

現場から見た数学教師に必要な数学的能力

大阪府立大手前高等学校 深川 久

Hisashi Fukagawa

Osaka Prefectural Otemae High School

1 はじめに

2012 年 12 月に行われた RIMS 共同研究「数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究」の集会に、高校現場からの意見を述べる役割を与えられて出席する機会を頂いた。当日は、各班がそれまで取り組んでこられた内容の成果報告を伺った後、そこで把握した範囲内での感想と、勤務校における SSH の取り組みの中で行った課題研究の指導事例などについてお話をした。本稿では、過去の講究録に掲載されているこれまでの取り組みや成果についても参考にした上で、当日お話しした内容を整理・拡充した形で報告する。とりわけ「標準的なモデル案（骨子）」（丹羽・松岡・川崎・大竹・伊藤 [2], [3], 丹羽 [4]）を中心にとりあげる。

なお、筆者自身が高等学校の教員であるため、以下の内容も高等学校の教員免許取得を目指す者を念頭に置いたものとなることをお断りしておきます。

2 数学教師に必要な数学能力

本節では、具体的な内容の検討を行うに当たってどのような観点に立つかを整理する。丹羽・松岡 [1] では、①教員志望の学生に対してどのような数学能力を育てるべきか、という理念の観点から、また丹羽・松岡・川崎・大竹・伊藤 [2] では、②教員養成系の大学では現に何が教えられているのか、③現在教員養成教育に携わっている数学者は何を教えるべきと考えているのか、という現状の観点から検討がなされている。本稿では、高校現場からの意見が求められているという点を考慮して、次の観点から検討したい。

- (ア) 高校で扱う数学の教育内容について、数学教師として、直接生徒に教える内容よりもより広く深く理解しておきたい。
- (イ) 高校で授業を行うにあたって、生徒が中学校卒業までに何をどのように学んできたかについて理解しておくとともに、卒業後大学へ進学した生徒がどのような数学を学び、またどのように使っていくのかについても一定の見通しをもっておきたい。
- (ウ) 自分にとって未知の数学的内容に取り組み理解の範囲を広げていくときの自分なりの方法論や、数学に向かう構えのようなものを体得しておきたい。

これらは上記①にある理念的観点とも関係が深く、それらに包摂されるものであるが、内容の取捨選択に直結するより具体側に近づけた表現にした。また、これ以上削ることはできないところまで絞り込んだつもりである。

(ア) は、次のような事柄を含む。

- (a) 過去、高等学校学習指導要領の改訂により出入りしてきた程度の内容は教師側の知識の広がりの中に優に含まれるくらいの理解の広さは持っていたい。(大学卒業時の知識でその後必要となる知識のすべてが賅えることが望ましいと言っているわけではない。教えながら学び続けることは大切である。)
- (b) 高校では厳密さの度合いを抑えて直観的な理解の範囲にとどめつつ先へ進んでいる事柄について、教師側は、本来厳密に議論すればどうなるかを理解しておきたい。(生徒相手にすべてを厳密にやるのがよい、と言っているわけではない。)
- (c) 高校で扱う教材そのものについてより詳しく知った、というだけではなく、それを超えた広がりがある程度理解しておきたい。また、高校の教材では個別の単元に分かれているが、より高い立場からは繋がりあるものとして捉えることができる、というような点についての理解の深さは持っていたい。

(イ) は、次のような点を含む。教師が教える生徒の進路は様々であるのだから、教員養成を目的とした教科専門科目の内容が他の諸科学の分野において必要となる数学からあまりにかけ離れることは望ましくないと考える。将来英語を生かした職業に就きたいと考える生徒が英語の教師に相談することが自然であるように、数学の教師は、もっとも数学を必要とする進路を選ぶ生徒に対しても何らかの助言ができるようでありたい。

(ウ) をさらに敷衍すると以下ようになる。数学の教師には、数学的事実を教えることを通して、生徒に数学を理解する仕方を教え、生徒が自分で学べるようになるよう導くことが求められる。そのためには、教師は、まず数学の学び手としての先行者でありたい。

3 標準的モデル(骨子) についての意見

3.1 全般について

集会の場では、配布資料に含まれていた「代数学」分野の案(旧案の群、環、体、ガロア理論という流れ)を見た際の第一印象で「理学部数学科で扱われる内容と大差ないのではないか」と述べた。しかし、その後全分野の案のコピーを頂き、また説明を伺う中で必ずしもそうではないと理解した。とりわけ、代数における初等整数論、幾何における解析幾何など、抽象的な扱いに入る前に具体的な対象を扱う経験をまず積んでおくという点についてそう感じる。

以下、各項目別に意見を述べる。

3.2 線型代数

高校では、「数学B」の中に「ベクトル」という単元がある。また、前学習指導要領までは「数学C」の中で「行列とその応用」を扱った。「一次変換」が重要な主題として扱わ

れた時期もあった（「代数・幾何」という科目があった頃）が、その後「点の移動」という形でほんの少し姿を留める程度の扱いになった。今年度（平成 25 年度）から全面実施（数学・理科は平成 24 年度から先行実施）された新学習指導要領では科目「数学 C」はなくなり、「行列」は高校では扱わなくなった。「曲線」など一部の内容は「数学 III」へ統合され、そこへ複素数平面が復活した。

現在、高校でのベクトルの扱いは、事実上、図形を扱うための手段としてのベクトル、という位置づけである。このように、線型代数につながるような高校の学習内容は、次第に減少してきている。

とはいえ、その重要性からも、前節（ア-a）の観点からも、大学生が最初に学ぶ数学の代表格であるという点で前節（イ）の観点からも、欠かすことのできない分野である。

「標準的モデル（骨子）」に挙げられた項目のうち、行列計算と、計量が現れて以降（項目番号 8 から 12 まで）の内容は、そこに繋がる内容（内積はもちろん、対角化を利用した 2 次正方行列の n 乗計算、回転行列を利用して楕円の方程式を標準形に直すことなど）はこれまで高校で扱った経験がある。おそらく学生にとっては、（かならずしも計量を考えない）ベクトル空間の概念、基底や階数の概念、核・像の次元公式あたりのほうが理解しづらいのではないだろうか。具体的対象の見える 2 次曲線・2 次曲面の分類などの方が、何をしているかがわかるだけに意味を感じやすいのではないかと思う。一般に、「方法の整備」だけをやって「対象を調べる」ところまで進まずに終わる講義は意味が見えにくい。方法の整備を限定的なものにしてでも、それを使って対象を調べるという経験をする方が有効であるように思う。その意味で、2 次曲線・2 次曲面の分類まで進むという選択は妥当だろう。

3.3 微分積分

高校では「数学 II」での「微分・積分の考え」という単元、および、「数学 III」の「極限・微分法・積分法」という単元で微分積分を扱う。「標準的モデル（骨子）」のうち、「1 変数微分積分」に挙げられている内容は、厳密さの水準が低く扱う関数が限定的であるものの、大方その原型を（数学 III まで履修しているならば）高校でも取り上げる。前節（ア-a）（イ）いずれの観点からも欠かせない内容である。

多変数の微積分について、2 変数に限定してでもしっかり扱うことは教員養成のための教科専門科目の内容としても意味がある。多変数を扱うことで線型代数と微積分とのつながりが明確になる。また、曲面を扱うためにも、複素関数とのつながりという点でも重要である。このように、2 変数の微積分を媒介として数学の分野間の関連への理解が深まるだろう。

3.4 集合と論理の基礎

学生自身が数学を学んでいくために欠かせない単元であることに加えて、教員養成のための教科専門科目としても重要である。「すべて」と「ある」を正しく使い分ける事、「かつ」か「または」かを明確に述べさせることなどは、高校生に対するきわめて重要な指導項目である。高校で生徒の書いた答案を読んでいると、論理的に不正確な記述に遭遇する

ことが多い。それらがなぜ不正確かを指摘し、手直しすることが日々の指導の中で常時行われる。前節（ア-a）の観点からも、必要な内容である。

3.5 代数学

3.5.1 初等整数論

平成 24 年度から数学・理科で先行実施されている新学習指導要領では、数学 A の内容として「整数の性質」が置かれている。これまでも、高校の数学の授業で「整数問題」が扱われることはあったが、よりまとまった形で導入され、教科書では「発展」のような形で合同式まで扱われている。その意味では、前節（ア-a）の観点からも高校の教師を目指す学生には必須の内容である。

同時に、より抽象的な扱いとの橋渡しをする具体的な対象としての意味、抽象的扱いを必要とする動機を用意するものとしての意味も大きい。「初学者のための整数論」（ヴェイユ [5], 片山孝次, 田中茂, 丹羽敏雄, 長岡一昭 訳）の「訳者あとがき」において、訳者たちは津田塾大学での講義経験をもとに以下のように書いている。

学生たちは、高校とは質の違った数学を前にとまどいを感じながらも勉強する意欲に燃え立つようである。それは一つには、もっとも身近な有理整数が媒介になっているため考える手がかりが各自、自分なりにいろいろあるからであろうし、また、この本を通して現代数学の片鱗を感じるからでもあろう。（[5]p.148, 「訳者あとがき」）

理学部数学科では初等整数論の講義は通常はない、とのことであるが、それは「先を急がねばならないから、この程度の事は各自自習しておいてくださいね」という意味であろう。教員養成のための教科専門科目としては、理学部数学科のように先を急がなくてもかまわない分、抽象的な扱いの基礎にある素朴で具体的な対象を調べる経験を省略しない事が大切であると考え。先に、「方法の準備」だけに終わって「対象を調べる」ことなく終わる講義には意味を感じにくいと述べたが、上に引用したあとがきにある「もっとも身近な有理整数が媒介になっているため考える手がかりが各自、自分なりにいろいろある」という部分は、有理整数という対象を調べているという実感が持てるということを表していると解釈できる。

3.5.2 群の基礎

正多角形・正多面体の合同変換群や、整数の剰余類群など、群構造は至る所に姿を現す。図形の対称性に注目することは様々なレベルで高校以下の初等・中等教育においてもとりあげる内容であるし、また、整数の性質も群の言葉を用いることでより簡明な見通しが持てるようになる。「場合の数・順列・組合せ」では群の作用とそれによる軌道や固定部分群という見方が有効な場面にたびたび出会う。高校生に直接教えるという意味ではないが、高校以下で扱う内容に対して教師はより広く深く理解しておきたいという前節（ア-a）の観点からも、重要である。

3.5.3 可換環の基礎

初等整数論を環とイデアルの言葉で書き換えることなどを通して、具体と抽象を橋渡しするような扱いをすることを望みたい。また、多項式は高校の数学の中でも重要な対象であるから、多項式環や、対称式・既約性などについて学ぶことは前節（ア-a）の観点からも意味がある。

イデアルの扱いについては初等整数論とのつながりや導入の動機が見えるような形で扱うことが望ましい。二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数環では素因数分解の一意性が成り立たなくなるが、数の代わりにイデアルを考えれば素イデアル分解の形で一意性が回復できる、というストーリーを早い段階で明確に示す。初等整数論とのつながりとイデアル導入の動機を具体的な二次体について見せることに焦点を絞り、可換環論やイデアルの一般論の準備は必要最小限に抑えて（場合によってはいくつかの証明はそう断ったうえで省略して）、イデアル論の基本定理までは進む、という扱いの方が、意味を理解しやすいだろう。数学科では通常講義されないという初等整数論を講義の中で取り上げたことのメリットを最大限に生かしながら、具体と抽象の接続を切らないように、抽象的方法の準備だけに終わるのではなく具体的対象を調べているという実感が持てるような扱いをすれば、教員養成のための教科専門科目として有意義なものになるだろう。

3.5.4 体の基礎

有理数、実数、複素数など高校までに順を追って導入する数の範囲はすべて体をなすのだから、体の基礎を理解しておくことは、数への理解を深めるという意味で前節（ア-a）の観点からも大切である。

高校の授業では、多項式の因数分解をとくに指定しなければ有理数係数の範囲で行い、ときには必要に応じて実数係数や複素数係数の範囲で行うが、同じ多項式がどの数体の中で考えるかによってどこまで分解できるかが変わるというのは、あたりまえのようできて生徒はなかなか意識しない事柄である。他にも、解と係数の関係、複素数の範囲では方程式はかならず次数と同じ個数（重解は重複度ぶんだけ数えて）持つこと、実数係数の方程式が虚数解を持つならばその共役複素数をも解に持つこと、類似の状況として、有理数係数の方程式がたとえば $1+2\sqrt{3}$ を解に持つならば $1-2\sqrt{3}$ をも解に持つこと等々、このようなことすべての背景に体の拡大という視点を持っておくことは、高校の数学教師にとっても意味のあることだと考える。

また、線型代数で学んだ事項が有効に使える対象であり、（高校でのベクトルがかなり偏った扱いになっていることと対比して）様々な対象の背後に共通にある構造としてのベクトル空間、という広い見方の獲得を促す素材にもなりうる。

3.6 幾何学

3.6.1 初等幾何

高校では数学 A「図形の性質」という単元で初等幾何的な内容が扱われる。かつては高校では初等幾何はほとんど扱わず、中学校で扱う数学の内容が大きく減らされた時期に、

一部高校へと移ってきた。いずれにしても、教師を目指す学生が初等幾何に親しんでおくことは望ましい。その理由は、数と図形はもっとも素朴な数学的対象であり、後により抽象度の高い対象や方法へと移行するとしても、やはり数学的直観の一つの源であると思うからである。ちょうど初等整数論をとりあげることが「もっとも身近な有理整数が媒介になっているため考える手がかりが各自、自分なりにいろいろある」ことと同様の役割を、幾何の分野では初等幾何が担えるだろう。また、たとえば「共点・共線定理」という観点から統一的に見る事は小中高で学ぶ初等幾何をより深く理解することにつながり、射影幾何の諸定理に親しむことや非ユークリッド幾何に触れることは、素朴に図形の性質を調べることと幾何学のより抽象的な扱いとの間のつながりを感じさせる効果が期待できる。

3.6.2 解析幾何

高校では数学 II「図形と方程式」、および旧指導要領の数学 C、新指導要領の数学 III で扱われる二次曲線が解析幾何につながる内容である。

約 40 年前に矢野健太郎が「解析幾何 図形と方程式」[6] のまえがきに次のように書いている。

ところが最近の高等学校の数学と大学初年級の数学においては、ベクトルと行列、すなわち線形代数と微分積分学に重点が置かれており、この解析幾何はいささか軽視されている傾向があるようである。したがって学生諸君は、解析幾何学本来の面白さに全然ふれることなく、またそこでとり扱われる放物線、楕円、双曲線などの性質をほとんど知らず、また立体に対して、ほとんど経験らしい経験をもたずに微分積分学へ進んでいくので、その理解に困難を感じ、その応用に際して力不足を嘆くことになってしまうようである。(矢野 [6]「まえがき」)

現在では、線型代数と微積分に重点が置かれていることも大学の講義で解析幾何が重視されないのも空気のようにあたりまえのこととして、このような疑問さえ浮かんでこないかもしれない。しかし教員養成系の数学カリキュラムの中においては、高校で学ぶ数学との接続を切らないという観点や、抽象的な扱いに入る前に具体的な対象を扱うという観点から、解析幾何を省かずに取り上げるものの意味は大きいと考える。

3.6.3 いろいろな変換

変換に対して不変な性質を調べる、という観点を導入することは、ともすれば個別の工夫（ひらめき？）の寄せ集めと受け取られかねない幾何（初等幾何を「補助線一本ひけば…」のようなイメージで語る人は多い）に対して統一的な高い視点を与える点において意義がある。代数分野の群論の基礎の項でも触れたように、図形の対称性に注目することは初等・中等教育の各所で行われ、その背景に変換群という見方を持つておくことは教師にとっても意味がある。

3.6.4 距離と位相

点列の収束についての基本的な性質や境界点・内点などの概念、コンパクト性にかかわる事柄は、高校での素朴な扱いで生徒が混乱したり疑問を感じたときに教師が自信を持って質問に答えるためにも理解しておいたほうがよい。実際、区間の端で起こるさまざまな事柄にたいして理解に困難を感じる高校生は多い。そのような観点からも、微積分や、曲面などの幾何学的対象を扱うための土台としても、ユークリッド空間の距離と位相は欠かせないだろう。

3.6.5 位相幾何・微分幾何

位相幾何と微分幾何はまとめて取り上げる。その理由は、数学上の方法論としての分類に基づいて「位相幾何学」と「微分幾何学」とを学ぶ、と捉えるよりも、数学的对象としての「曲面」について必要な方法を準備しながら学ぶ、と捉える方が適切であるように思うからである。「いろいろな曲線」は高校でもある程度扱う内容である。前節（ア-c）の観点からも、数学の教師を目指す学生に対して、せめて曲面に関して一定の理解を求めるのは妥当なことだと考える。

次の一文は、小林昭七「曲線と曲面の微分幾何」の「まえがき」からの引用である。

最近では、多様体の講義はあるが初等微分幾何を教えない大学も多く、不幸にして、そのような教育を受けた人たちは、せめて本書程度の曲線、曲面論を自習していただきたいと思う。（小林 [7]「まえがき」）

先を急がねばならない理学部数学科の学生には「せめて本書程度の曲線、曲面論」の「自習」を求めているが、教員養成を目的とするならば急がずともある程度の曲線・曲面論を講義で取り上げればよい。曲面に焦点を当てて、「木を見て森をみない」ことにならないよう、一つの見取り図を示すことを意図した書物として長野正「曲面の数学」([8])がある。そこでの内容の取り上げ方は、第1章序論で2次曲面、アフィン変換、2次形式を取り上げ、分類について述べたのち、2章以降微分幾何・位相幾何を含むさまざまな側面から曲面の数学を展開している。その序文には、「本書の上手な利用法は細部にこだわらずに内容の本質と各節、各章の中の事物の関連、また章を越える大きな関連をとらえるように読むこと」とあり、さらに「反対に1章を2次曲面の分類を知っているという理由でとばせば本書の意図にそぐわない」とある。扱う内容の深さに違いはあっても、初等幾何・解析幾何・変換・位相幾何・微分幾何と取り上げる「標準的モデル（骨子）」にも、同様の考え方が通用するように思う。

3.6.6 組合せ幾何

具体的内容として、「標準的モデル（骨子）」にはグラフ理論と多面体の幾何が挙げられている。この分野は、幾何学的対象を扱いながら、その対象から頂点の個数、辺の本数などの数を取り出しやすい。滑らかな曲面から代数的不変量を取り出すことは困難でも、多面体の頂点や辺や面を数えることは小学生にもできる、という意味で、生徒が対象を触りながらあれこれと発見的に調べるという数学的活動を行う教材として利用しやすい面をも

つ。組合せ幾何の初歩的な事柄に馴染んでおくことは、教師を目指す学生にとって役立つものと思う。

3.7 解析学

3.7.1 複素関数論・微分方程式・フーリエ解析

三つまとめて取り上げる。数学科を除く理工学系に進んだ学生が線型代数・微積分の次に学ぶ数学の代表がこれらではないだろうか。前節（イ）の観点からも、これらの分野にある程度は触れておきたい。

複素関数論についていえば、 $f(z) = u + iv$ ($z = x + iy$) を実 2 変数関数 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と見たときに全微分可能であり、かつ、そのヤコビ行列が複素数型であることがすなわち複素微分可能であることに他ならないという事実などは、線型代数、2 変数微積分と複素関数の微分法との関連がはっきりと目に見えるところである。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

このように、各分野のつながりを意識したとき何かがわかったという感覚が生まれるものであるし、数学教師を目指す学生にとってそのような経験を積むことは、望ましい数学観を育むことにもつながると考える。これは前節（ウ）の観点にもつながるだろう。やがてこういう世界が広がるという認識があれば、高校の数学 III で複素数平面を教える際の迫力も違ってくるのではないだろうか。単に高校で扱う内容だけを少し詳しく知ればよいというのではなく、(ほんの少し) 広く知ることの効用はこういう点にあると思う。

微分方程式については、高校において力学と切り離されて教えられている微分積分に対して、そのつながりを取り戻すという役割を期待したい。力学と微積分を切り離して教えることに対する疑問は繰り返し様々な著者により述べられているが（古くは田村二郎 [9]、新しくは山本義隆 [10]、ほかいくらでも）、たとえ学習指導要領の中でそのような扱いがなされていなくても、導入時やちょっとした合間の雑談にでも力学との関連に触れるだけで、何かを感じる生徒は存在する。その意味でも、高校の数学教師を目指す学生にはぜひ学んでほしい。

高校では、三角比は図形の計量の問題に使われること、三角関数はそれを含む方程式・不等式を解くことと微積分の対象となる関数として現れること、二次曲線の媒介変数表示に使われること程度にとどまり、どうしても三角関数を使わなければならないという動機づけに乏しい嫌いがある。フーリエ解析を学ぶことにより、高校で学ぶ三角関数や指数関数の活躍の場を知ることができる。高校で教える内容を超えた広がりがある程度理解しておくという（ア-c）の観点からも、意味があるものと思う。

3.8 確率論と統計学

確率論と統計学とをまとめて扱う。おそらく統計学は、理工学系に限らず人文・社会諸方面に進んだ高校生が将来使う可能性がもっとも高い分野の一つだろう。にもかかわらず、

前学習指導要領では中学校において統計につながる内容がすっかり消えていた。高校でも事実上選択されない選択分野として置かれていたに過ぎない。現学習指導要領では、中学校においてもある程度復活しており、また高校では数学Ⅰの中で共通に学ぶ単元として「データの分析」が置かれている。

一方、それを教える高校の教員は、統計を学んだ経験にも乏しく、教えた経験はほとんど持たないことが多い。このギャップを縮小するためにも、教員養成のためのカリキュラムが確率論・統計学を含むのは自然な事である。その際、数学の教師を養成するという立場からは、理論的な背景を押さえたものとするのが大切である。単に操作手順やソフトウェアの使用法を身に着けるというのではなく、それぞれの手法が一定の妥当性をもつという理由を理解できるような内容であることが望ましい。

「標準的モデル（骨子）」にある、確率論の基本的内容を含みつつ中心極限定理まで扱う事、そこで学んだ確率論の裏付けを持ちつつ、統計については推定・検定までを学ぶという内容は、極めて自然かつ妥当なものであると考える。

4 おわりに

意見をまとめる過程を通して、素朴で具体的な対象（有理整数，曲面，具体的な関数，大量のデータ，等）を調べるという動機とのつながりを切らないようにしつつ抽象的な扱いとの橋渡しをする部分を，省略せずにしっかりと扱うことが重要であるという考えがまとまってきた。また，中等教育の教師にはその性格上，たとえ奥行きは限られていても一定の間口の広さが求められる。そのような意味でも，標準的モデル（骨子）の内容は教員養成のための教科専門科目の内容として妥当であると考ええる。

共同研究集会の当日にお話しした，SSHの取り組みとして行った数学課題研究について本稿では触れることができなかった。ここでは，生徒作品をひとつ紹介して，稿を終えることとする。高校2年生の夏に行ったサマー・スクールでの「数学プレゼンテーション」に向けて，トーラスの媒介変数表示を変形してミスター・ドーナツの人気商品「ボンデリング」を作ろうと試行錯誤した結果，生徒が作り上げたものである。媒介変数表示式は次式で与えられる。[] はガウス記号である。

$$\begin{aligned} x &= \left(1 + \sqrt{-\left(t - \frac{\pi}{4} \left[\frac{4t}{\pi} + \frac{1}{2} \right]\right)^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 \cos s} \right) \cos t \\ y &= \left(1 + \sqrt{-\left(t - \frac{\pi}{4} \left[\frac{4t}{\pi} + \frac{1}{2} \right]\right)^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 \cos s} \right) \sin t \\ z &= \sqrt{-\left(t - \frac{\pi}{4} \left[\frac{4t}{\pi} + \frac{1}{2} \right]\right)^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)^2} \sin s \end{aligned}$$

表示には「3D-XplorMath」を用いた。

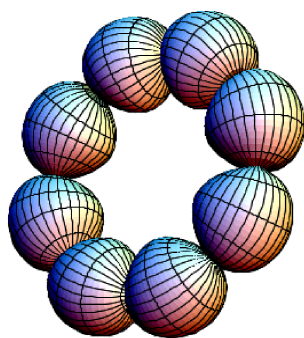


図 1: 生徒が作ったボンデリング (長宮大輝, 勝本匡博, 小西保彰, 山本文迅)

参考文献

- [1] 丹羽雅彦, 松岡隆「教員養成学部の『数学』教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想」, 数理解析研究所講究録 1657, pp.74-82, 2009.
- [2] 丹羽雅彦, 松岡隆, 川崎謙一郎, 大竹博巳, 伊藤仁一「『教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査』の結果とその考察」, 数理解析研究所講究録 1711, pp.89-105, 2010.
- [3] 丹羽雅彦, 松岡隆, 川崎謙一郎, 大竹博巳, 伊藤仁一「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」, 数理解析研究所講究録 1711, pp.106-129, 2010.
- [4] 丹羽雅彦「教員養成系の数学専門科目・代数分野—新しい標準モデル案の模索—」, RIMS 共同研究「数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究 (2012.12.17-20)」配布資料, 2012.
- [5] アンドレ・ヴェイユ (訳者 片山孝次, 田中茂, 丹羽敏雄, 長岡一昭)『初学者のための整数論』, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2010.
- [6] 矢野健太郎『解析幾何 図形と方程式』, 数学セミナーリーディングス, 日本評論社, 1975.
- [7] 小林昭七『曲線と曲面の微分幾何』, 基礎数学選書 17, 裳華房, 1977.
- [8] 長野正『曲面の数学』, 培風館, 1968.
- [9] 田村二郎『微積分読本』, 科学ライブラリー, 岩波書店, 1975.
- [10] 山本義隆『力学と微分方程式』, 数学書房選書 1, 数学書房, 2008.