

"Fundamental Principle" と  $\mathcal{J}$ -zero value

京大 数理解  
京大 理

河合 隆裕  
(KAWAI Takahiro)  
竹井 義次  
(TAKEI Yoshitatsu)

§0. 無限階の (擬) 微分方程式系の構造に就ての理解は徐々に深まってきた (例えば [2] 及びそこに所載の文献参照) けれど ( $\mathcal{E}R$ -加群としてでなく)  $\mathcal{D}^\infty$ -加群として扱った時の困難と利点に就ての考察は未だ十分でないと思われ。具体的な解析は、まあ

(a) リーマン  $\theta$  に関連した物

(b) 定数係数の物

に就て試みるのが自然であろう。例えば [3] は (b) に関する物で、はじめに無限階の方程式系で余り特殊でない物を扱った、と言う点で面白いけれども不幸にして (a) の目的には役立たないようである。以下では、逆に (a) の研究に於て現われる系の具体的な構成を与えることを目標とする。即ち本稿では [1] の解析と、理論のその後の進展に応じてより具体的に遂行することを目標とする。以下言及の簡単の為、2次元のリーマン  $\theta$  を扱うこととする。また、その超局所性<sup>(1)</sup>に就ては、問題点を "(a)  $\cap$  (b)" ( "(a)  $\cup$  (b)" でなく ) に絞る<sup>(2)</sup> ことには触れない。即ち  $\mathcal{E}R$ -加群としてでなく  $\mathcal{D}^\infty$ -加群としての扱いに徹することとする。

$$\S 1. \quad \mathcal{J}(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \exp(\pi i \langle \tau m, m \rangle) \quad \left[ \begin{array}{l} \tau \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \\ \tau \neq \tau \end{array} \right]$$

$$\text{に對し } \vec{\mathcal{J}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{と定める時.}$$

$$(1.1) \begin{cases} (\exp P_j - 1) \vec{\vartheta} = 0, & j=1, 2 \\ (\exp Q_j - 1) \vec{\vartheta} = 0, & j=1, 2 \end{cases}$$

但し.  $\left[ \frac{\partial}{\partial \tau_{ij}} = \partial_{ij} \text{ と略記} \right]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ 2\pi i(1 + 2\tau_{11}\partial_{11} + \tau_{12}\partial_{12}) & 0 & 0 \\ 2\pi i(\tau_{11}\partial_{12} + 2\tau_{12}\partial_{22}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{22} \\ 2\pi i(2\tau_{12}\partial_{11} + \tau_{22}\partial_{12}) & 0 & 0 \\ 2\pi i(1 + \tau_{12}\partial_{12} + 2\tau_{22}\partial_{22}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4\pi i\partial_{11} & 0 & 0 \\ 2\pi i\partial_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\pi i\partial_{12} & 0 & 0 \\ 4\pi i\partial_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

なる関係式が成立することは容易に判る。(例えは [1])

また [1] に於て強調され 2 つのように,  $\{P_j, Q_k\}$   
 $1 \leq j, k \leq 2$

はそのまゝでは (一変数の場合から "simple-minded"  
 予想される) 正準交換関係を満たさない。事実,

$D_{11} = 4\pi i \partial_{11}$ ,  $D_{12} = 2\pi i \partial_{12}$ ,  $D_{22} = 4\pi i \partial_{22}$   
と記すこととして  $\vec{J}(\tau)$  は、更に

$$(1.2) \quad R_l \vec{J} = 0 \quad l=0, 1, 2,$$

但し

$$R_0 \stackrel{\text{def}}{=} [Q_2, Q_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{12} & -D_{11} \\ & D_{22} & -D_{12} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \stackrel{\text{def}}{=} [Q_1, R_0] = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & -D_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{12}^2 - D_{11} D_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \stackrel{\text{def}}{=} [Q_2, R_0] = \begin{bmatrix} 0 & D_{22} & -D_{12} \\ D_{11} D_{22} - D_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なる関係式をも亦満足する。<sup>[註]</sup> 本稿は §0 (b) を  
主たる問題意識とするので  $P_j$  と  $R_l$  の関係に就ては  
以下では触れないこととする。これに就ては [1] を参照され度い。

§2. 前節で導入した作用素を用いて 解析的に扱い易い

[註] 文献 [1] に用いられている  $R_j$  の  $2\pi i$  倍となっているので注意。

しかも [3] では cover されている 方程式系の例を与えよう。また  
厳密な証明はしていないが [3] の方法により 以下の方程式系に  
対し "fundamental principle" が成立することを示すことは  
可能であろうと思っている。

さて,  $\exp Q_j - 1$  の形の  $Q_j$  は  $\det [\exp Q_j - 1] \equiv 0$   
となり, 扱いにくいので

$$(2.1) \quad F_1 = (\exp Q_1 - 1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta(D_{11}) & 0 \end{bmatrix} R_0,$$

$$(2.2) \quad F_2 = (\exp Q_2 - 1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta(D_{22}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_0,$$

$$\text{但し} \quad \zeta(\xi) = (\cosh \sqrt{\xi} - 1)/\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{k-1}}{(2k)!},$$

と云う 2つの作用素を 導入する。尚,

$$(2.3) \quad \begin{cases} \tilde{\zeta}(\xi) = \xi \zeta(\xi), \\ \tilde{\gamma}(\xi) = (\sinh \sqrt{\xi})/\sqrt{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{k-1}}{(2k-1)!} \end{cases}$$

と定めれば, 実は

$$(2.4) \quad \begin{cases} F_1 = \tilde{\zeta}(D_{11}) + \tilde{\gamma}(D_{11}) Q_1 \\ F_2 = \tilde{\zeta}(D_{22}) + \tilde{\gamma}(D_{22}) Q_2 \end{cases}$$

とまとめることが出来る。より具体的にば、例えば

$$F_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(D_{11}) & \tilde{\alpha}(D_{11}) & 0 \\ D_{11} \tilde{\alpha}(D_{11}) & \tilde{\alpha}(D_{11}) & 0 \\ D_{12} \tilde{\alpha}(D_{11}) & 0 & \tilde{\alpha}(D_{11}) \end{bmatrix}$$

と書き直すことが出来、従って

$$\det F_1 = -2 \tilde{\alpha}(D_{11})^2 \neq 0$$

となることに注意しておく。ここで  $F_1, F_2, R_0, R_1, R_2$  の交換関係を求めておこう:

$$(2.5) \left\{ \begin{aligned} [F_1, F_2] &= -\tilde{\alpha}(D_{11}) \tilde{\alpha}(D_{22}) R_0 \\ [F_1, R_0] &= \tilde{\alpha}(D_{11}) R_1, \quad [F_2, R_0] = \tilde{\alpha}(D_{22}) R_2 \\ [F_1, R_1] &= \tilde{\alpha}(D_{11}) D_{11} R_0, \quad [F_2, R_1] = \tilde{\alpha}(D_{22}) D_{12} R_0 \\ [F_1, R_2] &= \tilde{\alpha}(D_{11}) D_{12} R_0, \quad [F_2, R_2] = \tilde{\alpha}(D_{22}) D_{22} R_0 \\ [R_0, R_1] &= -D_{12} R_1 + D_{11} R_2 \\ [R_0, R_2] &= -D_{22} R_1 + D_{12} R_2 \\ [R_1, R_2] &= (D_{12}^2 - D_{11} D_{22}) R_0 \end{aligned} \right.$$

以下、記号を統一するために、 $L_j = F_j$  ( $j=1, 2$ ),  $L_j = R_{j-3}$

( $j=3, 4, 5$ ) と定め、(2.5) の関係式をまとめて

$$(2.6) \quad [L_j, L_k] = \sum_{\ell=1}^5 c_{jk}^{\ell} L_{\ell}$$

と記すこととする. (従って  $c_{jk}^{\ell}$  は無限階微分作用素.)

$$\text{今 } 0 = \mathcal{O}^3 \subset \mathcal{L}, \quad \varphi_{(p-1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{p-1}}) \in \mathcal{O}^{(p-1)}$$

[組  $\varphi$  は index に関して交代的] に対して  $p$ -cochain

$$(2.7) \quad \psi_{(p)} = d_{p-1} \varphi_{(p-1)},$$

を

$$(2.8) \quad \psi_{j_1, \dots, j_p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} L_{j_k} \varphi_{j_1, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_p} \\ + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq p} \sum_{\alpha=1}^5 (-1)^{k_1+k_2} c_{j_{k_1}, j_{k_2}}^{\alpha} \varphi_{\alpha, j_1, \dots, \hat{j}_{k_1}, \dots, \hat{j}_{k_2}, \dots, j_p}$$

により与えられる.  $d_p \circ d_{p-1} = 0$  が成立し. これにより. 上の

complex が与えられる. (尚, 今の場合  $d_p \circ d_{p-1} = 0$  は自明

ではないことを注意しておく.)

最後に.  $d_1 \varphi_{(1)} = \psi_{(2)}$  の具体的表示を与えておく.

$$\begin{bmatrix} \psi_{1,2} \\ \psi_{1,3} \\ \psi_{1,4} \\ \psi_{1,5} \\ \psi_{2,3} \\ \psi_{2,4} \\ \psi_{2,5} \\ \psi_{3,4} \\ \psi_{3,5} \\ \psi_{4,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_2 & F_1 & \tilde{\Delta}(D_{11}) \tilde{\Delta}(D_{22}) & 0 & 0 \\ -R_0 & 0 & F_1 & -\tilde{\Delta}(D_{11}) & 0 \\ -R_1 & 0 & -\tilde{\Delta}(D_{11}) D_{11} & F_1 & 0 \\ -R_2 & 0 & -\tilde{\Delta}(D_{11}) D_{12} & 0 & F_1 \\ 0 & -R_0 & F_2 & 0 & -\tilde{\Delta}(D_{22}) \\ 0 & -R_1 & -\tilde{\Delta}(D_{22}) D_{12} & F_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & -\tilde{\Delta}(D_{22}) D_{22} & 0 & F_2 \\ 0 & 0 & -R_1 & R_0 + D_{12} & -D_{11} \\ 0 & 0 & -R_2 & D_{22} & R_0 - D_{12} \\ 0 & 0 & D_{11} D_{22} - D_{12}^2 & -R_2 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix}$$

## References.

- [1] Kawai, T. : 函数の超局所解析についての一、二の  
注意. 数理論講究録, No. 410, pp. 76-87,  
1980.
- [2] — : Systems of linear differential  
equations of infinite order. To  
appear in Proc. AMS Summer Institute  
"Theta functions".
- [3] Kawai, T. and D. C. Struppa : On the existence of  
holomorphic solutions of systems of  
linear differential equations of infinite  
order and with constant coefficients.