

曲面の Chern 類の不等式と effective Mordell theorem

都立大・理 宮岡洋一

代数曲面の二つの Chern 数 c_1^2 と c_2 の間の基本不等式

$$c_1^2 \leq \text{Max}\{3c_2, 2c_2\}$$

が種々の応用を有することは周知のことと思う。本稿では、effective な Mordell 型定理もまた上記不等式、または類似の K_X^2 の上からの評価から自然に導かれることを見ていきたい。

1. 一般的事実。

S は標数 0 の体 k 上の完備代数曲線 (geometric case), もしくは代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のスペクトル $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ (arithmetic case) とする。 S 上のファイバー空間 $\pi: X \rightarrow S$ は以下の性質をもつものと仮定する。

a) X は 2 次元の regular scheme。

b) π は proper, flat, surjective で、すべてのファイバーは geometrically connected。

- c) X は S 上の曲線として *semistable*。特に f のすべてのファイバーは被約な正規交差因子で、 X の第一種例外曲線がファイバーに含まれることはない。
- d) π の一般のファイバーの種数 g は 2 以上。

一般に π は特異ファイバー (= *bad reduction*) をもつ。
 $\lambda \in S$ 上のファイバー X_λ の一般 *Jacobi* 多様体 $\text{Jac}(X_\lambda)$ は、条件 c) から $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ 次元の代数トーラス (λ に対応する体が閉体なら G_m^ε) による *Abel* 多様体の拡大となっている。明らかに $0 \leq \varepsilon \leq g$ であり、 $\varepsilon(\lambda) = 0$ と X_λ が非特異ファイバーであることは同等である。また X_λ の二重点の数を $\delta = \delta(\lambda)$ とおくと、 $\varepsilon \leq \delta$ である。 X_λ の既約成分 Γ が (-2) -curve であるとは、 $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ で Γ と他の X_λ の成分が 2 点で交わっていることをいう。 $\delta - \varepsilon$ は X_λ 上の (-2) -curve の個数と等しい。

Geometric case は無論のことであるが、*arithmetic case* においても交点理論がある (*Arakelov theory*)。それによれば、 π の section $\sigma: S \rightarrow X$ の像 $C = \sigma(S)$ に対して次の等式 (*adjunction formula*) が成立する。

$$(C, C) + (\omega_{X/S}, C) = 0.$$

ここに $\omega_{X/S}$ は X の S 上の相対標準束である。蛇足であるが arithmetic case では、絶対標準束 ω_X の自明な定義はないことを注意されたい。

種数 g の安定曲線の "universal family" $\pi: \overline{\mathcal{C}}_g \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ から自然に $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の直線束 $L = \wedge^g(\pi_* \omega_{X/S})$ が得られる。Jacobian をとる操作により $\overline{\mathcal{M}}_g$ から principally polarized semi-abelian variety の moduli 空間 $\overline{\mathcal{A}}_g$ への generically 1-1 写像が得られるが、 L は weight 1 の Siegel 保型形式の直線束の $\overline{\mathcal{M}}_g$ への制限となっていて、したがって geometric case で自然な写像 $S \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ が定値写像の場合 (isotrivial case) を除けば $(\det \omega_{X/S})^{\otimes m}$ ($m \gg 0$) は十分多くの section をもち、

$$(\omega_{X/S}, C) = -(C, C) > 0$$

かわかる。

Geometric case においては通常の Chern 数は以下の公式により $\omega_{X/S}$, g , $p = g(S)$, δ で書表すことができる。

$$c_1^2(X) = (\omega_{X/S}, \omega_{X/S}) + 8(g-1)(p-1),$$

$$c_2(X) = \sum_{s \in S} \delta(s) + 4(g-1)(p-1).$$

2. Effective Mordell in Geometric Case (1)

Geometric case で S 上の曲線 (族) X は isotrivial ではないと仮定しよう。

Σ を π の section 全体のなす集合とすると, Σ が有限集合であることは Grauert と Manin が独立に証明した。彼らの方法からはでてこない $\#\Sigma$ の具体的評価を本節で与える。

まず cycle map $c: \Sigma \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ ($c(C)$ は $C \in \Sigma$ の Chern 類) が単射であることを注意する。実際, $c(C) = c(C')$ ならば, $(C, C') = (C, C) < 0$, よって $C = C'$ である。したがって $c(\Sigma) \subset H^2(X, \mathbb{Z})/\text{torsion} \subset H^2(X, \mathbb{Q})$ の個数を評価すればよい。

今 $C \in \Sigma$ に対し, $(\omega_{X/S}, C)$ が上から C によらない定数 M でおさえられている, としてみる。

$$a = a(X, S) = (\omega_{X/S}, \omega_{X/S}) > 0$$

とおく。 $\alpha = \alpha(C, X, S) = (\omega_{X/S}, C)$ とおくと,

$$c(X) = \frac{\alpha}{a} c(\omega_{X/S}) + D,$$

$$c(\omega_{X/S}) \cdot D = 0, \quad D \in \frac{1}{a} (H^2(X, \mathbb{Z})/\text{tor}).$$

Hodge index theorem によると, Néron-Severi 群

$$NS(X) \subset H^2(X, \mathbb{Q})$$

は $\mathbb{Q}$ を tensor すると, $\mathbb{Q} c(\omega_{X/S}) \perp V$ の形で, V は cup 積に関して負定値である。特に $D^2 \leq 0$ である。一方 adjunction formula から

$$(C, C) + (\omega_{X/S}, C) = \frac{x^2}{a} + x + D^2 = 0$$

であり, $x \leq M$ を考慮すれば $D^2 \geq -\frac{M^2}{a} - M$ 。したがって, 可能な $D \in \frac{1}{a} H^2(X, \mathbb{Z}) \cap V$ の個数は, M , a , および X の Picard 数 $\rho = \rho(X)$ の函数 $\beta(M, a, \rho)$ 以下である。また $x = (\omega_{X/S}, C) \in \mathbb{N}$ だから, 結局

$$\# \Sigma \leq \tilde{\beta}(M, X, S) = M \beta(M, a, \rho).$$

以上, $(\omega_{X/S}, C)$ に上限 M があることから effective Mordell が従うことを示した。次は M を実際求めてみる。いくつか方法が考えられるが最も簡明かつ最良の評価は, 酒井による対数的 Chern 数の不等式から得られる。簡単のため, $g(S) \geq 1$ とする ($S = \mathbb{P}^1$ なら, 一般の4点で分岐する二重被覆 $S' \rightarrow S$ による base change $\pi': X' \rightarrow S'$ を考えれば, $(\omega_{X/S}, C) = \frac{1}{2}(\omega_{X'/S'}, C')$ 等より $g(S) \geq 1$ の場合に帰着する)。この時, $K(X) = 2$ となっ

て, 不等式

$$c_1^2(\Omega_X^1(\log C)) \leq 3c_2(\Omega_X^1(\log C))$$

が成り立つ(酒井)。Adjunction formula, および等式

$$c_1(\Omega_X^1(\log C)) = \omega_{X/S} + \pi^* \omega_S + C,$$

$$\begin{aligned} c_2(\Omega_X^1(\log C)) &= c_2(X) + 2p - 2 \\ &= \sum \delta(\lambda) + 2(2g-1)(p-1) \end{aligned}$$

を用いてこれを書き直すと, 求める評価が得られる:

$$(\omega_{X/S}, C) \leq -\omega_{X/S}^2 + 3\delta + 4(2g-1)(p-1).$$

3. Effective Mordell in Geometric Case (2).

Arithmetic case との analogy を重視する立場からは, Ω^1 , $\Omega^1(\log C)$ 等, 高度に幾何的な対象より, 可能な限り標準的なもの, 相対標準束とか δ , ε といった fibre からの情報のみで議論できたほうが, 応用がきくので好都合である。

前節では, いわば X から C を除去した開多様体を考察することで C にかんする情報を得たのであるが, 完備多様体の category に留まりつつ C の情報を反映させるには, C

で分岐する被覆をといはよい。最も単純なのは C に沿って分岐する巡回被覆であるが、残念ながらそれは不可能である。実際、一般のファイバー X_s 上 C は一点であるが、コンパクト Riemann 面の分岐巡回被覆は必ず2つ以上分岐点をもたなくてはならぬことか

$$H_1(\text{Riemann面} \setminus \{\text{一点}\}) \cong H_1(\text{Riemann面})$$

からすぐわかる。しかし、non-abelian な被覆を許容すれば C と有限個のファイバーだけで分岐する有限次被覆面が構成できる。以下に述べる方法は、小平による正指数をもつ代数曲面の例を見直して A. N. Parshin が考案した。

一般の $s \in S$ に対し、 $C \cap X_s$ を基点とする Albanese 写像 α_s で X_s を $\text{Jac}(X_s)$ に埋め込む。Abel 多様体 X_s には n 倍写像があるから、それで X_s をひきもとすと、étale なアーベル被覆 $\tilde{X}_s \rightarrow X_s$ が得られる。 $C_s \cap X_s$ の逆像は n^{2g} 個の点となるから、そこで分岐する n 次の巡回被覆 $Y_s \rightarrow X_s$ が標準的方法で構成できる。以上の操作はすべて $\text{rk}(S)$ 上定義されており、 $\{Y_s\}$ は S 上の family となる。したがって、適当な非特異モデル Y をとることで被覆面が得られる。作り方から $Y \rightarrow X$ の分岐は C および特異ファイバー (の部分集合) の上にあり、写像度は n^{2g+1} 。

Y は S 上のファイバー空間である。その一般のファイバーの種数 g' は

$$2g' - 2 = n^{2g+1}(2g-2) + (n-1)n^{2g}$$

で与えられる。また $\pi': Y \rightarrow S$ の特異ファイバーは, $\pi: X \rightarrow S$ のそれの上しかない。しかし, 勿論 Y は一般には S 上の *semistable curve* ではないので, 適当な *base change* $T \rightarrow S$ により *semistable reduction* $Z \xrightarrow{\pi'} T$ をとる。 $f: Z \rightarrow X$ を自然な有理写像, $\tilde{C} = f^{-1}(C)$ とすると, *log 分岐公式* より

$$\begin{aligned} K_Z + \tilde{C} + \sum(\pi' \text{ の singular fibre}) \\ = f^*(K_X + C + \sum(\pi \text{ の singular fibre})) \end{aligned}$$

となって, これから相対 *log 分岐公式*

$$\begin{aligned} K_{Z/T} &\equiv f^*(K_{X/S} + \frac{n-1}{n} C - r(\text{fibre})), \\ r &\in \mathbb{Q}, \quad 0 \leq r < \#\{\text{singular fibre of } \pi\} \end{aligned}$$

が得られる。この Z に対して不等式 $c_1^2 \leq 3c_2$ を適用すると, $(\omega_{X/S}, C)$ のある種の評価がでる。 n が陽に出てきてわずらわしいが, $n \rightarrow \infty$ のとき, この評価は

$$(\omega_{X/S}, C) \leq -\omega_{X/S}^2 - 4(2g-1)(p-1) \\ + \frac{3}{n^{2g+1}} \sum_{t \in T} (\delta(t) + 2g-1) + C\left(\frac{1}{n}\right)$$

の形である。ここで $\delta(t)$ は一般に上からおさえる有効な方法がないことに気付く、悩ましいのだが、この難点は不等式を orbifold に対するものにするこで解決して、

$$(\omega_{X/S}, C) \leq -\omega_{X/S}^2 - 4(2g-1)(p-1) + \sum_{\rho \in S} (\varepsilon(\rho) + 2g-1)$$

が最終点に得られる。

以上の概略を反省してみると、証明に用いた不等式 $c_1^2 \leq 3c_2$ の係数 3 は本質的ではないことがわかる。係数を大きくすれば評価は悪くなりこそすれ、それなりの effective Mordell が得られることにはかわりない。

4. Arithmetic case.

前節で解説した Parshin の被覆 $Z \rightarrow X$ は arithmetic case においても考えることができ、相対 log 分岐公式

$$\omega_{Z/T} \equiv f^*(\omega_{X/S} - \varepsilon(\text{fibre}))$$

その他も同様に成立する（ことが証明できる）。したがって、

$$(\omega_{X/S}, \omega_{X/S})^2 \leq \text{function in } \left\{ g, d_{K/\mathbb{Q}}, |K:\mathbb{Q}|, \varepsilon(\omega), \right. \\ \left. \mathcal{U}_g \otimes \mathbb{C} \text{ 上の連続関数} \right\}$$

の形の不等式が成立すれば,

$$(\omega_{X/S}, C) = -(C, C)$$

の評価が得られることは前と同様である。 $-(C, C)$ は本質的に logarithmic Néron-Tate height であり, Weil height と Néron-Tate height の間には effective な比較定理がある。つまり X の K 有理点 C を $\mathbb{P}^N(\mathcal{O}_K)$ の点と思ったとき, 座標の最大値がおさえられたことになる。言いかえると, 上にあげたような $\omega_{X/S}^2$ に関する不等式は, 有理点の height と個数の評価を導く。