

Burnside Rings and Dual Lattice Burnside Rings of Finite Groups

山口大学教育 飯寄信保 (Nobuo Iiyori)

以下において、数理解析研究所での講演した内容に加え、その背景等も多少詳しく書いた。証明等はまったく記載していないが、記載してある命題の証明は、最終の章を除きごく簡単な大学院代数学の演習問題程度である。また、講演時に 2,3 年前の仕事（考察？）であったので講演者自体忘れていた点があり不十分に述べたところもあったのでその点も修正・補充して記した。

1 誘導指標

有限群 G の部分群 H, K （但し、 $H \subseteq K$ とする）において、 H の指標 χ から K の指標を作るもっとも一般的な方法は、 χ の誘導指標 χ^K を作ることであろう：

$$\chi^K(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{k \in K} (\chi^k)^0(g).$$

上の式において、 χ^k は、 $\chi^k(g) = \chi(kgk^{-1})$ で与えられる、 H^k 上の関数であり、これは H^k 上の指標である。また、記号「 0 」は、 G の部分群 L とその部分集合 X で定義された関数 φ を $L-X$ 上では、常に 0 の値をとる関数として L 上に拡張したものを表す。上の式では、次のような関数となる：

$$(\chi^k)^0(g) = \begin{cases} \chi(g) & (g^k \in H^k \text{ の場合}) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

この式より、誘導指標 χ^K は、 H の共役部分群 H^k 上の指標 χ^k 達を考え、これらの指標を足し合わせることで L 全体に張り合わせた得られた指標と考えることができる。しばしば、 $(\chi^k)^0$ 達の台集合（本質的には「定義域」）に重複が生じるが、それは張り合わせのときの糊代のようなものと考えられる。この糊代についての情報はマカイによる有名な考察から得られる。

H が G において、TI 集合である場合を考えてみる。 H の指標を $N_G(H)$ 上の関数と見るために「 0 」を考え、 $\mathbb{Z}[\text{Irr}(H)^0] \cap \mathbb{Z}[\text{Irr}(N_G(H))]$ なる $\mathbb{Z}[\text{Irr}(N_G(H))]$ のイデアルを考える。 $s : \mathbb{Z}[\text{Irr}(N_G(H))] \rightarrow \mathbb{C}$ を $\text{Irr}(N_G(H))$ の元に単位元を代入する写像とする。このとき明らかに $s^{-1}(0)$ は $\mathbb{Z}[\text{Irr}(N_G(H))]$ のイデアルであり、

$$I = s^{-1}(0) \cap \mathbb{Z}[\text{Irr}(H)^0] \cap \mathbb{Z}[\text{Irr}(N_G(H))]$$

もイデアルになる。ここで $N_G(H)$ から G への誘導指標を考えてみる。写像 $^G : \mathbb{Z}[\text{Irr}(N_G(H))] \rightarrow \mathbb{Z}[\text{Irr}(G)]$ を $N_G(H)$ の一般指標に対し、その G への誘導指標を対応させる写像とする。このとき、よく知られているように写像「 G 」は、加群射である。混同が生じないと思われるので写像「 G 」の I への制限も同じ「 G 」で表すことにすれば、当然「 G 」は I から $\mathbb{Z}[\text{Irr}(G)]$ への加群射である。さらに H が TI 集合であることから、次の二つの現象が観察することができる：

- (1) 任意の $\theta \in \mathbb{Z}[\text{Irr}(H)^0] \cap \mathbb{Z}[\text{Irr}(N_G(H))]$ と $\varphi \in I$ に対し、内積に関する等式 $(\phi, \theta)_{N_G(H)} = (\phi^G, \theta^G)_G$ が成り立つ。
- (2) G は積について準同形射である。

(1) は、 H の一般指標 θ と φ を張り合わせるに際し、 H が TI 集合であることより、単位元以外の部分は重なりなく張り合わせていることと $\varphi \in I$ であることより、重なりが生じる単位元のところでは、 $\varphi(1)\overline{\theta(1)} = 0$ となることから明らかである。更に、 I の元を誘導した場合に張り合わせに重なりが生じないことより、「もし $g \in H^h$ であるならば、 $\chi^G(g) = \chi^h(g)$ 」となるので、(2) は直ちに従う。

以上のことは、アイサークスや鈴木通夫先生の本などに丁寧簡潔に書かれている。この小論では、以上に述べた視点をより推し進めて考えたいと思う。そのために以下、 H の指標 χ と χ^0 を同一視することにし（即ち、 $\chi \in \text{Map}(G, F)$ のように考える。但し、 F は適当な体である。）、通常の H の一般指標等は、その定義域を明示する形で (χ, H) と書くことにする。 $H, K \leq G$, $(\chi, H) \in \mathbf{Z}[\text{Irr}(H)]$, $(\theta, K) \in \mathbf{Z}[\text{Irr}(K)]$ $n, m \in \mathbf{Z}$ に対し、

$$n(\chi, H) + m(\theta, K) = \begin{cases} (n\chi + m\theta, H) & (H = K \text{ の場合}) \\ (n\chi, H) + (m\theta, K) & (H \neq K \text{ の場合}) \end{cases} \quad \text{及び } (\chi, H) \cdot (\theta, K) = (\chi\theta, H \cap K)$$

とおけば、 $R(G) = \oplus_{H \leq G} \mathbf{Z}[\text{Irr}(H)]$ は可換環になる。（以上において $\chi^0 = \chi = (\chi, H)^0$ となっていることに注意してもらいたい。）ここで明らかに次のことが成り立つ。

命題 $R(G)$ は G の部分群束の半群の半群環と同形な部分環 $A(G) = \text{span}_{\mathbf{Z}}\{(1_H, H) | H \leq G\}$ を含む。よって、群 G のバーンサイド環 $B(G)$ と同形な部分環 $\text{span}_{\mathbf{Z}}\{\frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} (1_{H^g}, H^g) | H \leq G\}$ を含む。

上の命題の、 $R(G)$ の群 G のバーンサイド環 $B(G)$ と同形な部分環も $B(G)$ と書くことにする。また、その生成元 $\frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} (1_{H^g}, H^g)$ の一般形 $\frac{1}{|H \cap K|} \sum_{g \in K} (\chi^g, H^g)$ を $[\chi, H]_K$ (但し、 $H, K \leq G$) で表すことにする。このバーンサイド環の埋め込みから推測できるように G の作用はこの考察において重要であり、以上用意した記号と既存のものとの整合性から、 $g \in G$ の $R(G)$ 上への作用を $(\chi, H)^g = (\chi^g, H^g)$ で定義しなければならない。このようにしてできた、 G -代数 $R(G)$ および、その「双対」の考察が、今回の講演の主たる目的である。

話は、横道に反れるがこの G -代数 $R(G)$ の母体が $\text{Map}(G, F)$ (つまり、 $\oplus_{H \leq G} \text{Map}(H, F)$ の部分代数である) であることより G -代数 $R(G)$ には、重要な写像を2つほど持っている。一つ目の写像 $I_{H,K}$ は、次のように定義できる： $H, K \leq G$ に対し、 $I_{H,K}(\chi, H) = [\chi, H]_K(1_K, K)$ とおく。明らかに、 $H \leq K$ であるならば、 $I_{H,K}(\chi, H) = (\chi, H)^K$ (χ の K への誘導指標) である。

もうひとつの重要な写像は、いわゆる「内積」であって、 $R(G)$ の埋め込む $\oplus_{H \leq G} \text{Map}(H, F)$ の体 F の位数が2の約数であるような自己同形 τ にたいし定義し、それは $H, K, L \leq G$ に対し、

$$\int_K (\chi, H) dg = \frac{1}{|K \cap H|} \sum_{g \in K} \chi(g)$$

とおくとき、 $((\chi, H), (\theta, K))_L = \int_L (\chi, H) \cdot (\theta^\tau, K) dg$ で定義する（この「 $\int$ 」の記号の筆者のイメージを表すために用いている）。

さて、 $R(G)$ の部分環 $A(G) = \text{span}_{\mathbf{Z}}\{(1_H, H) | H \leq G\}$ の意味を考えてこのセクションを終えることにする。 $H, K \leq G$, $(\chi, H) \in \mathbf{Z}[\text{Irr}(H)]$ に対し、 $(\chi, H)(1_K, K) = (\chi_{H \cap K}, H \cap K)$ であるので、 $(1_K, K)$ を掛けるという操作（これを $\mu(1_K, K)$ と書く）は、指標を制限する操作と同等であることがわかる。つまり、 $\mu(1_K, K)$ の作用を $V = \mathbf{Z}[\text{Irr}(H)] \oplus \mathbf{Z}[\text{Irr}(H \cap K)]$ に制限すると $\mu(1_K, K)|_V$ は V の自己準同形になっている。ここで、 V の基を $\text{Irr}(H) \cap \text{Irr}(H \cap K)$ をとり、 $\mu(1_K, K)|_V$ のトランスポーズを ${}^t\mu(1_K, K)|_V$ とすれば、 $B = \mu(1_K, K)|_V + {}^t\mu(1_K, K)|_V - 2 \cdot \text{id}_{\mathbf{Z}[\text{Irr}(H \cap K)]}$ は、 H と $H \cap K$ の間のブラッテリ図形のインデックス行列になっていることがわかる。このようなセッティングがあれば、遠い昔、千吉良直樹氏と計算した有限群のブラッテリ図形の基本的な有限群のブラッテリ図形による特徴づけの結果 [C-I] よりいろいろとわかってくる。例えば、 H と $H \cap K$ の指標表の各縦列（ここでは、アイサークスの指標表の定義を用いて

いる)は、適当なペアリングと定数倍をすれば、 B の固有ベクトルになっている。よって、 B たちをうまく見つけてやり固有値・固有ベクトルを計算してやれば、 G の指標の候補が見つかることになる。ところが、話はそんなにうまくいかないもので、行列 B より得られる固有ベクトルは、 B が 2 部グラフのインシデンス行列であることから固有値は実数値となり、固有ベクトルのエントリーに複素数値などは、小細工をしなければ出てこない(但し、ここでは、指標表の直交関係などを用いてゴリゴリ計算することは考えていない)。そこで重要になってくるのは、千吉良氏と計算した簡単な構造を持つフロベニウス群のブラッテリ図形による特徴づけである。具体的に述べると、 $7:3$ や $16:5$ などの群は、 $(7:3, 3)$ 及び $(16:5, 5)$ などのブラッテリ図形より一意に決まってしまうという事実である。この事実を用いてやると、このような構造のフロベニウス群 H 等を含む単純群 G の場合、 H の指標表は具体的にかけるので、位数の小さい部分群の指標表がある程度わかってしまうことになる。 G が (小さい) 単純群の場合、 G の指標表を見出すときに面倒を起こす部分は、これらの部分群とのブラッテリ図形により決定することができることが多く、したがって $(R(G), A(G))$ の埋め込まれ方により指標表が決まってしまうことが、具体例のレベルで観察できる。一般に単純群 G の $(R(G), A(G))$ より、 G の指標表が決まってしまうだろうと思われる。また、 $(R(G), A(G))$ より G の指標表が決まってしまうような群 G の特徴付けも興味ある問題だと思われる。

最後に上の観察からバーンサイド環 $B(G)$ の元は、「ブラッテリ図形の積分値」であるといえるのではないかと考えられる。

2 有限群の作用する可換モノイド

この章では、前の章で見てきたもの(特に、 $A(G), B(G)$ にあたるもの)を一般化することを考えたい。以下、 G を有限群、 O を次の条件を満たす可換モノイドとする：

- (O1) O の単位元は、 X 、
- (O2) 任意の $a \in O$ は、 $a^2 = a$ (即ち、べき等元)、
- (O3) O は零元 1 を持つ (即ち、任意の $a \in O$ に対して、 $a \cdot 1 = 1$)、
- (O4) O は G -モノイドである。

このモノイド O の半群環 $\mathbb{Z}[O]$ は、 O が G -モノイドであることにより自然に G の作用を持っている。

- (O5) つぎの性質をもつ重み関数 (ここでは p -関数と呼ぶことにする) がある：

O 上の関数 $w: O \rightarrow \mathbb{Z}$ は、 $\{w(x) \sum_{t \in G/G_x} x^t \mid x \in O / \sim_G\}$ は、 $\mathbb{Z}[O]$ の部分環である (ここで、 $\sim_G$ は、 G の O 上への作用による自然な同値関係である)。

以上を満たす三つ組 (O, G, w) を O -集合三つ組と呼ぶことにする。また、(5) で定義される $\mathbb{Z}[O]$ の部分環 $\{w(x) \sum_{t \in G/G_x} x^t \mid x \in O / \sim_G\}$ を $B(O, G, w)$ で表し、これを (O, G, w) のバーンサイド環と呼ぶことにする。

上の定義において、任意の $a \in O$ に対して、 $1 (\in \mathbb{Z})$ を対応させることによって得られる $\mathbb{Z}[O]$ から $\mathbb{Z}$ への加群準同形 ϖ は環準同形であることは、次の事実から明らかである：任意の $z \in \mathbb{Z}[O]$ に対して $z \cdot 1 = \varpi(z)1$ が成り立つ。この写像の $B(O, G, w)$ への制限も混同が生じない限り ϖ で表すことにする。

また、もし O -集合三つ組 (O, G, w) が次の条件

- (O6) 各 $x \in O$ が $w(x) \mid |G_x|$ を満たす

を満たすならば、 $\Phi_G: \mathbb{Z}[O] \rightarrow B(O, G, w)$ ($x \mapsto \sum_{g \in G} x^g$) は加群準同形になっている。この準同形は、群から由来する O -集合三つ組を考察をする場合重要になる。この小論では、(O6) を満たす O -集合三つ組のみを考えることにする。(以前の文章等では、この条件も含めたものを O -集合三つ組として定義していた。この条件が真に必要なかどうかはもう少し考察が必要だと思われるので別枠扱いとした。)

(O, G, w) を O -集合三つ組とする。各 $x \in O$ に対して、環 R_x が対応しているとする。任意の $x, y \in O$ に対し、 $\oplus_{z \in O} R_z$ の (環) 自己準同形で $\rho_y|_{R_x}: R_x \rightarrow R_{xy}$ かつ $\rho_y(1_{R_x}) = 1_{R_{xy}}$ を満たすものが対応し、 $\rho: O \rightarrow \text{End}(\oplus_{z \in O} R_z)$ は半群としての中への同形であるとする。加法群 $\oplus_{z \in O} R_z$ 上に任意の $x, y \in O$ について $a \in R_x, b \in R_y$ の積を $a \cdot b = \rho_{xy}(a)\rho_{yx}(b)$ (R_{xy} の積) と定義しなおしてやると新たな環 $R(O)$ を

得ることができる。このような4組 (O, G, w, ρ) は、Q-集合4組と名前をつけて前の章の $R(G)$ の一般化と捉えることが可能である。しかし、この小論においては、O-集合三つ組のレベルまでの考察にとどめることにする。

さて、 (O, G, w) を O-集合三つ組とする。このとき、 $x, y \in O$ に対して $xy = x$ を満たすとき、 $x \leq y$ として順序を O 上に入れることが可能である。半順序集合で適当な条件を満たすものが O-集合三つ組となることが直ちにわかる。このような考察から、有限群の部分群束 L 、自明な部分群及び冪零（可解、可換、巡回等）部分群からなる L の部分半束等が O-集合三つ組になることが直ちにわかる。また、有限群の適当な部分群たちの剰余類全体のなす半束も O-集合三つ組になることが観察できる。これらについてはもう既に報告済みであるし、証明・検証等も容易である。

今回は、 $x, y \in O$ に対して $xy = x$ を満たすとき、 $x \leq y$ として順序を O 上に入れたところを $x \geq y$ として順序を入れた場合を考えたい。ここでは、有限群の部分群束においてのみ以下考察し、次の章においてその双対束から得られる O-集合三つ組について考察することにする。

群についての性質 Ξ に対して群 G の Ξ -部分群全体を $\text{Sub}_\Xi(G)$ とおく。群についての性質 Ξ は、 G -共役について閉じているとする。すなわち、 $\text{Sub}_\Xi(G)$ が G -集合であると仮定する。任意の Ξ -部分群の共通部分がまた Ξ -部分群であると仮定する。 $\text{Sub}_\Xi(G)$ 上の2項演算を共通部分をとる操作 $\cap$ で定義する。このとき、 p -写像 w を $x \in \text{Sub}_\Xi(G)$ に対して

$$w(x) = (N_G(x) : x)$$

と定義することができ、このようにしてできた O-集合三つ組 $(\text{Sub}_\Xi(G), \cap, w)$ を標準的なものと考え、 G の Ξ -O-集合三つ組と呼ぶことにする。また、この三つ組の半群環を $A_\Xi(G)$ 、バーンサイド環を $B_\Xi(G)$ と書くことにする。以下の章で、 G の半群環、バーンサイド環等の用語はこれらをさすものとする。

3 双対半束バーンサイド環

概要

定理（ブラウアー） G を有限群、 $A, B \leq G$ とする。もし $(\chi, 1_G)_G = 0$ を満たす通常指標 χ で

$$(\chi_A, 1_A)_A + (\chi_B, 1_B)_B > (\chi_{A \cap B}, 1_{A \cap B})_{A \cap B}$$

を満たすものがあれば、 $\langle A, B \rangle < G$ である。

この命題自体結果を知ってしまえばほとんど明らかなことであろうし、事実、その証明は線形代数の次元定理を1回用いただけでかたがついてしまうものである。しかし、この定理は、部分群の共通部分をとる操作といわば正反対の生成させる操作の間に関係があること（またそれを人間が表現できること）を示唆している。以下紹介するのは、この定理をより深く掘り下げ、群上の方程式、素数グラフ等に応用するための準備である。

有限群 G に対し、O-集合三つ組 (O, G, w) を O は G の部分群からなる G -集合（作用は共役を考える）、 O は $1, G$ を含み「 $\cap$ 」について G を単位元、 1 を零元とする半群、各 $x \in O$ に対し $w(x) = (N_G(x) : x)$ となっているとする。この O-集合三つ組 (O, G, w) において、2元 $x, y \in O$ に対して xy は、半順序集合 O において、 x, y 双方より小さい元の中で最大のもの、当然 $x \cap y$ になっていることがわかる。この様なことを踏まえると、目的の O-集合三つ組において、 O の2元 $x, y \in O$ に対してその積 $x * y$ を x, y 双方より大きい元の中で最小のものとして考えるのが適当だと思われる。よって、 O 上の二項演算を

$$x * y = \begin{cases} \langle x, y \rangle & (\langle x, y \rangle \in O \text{ の場合}) \\ G & (\langle x, y \rangle \notin O \text{ の場合}) \end{cases}$$

で定義する。このようにして得られた半群 $(O, *)$ は G の元による共役をとることを考えることにより G -半群になっている。この G -半群 O を O-集合三つ組にする p -関数 w^* はいろいろと考えることができると思わ

れるが、筆者は一般的で自明でないものはまだひとつしか見つけることができていない。それは、 $X \in O$ に対し

$$w^*(X) = (N_G(X) : C_G(X))$$

と定義するものである。この w^* を以下 $(O, *)$ の p -関数として考察する。

この w^* が、常に $(O, *)$ の p -関数となるわけではない。以下特殊な場合、 $O = \text{Sub}_\Xi(G)$ (Ξ は群についての性質で、 Ξ -部分群全体及び自明な部分群たちのなす集合 $\text{Sub}_\Xi(G)$ は、共役・共通部分をとる操作について閉じてもの) の場合を考えることにする。各 $X \in \text{Sub}_\Xi(G)$ に対して $\delta(X) = \frac{1}{|N_G(X)|} \sum_{g \in G} X^g$ とおく。このとき、 $X, Y \in \text{Sub}_\Xi(G)$ に対し

$$w^*(X)\delta(X) * w^*(Y)\delta(Y) = \sum_{t \in C_G(X) \setminus G/C_G(Y)} \frac{|N_G(X^t * Y)|}{|C_G(\langle X^t, Y \rangle)|} \delta(X^t * Y)$$

となり、条件「 $(G : Z(G)) \mid \sum_{X^t * Y = G} \frac{|N_G(X^t * Y)|}{|C_G(\langle X^t, Y \rangle)|}$ 」が w^* が $(\text{Sub}_\Xi(G), *)$ の p -関数となるための必要十分条件になる。この条件を満たしてできた O -集合三つ組 $(\text{Sub}_\Xi(G), *, w^*)$ の半群環・バーンサイド環を $A_\Xi(G)^{\text{dual}}$, $B_\Xi(G)^{\text{dual}}$ で表すことにする。

しかし、このようにしてできた O -集合三つ組から得られるバーンサイド環等すべてがもとの G の部分群束からできた O -集合三つ組及び、そのバーンサイド環等と良い関係を「自然に」見出せるわけではない。もともと積「 $*$ 」は、考察している代数構造を建物にたとえると大きな巨人が三階建ての一軒家の二階・三階を無理やり取っ払って屋根をくつつけたようにしてできたものなので見栄えがいいとか、きちんとくつついている等の配慮が少々欠けているので、うまくいっているものを抽出してやる必要が出て来る。もともと、この観察をおこったのはこの章の冒頭に記したこと、群上の方程式の研究、素数グラフの研究及び、鈴木先生著作・研究の理解等を目的におこなっていたので、もとの部分群束から自然にできる O -集合三つ組及び、そのバーンサイド環等と比較する必要があった。このような状況から $\text{Sub}_\Xi(G)$ からの G の部分群束 $\text{Sub}(G)$ より作られる半群 $(\text{Sub}(G), \cap)$ への半群としての準同形（或いはそれに準じるもの、例えば、より一般的な O -集合三つ組の枠組みにおいては signalizer functor のようなもの）を考え、 w^* の式が得られたわけである。写像「 C_G 」は、そのもっとも一般的なものであった。以上の理由から、写像「 C_G 」を $A_\Xi(G)^{\text{dual}}$ へ拡張して $B_\Xi(G)^{\text{dual}}$ へ制限してできる写像 $C_G : B_\Xi(G)^{\text{dual}} \rightarrow A(G)$ が環としての準同形であるとき、 $B_\Xi(G)^{\text{dual}}$ を G の双対 Ξ -部分群束バーンサイド環と呼ぶことにする。（尚、ここの部分の説明を数理研での講演、またその直前の御茶ノ水女子大学のセミナーでの話において正しく述べていませんでした。申し訳ありません。）この定義により、 G の双対 Ξ -部分群束バーンサイド環が定義可能の条件は、「 $X, Y \in \text{Sub}_\Xi(G)$ に対し、 $\langle X, Y \rangle \neq X * Y$ ならば $C_G(\langle X, Y \rangle) = Z(G)$ 」になる。この条件は、多少わかりにくいので表現を変えると次のようになる。

命題 G の双対 Ξ -部分群束バーンサイド環が定義可能の条件は、「任意の $x \in G - Z(G)$ に対し、 $C_G(x)$ は最大の Ξ -部分群を持つ。」である。特に、任意の巡回部分群が Ξ -部分群であるならば、 G は、 $(C\Xi)$ -群である。（ G が $(C\Xi)$ -群とは、任意の単位元以外の元の中心化群が Ξ -群になっている群をいう。）

系 G の部分群全体 $\text{Sub}(G)$ 上に積「 $*$ 」を考えることにより G の双対 Ξ -部分群束バーンサイド環が定義可能である（但し、 Ξ は「部分群である」という条件）。これを単に双対部分群束バーンサイド環と呼び、 $B(G)^{\text{dual}}$ で表すことにする。

この双対部分群束バーンサイド環を含む、 O -集合三つ組 $(\text{Sub}(G), *, w^*)$ の半群環 $A(G)^{\text{dual}}$ はどのような意味を持っているか、最後に述べてこの章を終える。

G -加群 M に対し、 G との半直積を考えその部分群と同一視する。写像 $C_M : \text{Sub}(G)^{\text{dual}} \rightarrow \text{Sub}(M)$ を $H \mapsto C_M(H)$ で定めてやる（永尾・津島においては $\text{inv}_H(M)$ という記号が割り当てられている）。このよ

うに見れば、 $A(G)^{\text{dual}} = \mathbb{Z}[\text{Sub}(G)^{\text{dual}}]$ は、 M の G の部分群の固定化部分加群のなす束を制御する環と捉えることができ、 M の G の部分群の固定化部分加群のなす束の間を結ぶ「トレース写像のようなもの」が、実質的には双対部分群束バーンサイド環の C_M による像に対応していると考えることができる。(この考察からわかるように GM の部分群 G, M の構造は、適度に関係している。この考察を推し進めると群 G の部分群 H, K に対し写像 C_H, C_K をそれぞれの部分群束環を結ぶ写像と定義してやると集合 $C_H C_K(\text{Sub}(H))$ と $C_K C_H(\text{Sub}(K))$ 上に同形な O -集合三つ組の構造 (双対も入ると 2 通り) を入れることができる。このような視点から H と K の関係を調べてみたいのだが、 C_H, C_K が全単射になったからといって H が可換だからといって K が可換であるようなことはいえない。)

4 双対部分群束バーンサイド環による群の特徴付け

この章においては、双対冪零部分群束バーンサイド環による有限群の特徴づけについて解説したい。双対三-部分群束バーンサイド環を応用する上で基本的な事柄をある程度おさえておくほうが良いと考えられるので、基本的写像 $C_G : B_{\Xi}(G)^{\text{dual}} \rightarrow B(G)$ が単射な場合を考えたい。その中でもっとも基本的なものとして、像 $C_G : B(G)^{\text{dual}} \rightarrow B(G)$ が単射である場合が考えられるわけであるが、これは直ちに群束とその双対束が C_G により同形であることが導かれ群の束の理論により、素数 p, q によるフロベニウス群 $p : q$ という位数が素数二つの積になっているようなフロベニウス群で互いに位数が素であるようなもの $F_1, \dots, F_m$ の直積であることがわかる。

次に基本的になると思われるのは、我々は指標環の巨大なものを考察しているので Ξ が基本部分群である場合が考えることができる。ここでは、ギャップが多少あるが、基本部分群が冪零であることを踏まえ Ξ が冪零部分群である場合について考えることにする。このとき、前の章の命題により有限群 G は、 (CN) -群であることがわかる。 (CN) については、鈴木通夫先生による分類定理があり G の候補は次のどれかになることがわかる：

- (1) 冪零群、
- (2) フロベニウス補部分群は巡回群もしくは、巡回群と一般四元数群の直積であるようなフロベニウス群
- (3) 3 ステップ群
- (4) G は正規 2-部分群 N を持ち G/N は次のどれかとなる：

$$\begin{aligned} &PSL_2(p) \text{ (} p \text{ はフェルマー素数またはメルセンヌ素数),} \\ &PSL_2(2^n) \text{ (} n \geq 2), Sz(q), \\ &PSL_2(9), PSL_3(4), PSL_2(9).2_3. \end{aligned}$$

($PSL_2(9).2_3$ の群の表記についてはコンウェイ・ノートン著アトラスを参照のこと)。
これらの群について調べていけばよいのであるがそのときに役に立つのが次の命題である。

命題 G の一般フィッティング部分群を含む部分群のなす O -集合三つ組 (半群) を $\text{Sub}(G)_{F^*(G)}$ とすれば、

$$\text{Sub}(Z(F^*(G)))^{\text{dual}} \xrightarrow{C_G} \text{Sub}(G)_{F^*(G)} \simeq \text{Sub}(G/F^*(G)) \quad (X \mapsto C_G(X)/F^*(G)).$$

は、準同形である。

この命題によれば、一般フィッティング部分群の部分群束の構造から $G/F^*(G)$ のその構造の情報がわかることになる。例えば、 $\text{Sub}(Z(F^*(G)))^{\text{dual}}$ が連結であれば、 $G/F^*(G)$ も連結である。このようなことから計算をこなしてゆけば次の定理を得る。

定理 $C_G : B_{\Xi}(G)^{\text{dual}} \rightarrow B(G)$ が単射であれば G は単位群、位数が二つの素数の積であるようなフロベニウス群、或いは、 $PSL_2(7)$ に同形である。

(補足)

1. O -集合三つ組から得られるバーンサイド環については、概指標（指標みたいなもの）が定義できる。この指標表 T を群の部分群束について考えてやると、双対部分群束バーンサイド環 T' の指標表は T を転置させ適当に正規化をしてやれることにより得られる。このような事実からも双対束から得られるバーンサイド環等に用語「双対」を用いるのが適当だと考えられている。
2. 今回鈴木先生による (CN) 群の分類定理を用いてこの章の定理を示したが、有限単純群の分類定理を用いるとももちろん強力な結果を得ることが可能である。ここに述べた話についてのどのような範囲の問題に有限単純群の分類定理を用いて議論するかという問題は、難しいものを含んでおりまだしっかりとした考察をおこなっていない。筆者は、今後の重要な課題であると考えている。

参考文献

- [1] S. Abe, and N. Iiyori, *A generalization of prime graphs of finite groups*. *Hokkaido Math. J.* **29** (2000), 391–407.
- [2] J. H. Conway *et al*, *Atlas of Finite Groups*, Oxford Univ. Press(Cleandon), London/New York 1985.
- [3] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York/ Evanston/London 1968.
- [4] N. Iiyori, *A generalization of prime graphs of finite groups II*. 投稿中.
- [5] N. Iiyori, *Burnside rings and a characterization of $PSL_2(7)$* preprint.
- [6] S. E. Stonehewer and G. Zacher, , *Dualities of groups*, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **170** 1 (1996) 23–55.
- [7] M. Suzuki, *Finite groups with nilpotent centralizers*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99**(1961), 425–470.
- [8] M. Suzuki, *Group Theory I, II*. Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1982.