

非可換2次元トーラスの微分同相について

慶大理工 小高一則 (Kazunori Kodaka)

非可換2次元トーラス

$\mathbb{T}$ を1次元トーラスとし、 φ を、 $\varphi(z) = e^{2\pi i \theta} z$, $z \in \mathbb{T}$ により定まる $\mathbb{T}$ 上の微分同相とする。ここで θ は無理数とする。 $C(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の連続関数全体からつくられる可換 C^* 環とし、 σ を φ より定まる $C(\mathbb{T})$ 上の $\mathbb{Z}$ -action とする。

定義 $C(\mathbb{T})$ と σ よりつくられる crossed product $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}$ を非可換2次元トーラスあるいは無理数回転 C^* 環という。これを A_{θ} で表わす。

A_{θ} の2つの unitary element u, v を次のように定義する。

$$u(m, z) = \begin{cases} 1 & m=1 \\ 0 & m \neq 1 \end{cases}$$

$$v(m, z) = \begin{cases} z & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

このとき u, v の定義より

$$uv = e^{2\pi i \theta} vu$$

であり、 A_θ は、 u, v より生成される C^* -環と考えることができる。 A_θ の state τ を

$$\tau(x) = \int_{\mathbb{T}} x(0, z) dz \quad x \in \mathcal{L}'(\mathbb{Z}, C(\mathbb{T}))$$

と定める。簡単な計算により τ は A_θ の trace すなわち

$$\tau(xy) = \tau(yx) \quad x, y \in A_\theta$$

であることがわかる。

A_θ については、次のようなことが知られている。

- (1) A_θ は simple である。
- (2) τ は unique traceal state である。
- (3) $K_0(A_\theta) = \mathbb{Z}[\phi] \oplus \mathbb{Z}[\rho]$

ここで ρ は Rieffel projection (cf. [7]) であり

$$\tau(\rho) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta \cap [0, 1]$$

- (4) $K_1(A_\theta) = \mathbb{Z}[\phi] \oplus \mathbb{Z}[\psi]$

微分同相写像

A_θ の dense $*$ -部分環 A_θ° を

$$A_\theta^\circ = \left\{ \sum c_{mn} u^m v^n \mid \{c_{mn}\} \in S(\mathbb{Z}^2) \right\}$$

と定める。ここで $S(\mathbb{Z}^2)$ は $\mathbb{Z}^2$ 上の急減少関数全体とする。

δ_1, δ_2 を A_θ の canonical closed derivation で、

$$\delta_1(u) = 2\pi i u, \quad \delta_1(v) = 0$$

$$\delta_2(u) = 0, \quad \delta_2(v) = 2\pi i v$$

と定義されているとする。 δ_1 と δ_2 とは可換であり、1-parameter group の generator になっている。このとき、

$$A_\theta^\infty = \bigcap_{m, n \geq 0} D(\delta_1^m \circ \delta_2^n)$$

である。ここで $D(\delta_1^m \circ \delta_2^n)$ は任意の非負整数 m, n に対する作用素 $\delta_1^m \circ \delta_2^n$ の定義域とする。

定義 A_θ の自己同型 α が微分同相である。

$$\iff \alpha(A_\theta^\infty) = A_\theta^\infty$$

A_θ の微分同相には次のようなものがある。

例1. $w \in A_\theta^\infty$ を unitary element とする。任意の $\alpha \in A_\theta$ に対して、

$$\text{Ad}(w) : \alpha \longmapsto w \alpha w^*$$

と定める。

例2. $k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対して、 α_k を

$$\alpha_k(u) = u^a v^c, \quad \alpha_k(v) = u^b v^d$$

と定める。

例3. $\omega, t \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha_{(\omega, t)}$ を

$$\alpha_{(\omega, t)}(u) = e^{2\pi i \omega} u, \quad \alpha_{(\omega, t)}(v) = e^{2\pi i t} v$$

と定める。

A_θ の微分同相について Elliott が次のことを示した。

定理 (Elliott) θ を generic とする。このとき、 θ に対応する A_θ の任意の微分同相 α に対して、

$$\begin{aligned} &\exists w \in A_\theta^\infty \text{ unitary element} \quad \exists h \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ &\exists s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } \alpha = \text{Ad}(w) \circ \alpha_h \circ \alpha(s, t)$$

ここで θ が generic であるとは、次のことである。

定義 θ が generic である。

$$\Leftrightarrow \exists c > 0, \exists r > 1$$

$$\text{s.t. } |e^{2\pi i n \theta} - 1| \geq \frac{c}{nr}$$

$$\text{for } \forall n \in \mathbb{N},$$

すなわち、 θ は、Liouville number ではないということである。

主結果

θ が generic のとき、 A_θ の微分同相については、

Elliott の結果がある。そこで、この節では、 θ が non-generic のとき、 A_θ の微分同相について、1つの結果を示す。

A_θ の任意の自己同型 α に対して、 τ を τ より定まる crossed product $A_\theta \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ 上の tracial state とする。 τ のつくり方は、 τ のつくり方と同じであり、 τ が unique であること

より, $\tilde{\tau}$ が tracial state であることがわかる。また $\tilde{\tau}_*$ を $\tilde{\tau}$ より定まる $K_0(A \otimes X_\alpha \mathbb{Z})$ から $\mathbb{R}$ への homomorphism とする。

補題 1. α を $A \otimes$ の自己同型で, $\alpha = \text{Ad}(w) \circ \alpha_R \circ \alpha_{(s,t)}$ という形をしているとする。このとき,

$$\alpha \text{ が inner} \iff \alpha_* = \text{id on } K_1(A \otimes)$$

$$\text{かつ } \tilde{\tau}_*(K_0(A \otimes X_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

(証明) $\Rightarrow$ は明らか。そこで $\alpha_* = \text{id on } K_1(A \otimes)$ かつ

$\tilde{\tau}_*(K_0(A \otimes X_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ を仮定する。このとき, $\alpha_* = \text{id}$ on $K_1(A \otimes)$ より, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。よって $\alpha = \text{Ad}(w) \circ \alpha_{(s,t)}$ 。次に Powers [6, Theorem 3] より

$$\tilde{\tau}_*(K_0(A \otimes X_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}s + \mathbb{Z}t$$

に より 仮定より

$$\tilde{\tau}_*(K_0(A \otimes X_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

だから, $s, t \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ 。

従って $\exists k, l, m, n \in \mathbb{Z}$

$$s, t, \quad s = k + l\theta, \quad t = m + n\theta$$

よって $z = u^m v^{-l}$ とおくと

$$z u z^* = u^m v^{-l} u v^l u^{-m}$$

$$= e^{2\pi i l \theta} u$$

$$= e^{2\pi i s} u$$

$$\begin{aligned}
 zvz^* &= u^n v^{-l} v v^{-l} u^{-n} \\
 &= e^{2\pi i m \theta} v \\
 &= e^{2\pi i t} v
 \end{aligned}$$

ゆえに、 $\alpha(u, v) = \text{Ad}(z)$, すなわち、 α は inner である。

(証終)

可換 C^* -環 $C(\mathbb{T})$ と周期 1 の $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体が
つくる C^* -環とを同一視する。

補題 2. A_θ 上の自己同型 α を $\alpha(u) = f(v)u$, $\alpha(v) = v$
と定義する。ここで f は $C(\mathbb{T})$ の unitary element とする。このとき、
 $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ ならば、 α は A_θ の微分合同相である。

(証明) 任意の $x \in A_\theta^\infty$ に対して、 $\alpha(x) \in A_\theta^\infty$ を示せば十分である。

$x = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} C_{m, n} u^m v^n$ とする。 $\{C_{m, n}\} \in S(\mathbb{Z}^2)$ 。このとき

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &= \sum C_{m, n} \alpha(u)^m \alpha(v)^n \\
 &= \sum C_{m, n} f(v) f(e^{2\pi i \theta} v) \cdots f(e^{2\pi i (m-1)\theta} v) u^m v^n
 \end{aligned}$$

任意の自然数 k に対して、

$$y_k = \sum_{|m|, |n| \leq k} C_{m, n} f(v) f(e^{2\pi i \theta} v) \cdots f(e^{2\pi i (m-1)\theta} v) u^m v^n$$

と可く、

$$y_k \in D(\delta_j^*) \quad j=1, 2. \quad \text{また、} \|y_k - \alpha(x)\| \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty.$$

$\{C_{m, n}\} \in S(\mathbb{Z}^2)$, $|f(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ かつ $\{\delta_j^*(y_k)\}_{k=1}^\infty$ は

Cauchy sequence になる。従って δ_j^* が closed かつ

$$\alpha(x) \in D(\delta_j^*) \quad j=1, 2.$$

同様の議論により $\alpha(x) \in D(\delta_1^m \circ \delta_2^n) \quad \forall m, \forall n \in \mathbb{N}$.

ゆえに, $\alpha(x) \in A_0^\infty$ (証終)

補題3. α は補題2と同様の自己同型とする。このとき、次の2つの条件は同値。

(1) $\exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ s.t. α^m は inner。

(2) $\exists R \in C(\mathbb{T})$ unitary element, $\exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
s.t. $[f(t)]^m = R(t)R(t+\theta)^{-1}$

for $\forall t \in \mathbb{R}$ 。

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2) : α^m は inner だから、 $\alpha^m = \text{Ad}(w)$ 。

よって $w \in A_0$ は unitary element。一方 $\alpha(v) = v$ 。

よって、 $vw = wv$ 。

ゆえに、 $w \in C^*(v)$ 。

よって $C^*(v)$ は v により生成される C^* -環で $C(\mathbb{T})$ と同型。

従って $\exists R \in C(\mathbb{T})$ unitary element s.t. $w = R(v)$ 。

更に $\alpha(u) = f(v)^m u$ だから、

$$R(v)uR(v)^* = f(v)^m u.$$

ゆえに、 $R(v)R(e^{2\pi i\theta}v) = f(v)^m$

すなわち、 $[f(t)]^m = R(t)R(t+\theta)^{-1}$ for $\forall t \in \mathbb{R}$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1) : $w = R(v)$ とすると、簡単な計算により、

$$\alpha^m = \text{Ad}(w).$$

(証終)

補題4. A_θ の既同型 α を $\alpha(u) = e^{2\pi i g(v)} u$, $\alpha(v) = v$ とする。ここで g は $C(\mathbb{T})$ の selfadjoint element, すなわち $\mathbb{R}$ 上の周期1の実数値連続関数とする。もしも,
 $\int_0^1 g(t) dt = 0$ であり, かつ任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$$

を満足するような $\mathbb{R}$ 上の周期1の実数値連続関数が存在しないならば, 任意の $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して, α^m は inner でない。

(証明) 上の補題の対偶を示す。補題3により,

$$\exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \exists R \in C(\mathbb{T}) \text{ unitary element} \\ \text{s.t. } e^{2\pi i m g(t)} = R(t) R(t+\theta)^{-1}.$$

R は $C(\mathbb{T})$ の unitary element だから $|R(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ 。

このとき $\exists k \quad \mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 (周期1とは限らない)

$$\text{s.t. } R(t) = e^{2\pi i k(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

よって

$$e^{2\pi i m g(t)} = e^{2\pi i (k(t) - k(t+\theta))}$$

$$m g(t) = k(t) - k(t+\theta) + m k(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ここで m は $\mathbb{R}$ 上の整数値関数。 g, k が連続だから, m も連続。よって m はある整数とみなせる。次に,

$$R(t+1) = R(t) \text{ より, } k(t+1) - k(t) = \ell(t). \text{ ここで}$$

ℓ は整数値関数。 k は連続だから, ℓ も連続。

よって l もある整数とみなせる。 $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\tilde{k}(t) = k(t) - lt$$

とかくと、

$$\begin{aligned}\tilde{k}(t+1) &= k(t+1) - l(t+1) \\ &= k(t) - lt \\ &= \tilde{k}(t).\end{aligned}$$

よって、 $\tilde{k}$ は $\mathbb{R}$ 上の周期 1 の連続関数。

更に、 $\forall \theta \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t+\theta) &= k(t) - lt - (k(t+\theta) - l(t+\theta)) \\ &= k(t) - k(t+\theta) + l\theta \\ &= n f(t) - m + l\theta.\end{aligned}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \text{なので}$$

$$\int_0^1 (\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t+\theta)) dt + m - l\theta = 0.$$

$$\tilde{k} \text{ は周期 1 をもつので } \int_0^1 (\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t+\theta)) dt = 0.$$

ゆえに、

$$m - l\theta = 0$$

$$\text{—すなわち—} \quad l = m = 0.$$

従って、 k は周期 1 をもつ $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数であり、

$$n f(t) = f(t) - f(t+\theta) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

を満足する。

(証終)

正の整数よりなる数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ を

$$n_1 = 1, \quad n_{j+1} = 2^{n_j} + n_j + 1$$

と定める。作

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-n_j}$$

と定め、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{j} 2^{-n_j} \frac{1 - e^{2\pi i n_j \theta}}{1 - e^{2\pi i n_j \theta}} & n = n_j \\ \frac{1}{j} 2^{-n_j} \frac{1 - e^{-2\pi i n_j \theta}}{1 - e^{-2\pi i n_j \theta}} & n = -n_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定める。このとき 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|e^{2\pi i n_j \theta} - 1| < 2^{-n_j}$$

なので、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |n|^k |a_n| = 0$$

となる。従って

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$$

と表わす。

$$f \in C^\infty(\mathbb{T}) \text{ であり、 } \int_0^1 f(t) dt = a_0 = 0$$

となる。

補題5. θ, f は上で定めたものとする。このとき任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$$

を満足する周期1の実数値連続関数 k は存在しない。

(証明) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$$

を満足する周期1の実数値連続関数 k が存在するとする。

k の Fourier series を $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i n t}$ とすると、

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta) \text{ より } a_n = (1 - e^{2\pi i n \theta}) b_n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{従って, } b_n = \frac{a_n}{1 - e^{2\pi i n \theta}} \quad n \neq 0.$$

$$\text{よって } k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1 - e^{2\pi i n \theta}} e^{2\pi i n t}.$$

k は連続だから、 k の Fourier series は Cesàro summable。

従って、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1 - e^{2\pi i n \theta}}$ は Cesàro summable。

ところが $\{a_n\}$ の定義より $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1 - e^{2\pi i n \theta}}$ は Cesàro summable でないことがわかり、矛盾。(証終)

定理6. θ, f は上で定めたものとする。 A_θ の自己同型 α を $\alpha(u) = e^{2\pi i f(u)} u$, $\alpha(v) = v$ とおくと、 α は A_θ の微分同相であり、 $\forall w \in A_\theta^\circ$ unitary element, $\forall h \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\alpha \neq \text{Ad}(w) \circ \alpha_h \circ \alpha_{(s,t)}$$

(証明) 補題 2.5) α は微分同相。

$\exists w \in A_0^\infty$ unitary element, $\exists R \in SL(2, \mathbb{Z})$, $\exists s, t \in \mathbb{R}$
 s.t. $\alpha = \text{Ad}(w) \circ \alpha_R \circ \alpha_{(w, t)}$

と仮定する。このとき、 $\alpha_* = \text{Id}$ on $K_1(A_0)$ 従って、

$\text{Ker}(\text{id} - \alpha_*) = \mathbb{Z}[u] \oplus \mathbb{Z}[v]$ 。また、 $\alpha(u)u^* = e^{2\pi i g(v)}$ だから、
 1 と $e^{2\pi i g(v)}$ とを結ぶ連続微分可能な path ξ

$$\xi(r) = e^{2\pi i r g(v)} \quad r \in [0, 1]$$

と定めることができる。ゆえに、Primer [6; Theorem 3] により、

$$\alpha_*(K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta.$$

従って、補題 1.5) α は inner。一方 補題 4.5) α は inner ではない。これは矛盾。(証終)

References

- [1] E. G. Effros and F. Hahn, Locally compact transformation groups and C^* -algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 75 (1967)
- [2] G. A. Elliott, The diffeomorphism group of the irrational rotation C^* -algebra, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 8 (1986), 329-334
- [3] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transforms of the torus, Amer. J. Math., 83 (1961) 573-601.
- [4] R. Mañé, Ergodic Theory and Differentiable Dynamics,

Springer-Verlag, 1987.

[5] G. K. Pedersen, C^* -Algebras and their Automorphism Groups, Academic Press, 1979.

[6] H. V. Pimsner, Ranges of traces on K_0 of reduced crossed products by free groups, Springer Lecture Notes in Math. No. 1132 (1983), 374-408.

[7] M. A. Rieffel, C^* -algebras associated with irrational rotations, Pacific J. Math. 93 (1981), 415-429.