructed deformations, a remark on a paper of Z. Ran
J. Alg. Geom 1, 183-190 (1992)
- [Na 1] Namikawa, Y.: Stratified local moduli of Calabi-Yau threefolds, preprint
- [Na 2] Namikawa, Y.: On deformations of Calabi-Yau threefolds with terminal singularities, Topology 33 (3), 429-446 (1994)

- [Na 3] Namikawa, Y.: Deformation theory of Calabi-Yau threefolds and certain invariants of singularities, to appear in J. Alg. Geom.
- [Na-St] Namikawa, Y., Stenzel, J.: Global smoothing of Calabi-Yau threefolds, Invent. Math. 122, 403-419 (1995)
- [Ra] Ran, Z.: Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle, J. Alg. Geom. 1, 279-291 (1992)