

流体乱流とくりこみ群

名工大

後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1 はじめに

日常, 我々が体験し利用する流体現象は非圧縮流体の運動であり, ほとんどの場合, 速度や圧力場が時間と空間にわたってランダムに変化する乱流となっている. 流れを特徴づける無次元パラメーターにレイノルズ数 $R = UL/\nu$ があり (U と L はそれぞれ流れの代表的速度と長さ, ν は動粘性率), これは Navier-Stokes 方程式の非線形項と粘性項 (線形項) の比を表わす.

巨視的なスケールにおいて境界からあるいは流体に直接エネルギーが注入され, R が大きい場合には流体運動は不安定になり, 大きな流体要素は小さな流体要素の集合に分裂し, さらに各要素は各々の流体運動と各要素間の相互作用によってより小さな要素へと分裂していく. この過程で流体のエネルギーは, 巨視的なスケール ($L \sim \text{Km}$) から粘性が支配的なスケール ($\eta \sim \mu\text{m}$) にまでいきわたる. このように非常に大きなスケールにわたって連続的に速度場や圧力場が励起された乱流は, 十分に発達した乱流 (Fully Developed Turbulence, FDT) と呼ばれる. 乱流の示す統計法則については十分解明されてはおらず, 物理学においていまだ解決されていない難問の一つとされている.

乱流におけるくりこみ群を議論する前に, 乱流理論全体を概観しておこう (Monin and Yaglom 1975). 乱流の統計理論の出発点は Kolmogorov の理論 (1941) である. それは2つの仮説をもとにして, FDT の統計法則を記述するものである. 第1仮説では, 乱流のパラメータであるエネルギー散逸率 $\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle$ と粘性 ν によって速度差 $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $r \ll L$ の確率分布関数は一意に決まることを述べている. このことと次元解析から乱流における最小の長さが $\eta = (\nu^3/\bar{\epsilon})^{1/4}$ と与えられ, さらに $\delta \mathbf{u}$ の p 次モーメントがある無次元関数 $F_p(x)$ を用いて $\langle |\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})|^p \rangle = (\bar{\epsilon}\nu)^{p/4} F_p(r/\eta)$ と書けることが示される. 第2仮説では, $\eta \ll r \ll L$ の領域 (慣性領域) では確率分布関数は ν によらないことを要請する. これから, 速度差の任意のモーメントのスケールリング則 $\langle |\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})|^p \rangle \propto (\bar{\epsilon}r)^{p/3}$ が導かれる. 特に, $p = 2$ のときの慣性領域におけるエネルギースペクトル (Kolmogorov spectrum)

$$E(k) = K\bar{\epsilon}^{2/3}k^{-5/3} \quad (1.1)$$

は, その後の乱流理論の要となった極めて重要な統計法則である. ここで K は普遍定数で実験では $K = 1.62 \pm 0.17$ と求められている (Sreenivasan 1995).

その後の乱流理論は, この Kolmogorov spectrum を Navier-Stokes 方程式からどのようにして導くかに大きな関心が払われ, 多くの乱流のスペクトル理論が提唱された (Monin and Yaglom 1975, Orszag 1977). それらは大きく分けて Zero-4th cumulant theory (Millionshtchikov 1941, Proudman 1954, Tatsumi 1957), Direct Interaction Approximation (DIA, Kraichnan 1959), Modified Zero-4th cumulant theory (Tatsumi et al. 1978) などのオイラー的な2点2時刻相関関数を用いた理論と, Lagrangian Histroy DIA (LHDIA, Kraichnan 1965, 1966), Lagrangian Renormalized Approximation (LRA, Kaneda 1981, 1986) などのラグランジュ的な2点2時刻相関関数を用いた理論とに大別され, Kolmogorov spectrum に導くのは後者のグループであることが知られている. LRA は任意定数を導入することなく $K = 1.72$ を導き, また図1に見るように, 実験により得られた Kolmogorov spectrum との比較においても満足な結果を導くことが知られている (Gotoh et al. 1988, 後藤 1998). これらの理論はすべて, 乱流における2次モーメントの発展方程式を摂動級数の展開をくりこむことによって導く理論である. 波数空間全体を扱うのであって, 以下に述べるくりこみ群のように波数空間の自由度を消去する理論とは区別される. またこれらの理論は, 速度場の低次モーメントを扱う理論であり, 乱流の間欠性に関連した高次モーメントの計算には適さない.

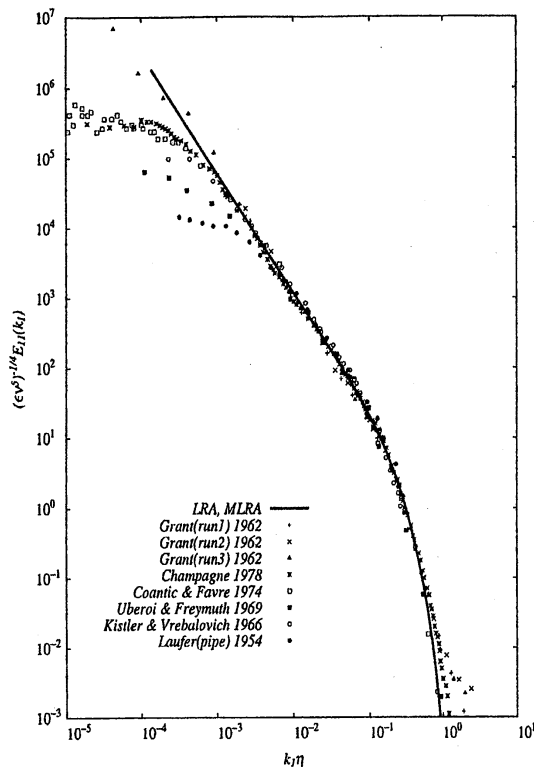


Fig.1 1次元エネルギースペクトル $\epsilon^{-2/3} k^{5/3} E_{11}(k)$ についてのLRAと実験との比較 (Gotoh et al. 1988).

計算と組み合わせることにより乱流現象の予測と制御が可能になり、地球規模流動現象から生体内流動現象のすべてわたって大きな応用の可能性をもった理論となりうる。現在のところ、くりこみ群の手法を用いて、Kolmogorov spectrum を求めることや、速度場の異常スケーリングを導くこと、乱流における異常拡散を調べること、あるいはLESにおけるSGSモデリングに応用することなどがその主な目標であるが、そのいずれもがまだ発展途上にある (Adzhemyan 1999, Zhou et al. 1997)。

FDTにおけるくりこみ群の試みは1970年代後半から多くの試みがなされているが、ここでは乱流研究者からみたくくりこみ群について述べる。熱平衡系におけるくりこみ群を流体力学の文脈の中で最初に実行したのがForster, Nelson & Stephen (FNS, 1976, 1977)である。彼らの方法はMa & Mazenko (1975)の動的くりこみ群とよばれる方法をNavier-Stokes方程式に応用したものである。多くの乱流におけるくりこみ群の研究はFNSを出発点としているので、ここではFNSの解析とそれに引き続く発展の概略を述べる。

このほか、乱流における間欠性について、フラクタルモデルを始めとする様々なモデルや速度差についての確率密度関数の理論、乱流によるスカラー場の拡散についての理論などもあるが、くりこみ群と同様、いまだ確立した理論体系はできていない。詳しくは後藤(1998)を参照されたい。

2 くりこみ群

Navier-Stokes方程式についてくりこみ変換を行うには、時間と空間についてフーリエ変換された方程式を用いると便利である。いまフーリエ変換を

$$u(\mathbf{k}, \omega) = \int d^d \mathbf{x} \int dt u(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.2)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbf{k} \leq \Lambda} d^d \mathbf{k} \int d\omega u(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.3)$$

原形としてのくりこみのアイディアは乱流の研究が始まってまもなく現われている。それは、考えているスケールよりも十分小さいスケールの乱流運動(例えば渦運動)を気体の分子運動論における気体分子に例えて乱流の渦粘性という形で取り込もうとするものである。しかし、一般にスケールの分離というものが乱流には存在しないため、工学的にはともかく物理的な理論的根拠はないと言ってよい。

くりこみ群のアイディアには乱流にも共通するものがあると考えるのは自然である。よく例に出される、2次元イジングスピンのモデルと比較すると良くわかる。すなわちサイズのブロックスピンとサイズの流体要素との対応、ブロックスピンの相関関数と速度場の相関関数のべき的なふるまい、スピンの結合定数の変化に対して渦粘性の増大などである。特に、乱流のラージエディシミュレーション(LES)の立場からは計算格子以下のスケール(Subgrid scale, SGS)のモデリングという意味で興味をもたれるのもうなずける (Galperin and Orszag 1993)。従って、高波数側から自由度を消去して粗視化したNavier-Stokes方程式を導こうというくりこみ群の理論の基本的発想は、きわめて強い物理的および工学的動機づけをもつものである。さらに、乱流におけるくりこみ群の問題が解決されれば、乱流の数値

で定義する。波数積分における制限 $k \leq \Lambda$ については後で述べる。フーリエ変換された Navier-Stokes 方程式は

$$(-i\omega + \nu_0 k^2) u_i(\mathbf{k}, \omega) = \lambda_0 M_{lmn}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}\Omega} u_m(\mathbf{p}, \Omega) u_n(\mathbf{k} - \mathbf{p}, \omega - \Omega) + f_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (2.4)$$

$$M_{lmn}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2}(k_m P_{ln}(\mathbf{k}) + k_n P_{lm}(\mathbf{k})), \quad \int_{\mathbf{p}\Omega} \equiv \int d^d \mathbf{p} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \quad (2.5)$$

と表わされる。ここで ν_0 は通常の分子粘性, $\lambda_0 (= 1)$ は結合定数である。 $f(\mathbf{k}, t)$ は平均が 0 で相関が

$$\langle f_i(\mathbf{k}, \omega) f_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = 2F_0(k) P_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \quad (2.6)$$

で与えられる Gauss 統計に従うホワイトなランダム力である。 $F_0(k)$ は単位時間, 単位質量の流体に注入されるエネルギーのスペクトル密度であり, ここでは等方的な形

$$\int F_0(k) d^d \mathbf{k} = \bar{\chi}, \quad F_0(k) = D_0 k^{-\gamma} \quad (2.7)$$

を仮定する (Yakhot & Orszag 1986)¹。このランダム力の素性については後でまた述べる。

磁性体の例における個々のスピンをブロックスピンにまとめる操作は, 対応する高波数 ($k > \Lambda/b$) の自由度を平均操作により消去することを意味する。そこで乱流の場合においても同様に, いまあるカットオフ波数 Λ まで自由度が消去されたとして, Λ からくりこみ変換を開始するとしよう²。これが (2.3) で波数積分に制限を加えた理由である。消去すべき自由度を ($e^{-t} \Lambda \equiv \Lambda' < |\mathbf{k}| \leq \Lambda$) に含まれるフーリエモードとし, これに関連して任意の物理量のフーリエモード $A(\mathbf{k}, \omega)$ を, $\Lambda' < k \leq \Lambda$ に属するモード $A^>(\mathbf{k}, \omega)$ と $k \leq \Lambda'$ に属するモード $A^<(\mathbf{k}, \omega)$ にわける:

$$A(\mathbf{k}, \omega) = A^<(\mathbf{k}, \omega) + A^>(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.8)$$

これで準備ができた。くりこみ群の手続きを書き下そう。

1. $u^<(\mathbf{k}, \omega)$ の方程式に含まれる高波数側の $u^>(\mathbf{k}, \omega)$ を消去する。
2. 上で得られた結果の方程式について, 長さ, 時間, 速度そしてランダム力をスケールし直す。

求めたいのは $u^<(\mathbf{k}, \omega)$ についての方程式であるが, 非線形項によりこの方程式に $u^>(\mathbf{k}, \omega)$ が入ってくる。そこで $u^>(\mathbf{k}, \omega)$ の方程式を λ のべき展開の形で形式的に解くと, $u^>(\mathbf{k}, \omega)$ は $f^>(\mathbf{k}, \omega)$ と $u^<(\mathbf{k}, \omega)$ とを用いて表わされる。これを $u^<(\mathbf{k}, \omega)$ の式に現われる $u^>(\mathbf{k}, \omega)$ に代入し, $f^>(\mathbf{k}, \omega)$ について平均を取ることににより $\Lambda' < k \leq \Lambda$ に属する自由度を消去する。この操作により, $u^<(\mathbf{k}, \omega)$ の方程式の係数が新しいものに置き換えられたり全く新しい別の項が生じる。平均操作で消える項は, ランダム力として $f^<(\mathbf{k}, \omega)$ に取り込まれる。

乱流におけるくりこみ群の成否も, くりこみ変換によって方程式が変化しない不動点を見いだせるかどうかにかかっている。そこでこのスケールリングは変換された方程式がもとの Navier-Stokes 方程式にできるだけ近い形になるように行う (すなわちくりこみ変換において方程式が不変になるように)。通常 $\partial u^< / \partial t$ の係数が 1 になるようにする。

2.1 自由度の消去

まず $u^<(\mathbf{k}, \omega)$ についての Navier-Stokes 方程式 (2.4) を積分形で書き直すと,

$$u_i^<(\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}^0(\mathbf{k}, \omega) f_j^<(\mathbf{k}, \omega) + \lambda_0 G_{ij}^0(\mathbf{k}, \omega) M_{jlm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}\Omega} [u_m^<(\mathbf{p}, \Omega) u_n^<(\mathbf{k} - \mathbf{p}, \omega - \Omega) + 2u_m^<(\mathbf{p}, \Omega) u_n^>(\mathbf{k} - \mathbf{p}, \omega - \Omega) + u_m^>(\mathbf{p}, \Omega) u_n^>(\mathbf{k} - \mathbf{p}, \omega - \Omega)], \quad (2.9)$$

$$G_{ij}^0(\mathbf{k}, \omega) = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1} P_{ij}(\mathbf{k}) \equiv G^0(\mathbf{k}, \omega) P_{ij}(\mathbf{k}) \quad (2.10)$$

¹ 乱流理論の慣習に習えば $\bar{\epsilon}$ と書くべきであるが, 以下に出てくる指数を表わす ϵ との混同を避けるために $\bar{\chi}$ で表わすことにする。

² 磁性体の場合には格子間隔による明瞭なカットオフ波数 $\Lambda = 1/a$ が定義できるが, 乱流の場合は必ずしもはっきりとはしない。さしあたり $\Lambda = k_d$ (Kolmogorov 波数) にとっておくのが妥当であろう。しかし, 後で見るように $k \ll \Lambda$ を考える場合にはこのことはあまり気にしなくても良い。

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{k, \omega}} &\Leftrightarrow G_0^<(k, \omega), & \underline{\underline{k, \omega}} &\Leftrightarrow u^<(k, \omega), \\
\underline{\underline{k, \omega}} &\Leftrightarrow G_0^>(k, \omega), & \underline{\underline{k, \omega}} &\Leftrightarrow u^>(k, \omega), \\
-\bigcirc &\Leftrightarrow f(k, \omega), & k, \omega \begin{array}{c} \nearrow p, \omega_1 \\ \searrow q, \omega_2 \end{array} &\Leftrightarrow \lambda M_{ilm}(k) \int_{p\Omega}.
\end{aligned}$$

Fig.2 各物理量とダイアグラム要素との対応. vertex のところでは, 波数と振動数がそれぞれ保存するように ($k = p + q, \omega = \omega_1 + \omega_2$) 和を取る.

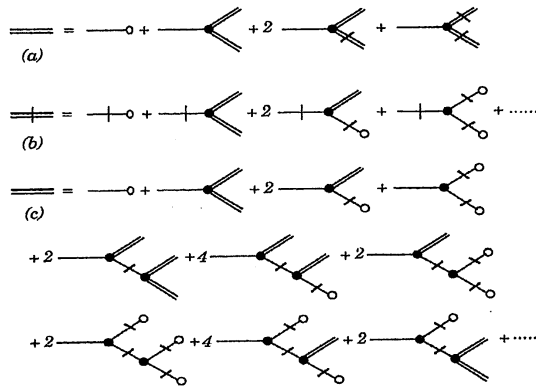


Fig.3 ダイアグラムによる展開. (a) $u^<$ の方程式, (b) $u^>$ の方程式, (c) $u^>$ の $u^<$ による展開式.

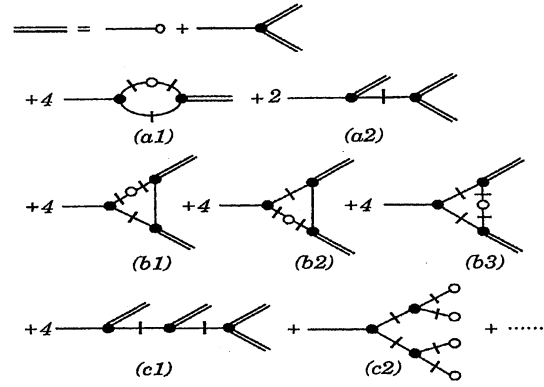


Fig.4 $f^>$ について平均を取った後の展開式

となる. 非線形項には $u^>(k, \omega)$ が入っているので, これを $u^<(k, \omega)$ で表わすために, $u^>(k, \omega)$ についての上と同様な方程式を λ のべき展開で求めて (2.9) に代入する. この計算は実際に式を書き出すと非常に面倒なのでダイアグラムを用いて行う. 図2に式の各因子に対応するダイアグラムを示した. 細い実線は0次の応答関数 $G_0^<(k, \omega)$, 2重線は速度場 $u^<(k, \omega)$ であり, 各線に短いスラッシュが入ったものは, 対応する各因子の波数が $\Lambda' < k \leq \Lambda$ に属するものである. また, 白丸は $f(k, \omega)$, 黒丸は vertex, $\lambda M_{ilm}(k) \int_{p\Omega}$, を表わし, vertex のところでは, 波数と振動数がそれぞれ保存するように ($k = p + q, \omega = \omega_1 + \omega_2$) 和を取る³.

この表現方法によると, (2.9) は図3(a)のように表わされ, また $u^>(k, \omega)$ は図3(b)のようになる. そこで図3(b)を図3(a)の $u^>$ に代入すると, 結果は $O(\lambda^2)$ までで図3(c)のようになる. 次に, $\Lambda' < k \leq \Lambda$ に属するランダム力 $f^>$ について平均をとる. f は Gaussian であるから奇数次のモーメントはすべて0になり, 偶数次のモーメントのみが残る. 結果を λ の3次まで書き下すと図4のようになる⁴. 最初の2項はもとの低波数モードの式そのものであり, 第3項目以降が高波数成分の自由度を消去したことにより新しく生じた項である. さて, 今しばらくは図4の第4項目(a2)と第8項目(c1)以降をすべて無視しよう. このとき得られる $u^<$ についての積分方程式に左から $(-i\omega + \nu_0 k^2) = G_{0ii}^{-1}/(d-1)$ を作用させると (すなわち右辺の各項の一番左にある細い線をとる),

$$\begin{aligned}
\{(-i\omega + \nu_0 k^2)\delta_{lm} + \lambda_0^2 \Sigma_{lm}(k, \omega)\} u_m^<(k, \omega) &= \lambda_0 M_{lmn}(k) \int_{p\Omega} u_m^<(p, \Omega) u_n^<(k-p, \omega-\Omega) \\
&+ \lambda_0^3 \int_{p, q, \omega_1, \omega_2} \Gamma_{lmn}(k, p, q, \omega, \omega_1, \omega_2) u_m^<(p, \omega_1) u_n^<(q, \omega_2) + f_l^<(k, \omega)
\end{aligned} \quad (2.11)$$

となる. ここで Σ_{ij} は図4の(a1)の項から出てきたものであり $q = k - p$ とすると

$$\Sigma_{ij}(k, \omega) = 4\lambda_0^2 \int_{\Lambda' < p, q \leq \Lambda} \frac{d^d p}{p} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega K_0(p, q, \omega, \Omega) M_{ilm}(k) P_{lb}(p) P_{ma}(q) M_{abc}(q) P_{cj}(k)$$

³ここでは主に Ma & Mazenko(1975)のスタイルにならった. 乱流における Feynman diagram についての詳しい解説は L'vov & Procaccia(1994)が参考になるだろう. また経路積分をつかったくりこみ群の方法については Nakano & Tanaka (1981)を参照.

⁴このためには図3(b)と(c)を λ の3次まで展開する必要がある.

$$= \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^{d+1}} k^2 \int_{\Lambda' < p, q \leq \Lambda} d^d p \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega H_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) K_0(p, q, \omega, \Omega), \quad (2.12)$$

$$K_0(p, q, \omega, \Omega) = \frac{2F_0(p)}{(-i(\omega - \Omega) + \nu_0 q^2)(\Omega^2 + \nu_0^2 p^4)}, \quad (2.13)$$

$$H_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = (1 - z^2) P_{ij}(\mathbf{k}) - 2 \frac{p^2 y}{kq} \Delta_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad (2.14)$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{p_i p_j}{p^2} - \frac{z}{kp} (p_i k_j + k_i p_j) + z^2 \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (2.15)$$

である。\$x, y, z\$ は \$p_i q_i = pqx, q_i k_i = qky, k_i p_i = kpz\$ で定義される⁵。また

$$\Gamma_{lmn}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega, \omega_1, \omega_2) = \Gamma_{lmn}^{(1)} + \Gamma_{lmn}^{(2)} + \Gamma_{lmn}^{(3)} \quad (2.16)$$

は図4の(b1), (b2), (b3)の項にそれぞれ対応するが、その具体的な表式は以下の議論には必要ないので省略する。このようにみると、\$\Sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)\$ はその形から考えて消去された自由度からの粘性係数 \$\nu\$ へのくりこみ \$k^2 \delta \nu_{ij}\$ と解釈できる。ただし(2.12)からもわかるように、この段階ではくりこまれた粘性は非対角形であり分散性を持つ。同様に \$\Gamma\$ は結合定数 \$\lambda\$ へのくりこみ \$\delta \lambda\$ と解釈してよいだろう。実は、詳しい計算をすると \$\delta \lambda = 0\$ であることが示せる⁶。(2.12)の \$\Omega\$ についての積分はすぐ実行できる。

ここで任意の \$(\mathbf{k}, \omega)\$ について \$\Sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)\$ の解析的な表現を得ることは難しい。そこで興味のある \$k \ll \Lambda'\$, \$\omega \to 0\$ の極限を考えてみよう。この場合には、スケール \$1/k\$ から見て \$\Lambda' < p, q \leq \Lambda\$ の自由度の影響である \$\Sigma_{ij}(\mathbf{k})\$ は等方的、すなわち \$\Sigma_{ij}(\mathbf{k}) = k^2 \delta \nu(k) P_{ij}(\mathbf{k})\$ と見てさしつかえないであろうから⁷, (2.12)より

$$\delta \nu(k) = \frac{\Sigma_{ii}(k)}{(d-1)k^2} = \frac{1}{(2\pi)^d (d-1)} \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu_0^2} \int_{\Lambda' < p, q \leq \Lambda} d^d p \frac{H(k, p)}{p^{2+y}(p^2 + q^2)}, \quad (2.17)$$

$$H(k, p) = \frac{(1-z^2)}{q^2} \left((d-1)k^2 - 2(d-1)kpz + (d-3)p^2 + 2\frac{p^3 z}{k} \right). \quad (2.18)$$

さてこの積分を実行するときには、考えている波数 \$k\$ と消去される波数 \$(p, q)\$ の大小関係に注意する必要がある (Nakano 1992)。ここでは \$k \ll \Lambda' \ll \Lambda\$ の極限を考えよう。\$d\$ 次元における積分要素は

$$d^d p = A_{d-1} (1-z^2)^{\frac{d-3}{2}} \frac{qp^{d-2}}{k} dp dq, \quad A_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (2.19)$$

と表わされることに注意し、\$p/k = u, q/k = v, v = u + \xi\$ とおいて被積分関数を \$\xi/u (\ll 1)\$ のべきに展開して主要な項を取り出して積分する。詳しい計算はかなり長いので結果だけ書こう。\$\delta \nu\$ と (2.11) の左辺にある \$\nu_0\$ を合わせて

$$\nu_I = \nu_0 \left(1 + \bar{\lambda}_0^2 \bar{A}_d \Lambda^{-\epsilon} \frac{e^{\epsilon I} - 1}{\epsilon} \right), \quad (2.20)$$

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu_0^3}, \quad \bar{A}_d = \frac{A_d}{(2\pi)^d} \frac{d^2 - d - \epsilon}{2d(d+2)}, \quad (2.21)$$

$$\epsilon = y + 4 - d \quad (2.22)$$

となる。添え字 \$I\$ はまだスケール変換を行っていない中間段階の粘性であることを示すためである。

ここまでは、図3(c)の展開のうち平均をとって0ではない項、すなわち \$\Lambda' < k \leq \Lambda\$ に属する自由度の粘性へのくりこみを見てきた。今度は平均操作で消える項について見てみよう。これはランダム力として \$\mathbf{u} < 0\$ の式にとりこまれると解釈する。図3(c)のうち平均操作で消える項の相関をとると図5のようになる。右辺第1

⁵ここでは波数積分の領域についての議論をより明確にするために、FNS (1977) による波数の変換 \$\mathbf{p} \to \mathbf{p} + \mathbf{k}/2\$ を行わず、直接に幾何学因子を計算した。幾何学因子の計算は少し長い。

⁶方程式のガリレイ変換に対する不変性から、つねに \$\lambda = 1\$ すなわち \$\lambda\$ へのくりこみは0であることが示せる (Nakano & Tanaka 1981)。

⁷\$k_i H_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = k_j H_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0\$ に注意すれば、\$\mathbf{p}\$ 積分の後、添え字 \$i, j\$ についてソレノイダルな等方的テンソルはこの形に限られることがわかる。

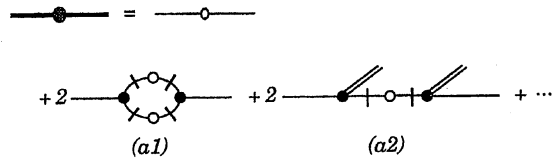


Fig.5 ランダム力の相関関数 $\langle f^< f^< \rangle$ のダイアグラム. 左辺の太い実線はくりこまれた応答関数を表わす.

項はもともとのランダム力 $f^<$ の相関であり, 第2項は図3(c)の右辺第4項目から出てくる. ここでも図5の(a2)の項は無視して(a1)の項だけについて考えてみる. $\delta\nu(k, 0)$ のときと同様にして, ランダム力のくりこみを $\delta F_{ij}(k)$ とすれば

$$\begin{aligned} \delta F_{ij}(k) &= -\frac{4}{(2\pi)^d} \bar{\lambda}_0^2 D_0 \int_{\Lambda' < p, q \leq \Lambda} d^d p \frac{M_{ilm}(k) P_{lb}(p) P_{ma}(q) M_{jab}(k)}{p^{y+2} q^y (p^2 + q^2)^2} \\ &= \frac{\bar{\lambda}_0^2 D_0}{(2\pi)^d} k^2 \int_{\Lambda' < p, q \leq \Lambda} d^d p \frac{J_{ij}(k, p)}{p^{y+2} q^y (p^2 + q^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$J_{ij}(k, p) = \frac{p^2}{q^2} \left\{ (1 - z^2) \left(1 + \frac{q^2}{p^2} \right) P_{ij}(k) - 2 \left(1 + \frac{kz}{p} - 2z^2 \right) \Delta_{ij}(k, p) \right\} \quad (2.24)$$

を得る⁸. $k \ll \Lambda$ の時には等方的 $\delta F_{ij}(k) = k^{-y} \delta D(k) P_{ij}(k)$ であると期待できるから, $\delta\nu(k)$ のときと全く同様の手続きによって

$$D_I(k) = D_0 \left(1 + \bar{\lambda}_0^2 \bar{C}_d \Lambda^{-\beta} k^{y+2} \frac{e^{\beta I} - 1}{\beta} \right), \quad (2.25)$$

$$\bar{C}_d = \frac{A_d}{(2\pi)^d} \frac{d^2 - 2}{2d(d+2)}, \quad \beta = \epsilon + y + 2 \quad (2.26)$$

を得る. すでに述べたように λ へのくりこみはない ($\delta\lambda = 0$) から

$$\lambda_I = \lambda_0. \quad (2.27)$$

以上をまとめると, $k \ll \Lambda', \omega \rightarrow 0$ のモードにおける $\Lambda' < k \leq \Lambda$ の自由度の影響は, 等方的な粘性係数とランダム力にくりこまれることがわかった. 次はスケーリングである.

2.2 スケーリング

これまで得られた結果について長さ, 時間, 速度, ランダム力, くりこまれた粘性などをスケールしなおす. 系を少し離れて見ることは長さの単位を大きくとることに対応する. $\Lambda' (= \Lambda e^l)$ まで消去したので Λ' が Λ に近くなるようにするために次のようにスケールする.

$$e^l k = k', \quad e^{\alpha(l)} \omega = \omega'. \quad (2.28)$$

ここで $\alpha(l)$ は, 長さのスケール変化に対して ω がどのようにスケールするか初めからわかっているわけではないので, さしあたり l の関数としておく. 同様にして速度とランダム力は

$$u^<(k, \omega) = e^{c(l)} u'(k', \omega'), \quad f^<(k, \omega) = e^{c(l) - \alpha(l)} f'(k', \omega') \quad (2.29)$$

という具合になる. (2.28) と (2.29) を方程式 (2.11) に代入し, またランダム力について (2.6), (2.7) に代入することにより⁹, 1回のくりこみ変換の後の粘性とランダム力および結合定数は

$$\nu(l) = e^{\alpha - 2l} \nu_I, \quad (2.30)$$

$$D(l) = e^{3\alpha - 2c + (y+d)l} D_I, \quad (2.31)$$

$$\lambda(l) = e^{c - (d+1)l} \lambda_0 \quad (2.32)$$

⁸ $k_i J_{ij}(k, p) = k_j J_{ij}(k, p) = 0$.

⁹ Navier-Stokes 方程式の非線形項の畳み込み積分 $d^d p \, d\omega$ より $e^{-\alpha - dl}$ が出てくる. またランダム力の相関関数の $\delta(k)$ は k^{-d} の次元を持ち, $\delta(\omega)$ は ω^{-1} の次元を持つことに注意する.

となる。

ここでランダム力のくりこまれた部分 $\delta D(k)$ の $k \ll \Lambda$ における振る舞いを見ると, $y+2 > 0$ のときこれは第1項に比べて十分無視でき, また $y = -2$ の時にはこの項は定数となる. 従って, $y > -2$ かそうでないかで事情が異なることが予想される. $y < -2$ の場合には, 高波数に非常に多くのランダム力のエネルギーが存在することになって興味の対象からはずれるので, ここでは考えないことにする. $y = -2$ のときには, 粘性とランダム力は同じようくりこまれ, 不動点近傍では漸近的自由性が実現する. この場合の速度場の揺らぎは, 熱平衡系における熱的揺らぎに相当し, エネルギーの等分配則や揺動散逸定理が成立する (FNS 1977, 後藤 1998). $y > -2$ のときが乱流に対応する.

2.2.1 乱流

$y > -2$ の場合には, $k \rightarrow 0$ の極限でくりこまれたランダム力の寄与は 0 になる. 高波数から順に自由度を消去しているのだから, $k \rightarrow 0$ のモードについて方程式を不変に保つようにするもっとも単純なやり方は D を D_0 のままにしておくことである. 従って (2.31) のスケーリングにおいて $3\alpha - 2c + (y+d)l = 0$ とおくことにより

$$c(l) = \frac{3\alpha(l) + (y+d)l}{2} \quad (2.33)$$

を得る. そして $y = -2$ の時と同様の手続きで

$$\frac{d\nu(l)}{dl} = \nu(l) (z(l) - 2 + \bar{A}_d \bar{g}^2(l)), \quad (2.34)$$

$$\frac{dD(l)}{dl} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{d\bar{g}(l)}{dl} = \frac{1}{2}\epsilon\bar{g} - \frac{3}{2}\bar{A}_d\bar{g}^3, \quad (2.36)$$

$$\epsilon = y + 4 - d \quad (2.37)$$

という微分方程式が得られる. (2.36) より安定な不動点は

$$\bar{g}_* = \begin{cases} (\epsilon/3\bar{A}_d)^{1/2} & \text{for } \epsilon > 0, \\ 0 & \text{for } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

となる. $D(l)$ が D_0 にとどまっていることに対応して $\nu(l)$ も

$$z(l) = 2 - \bar{A}_d \bar{g}^2(l) \quad (2.39)$$

と置くことにより ν_0 にとどまる.

1. $\epsilon < 0$

不動点 $\bar{g}_* = 0$ に対して

$$z_* = 2, \quad c_* = (3 + (d+y)/2)l \quad (2.40)$$

であり, $y = -2$ の時と同様, 非線形項は不動点近傍で変換をくり返すうちに小さくなる (irrelevant operator). エネルギースペクトルは

$$Q(k, \omega) = e^{2c-dl-\alpha} Q(k', \omega') \quad (2.41)$$

となるから, ω について積分し, $E(k) = S_d(k)Q(k) = A_d k^{d-1}Q(k)$ に注意すれば

$$E(k) = e^{-y l} E(k') \propto k^{1-\epsilon} \quad (2.42)$$

となる. $d = 3$ で考えると $\epsilon < 0$ は $y < -1$ の場合であり, 高波数に大きなランダム力が分布することになる.

2. $\epsilon > 0$

このとき不動点 $\bar{g}_* = (\epsilon/3\bar{A}_d)^{1/2}$ に対して

$$z_* = 2 - \frac{\epsilon}{3}, \quad c_* = (d+1)l \quad (2.43)$$

となり、非線形項の結合定数は $\lambda(l) = \lambda_0 e^{3\alpha/2 + (y-d-2)l/2} = \lambda_0$ であるから中立 (marginal operator) である。しかしスケーリングによる非線形項の評価が中立であっても、具体的な計算による係数 $\bar{\lambda}^2 = (\lambda^2 D/\nu^3) = \epsilon \Lambda^\epsilon / (3\bar{A}_d)$ は $\epsilon \ll 1$ のときには小さくなりうるので、 $\bar{\lambda}$ についての摂動展開 (図4) の $O(\bar{\lambda}^2)$ までの範囲では、右辺第8項目以降を無視できる場合が起こりうる¹⁰。いま $d = 3$ に固定して考えると $\epsilon = y + 4 - d = y + 1$ であるから $y = -1 + 0$ の近傍でこのことが起こりうる。

エネルギースペクトルは (2.42) と同様にして

$$E(k) = e^{5l/3 - 2(d-y)l/3} E(k') \propto k^{1-2\epsilon/3} \quad (2.44)$$

となる。従って Kolmogorov スペクトルは $y = d(\epsilon = 4)$ のときである:

$$E(k) \propto k^{-5/3}, \quad \text{for } \epsilon = 4 (y = d). \quad (2.45)$$

また慣性領域における特性時間の指数は $z = 2 - \epsilon/3 = 2/3$ 。しかし、 $\epsilon = 4$ を (2.43) 以下の議論に用いると非線形項はいつまでも $O(1)$ のままであり、摂動展開 (図4) における右辺第8項目以降を無視する理由はないことになる。ここでのランダム力は、乱流の駆動方法や境界条件などによって人為的にエネルギースペクトルのべきをコントロールする外力と考えられる。しかしまた、ごく低波数では人為的であっても高波数に向かっていくうちに (くりこまれていくうちに) 自発的にべき的な振る舞いをするという考えもある (Yakhot & Orszag 1986, DeDominicis & Martin 1979)。しかし、それほど確かな根拠があるわけではない。

3 くりこみ群の結果の物理的解釈

くりこみ群の結果の物理的な意味をみるために、ランダム力と乱流のエネルギーとの釣り合いを考えてみよう (Kraichnan 1982)。いまエネルギースペクトルが

$$E(k) \propto k^s, \quad k_0 \ll k \ll k_c \quad (3.46)$$

で与えられているとする。 $I_n = \{k | 2^{n-1}k_0 \leq k < 2^n k_0\}$ (n は整数) の波数バンド内のモードによる速度ゆらぎの振幅を u_k としその特性スケールを $l_k \simeq 1/k$ とする。分子粘性のときのアナロジーを使うとスケール l_k からの乱流の渦粘性への寄与は $\nu_k \simeq u_k l_k$ で与えられるから、 $u_k \simeq (kE(k))^{1/2}$ と書けることを考慮すれば $\nu_k \simeq [E(k)/k]^{1/2}$ となる。これに (3.46) を代入すれば

$$\nu_k \simeq k^{(s-1)/2}. \quad (3.47)$$

これは渦粘性への波数バンド I_n からの寄与であるから、 k から k_c までのすべての励起によるモード k に働く渦粘性 $\nu_e(k)$ は $\int_k^{k_c} \nu_p dp/p$ と見積ることができる¹¹。この積分は $s > 1$ ならば $p \simeq k_c$ の波数域で支配され (すなわち k から遠い波数間の相互作用が効くという意味で非局所的相互作用である)、 $\nu_e(k)$ はほとんど k に寄らない定数 ν_{k_c} とみなされる。一方、 $s < 1$ ならば $p \simeq k$ の振る舞いで決まることになる (すなわち k に近い同程度の波数間の相互作用が効くという意味で局所的相互作用に相当する)。

いまランダム力のエネルギースペクトル

$$E_F(k) \propto F(k)k^{d-1} = k^{-y+d-1} = k^{3-\epsilon} \quad (3.48)$$

を、単位質量、単位時間あたり波数バンド I_n のモードに注入する運動エネルギーとして規格化したとする。上の議論から、乱流の定常状態が実現するには s の大きさによって2つの場合がある。 $s > 1$ の場合には、 k でのエネルギーインプットが渦粘性による散逸というしかたで高波数へエネルギーが輸送され、直接 k_c 近傍モードの励起となることで定常状態が維持される:

$$\nu_{k_c} k^2 E(k) \simeq E_F(k). \quad (3.49)$$

¹⁰ 第5, 6, 7項は足してゼロ, また $k/\Lambda \ll 1$ のとき第4項は第3項に比べて小さい。

¹¹ べき的に分割された波数空間で ν_k などを考えているため dp でなく $d \log p = dp/p$ となる。

(3.46) と組み合わせれば,

$$E_F(k) \propto k^{s+2} \quad (3.50)$$

である。一方, $s < 1$ のときには, バンド I_1 に加えられたエネルギー・インプットは局所的な波数間の相互作用によりバンド I_2 に輸送される (local cascade). この特性時間は $\tau_1 \sim (\nu_{k_1} k_1^2)^{-1}$ である。バンド I_2 では E_F からのエネルギー・インプットと I_1 からのエネルギー・輸送があるから, これらを足しあわせたものが特性時間 $\tau_2 (< \tau_1)$ の間にバンド I_3 へ輸送される。いわばバケツリレー的な輸送方法である。するとモード k では k_0 から k までのすべてのエネルギー・インプットをまとめて引き受けて高波数へ渡すというしかたで釣り合うことになるから

$$\nu_k k^2 [kE(k)] \simeq \int_{k_0}^k E_F(p) dp \quad (3.51)$$

という形をとる。(3.47) より,

$$E_F(k) \propto k^{3(s+1)/2}. \quad (3.52)$$

もし $s = -5/3$ ならば, $E_F(k) \propto k^{-1}$ となる。しかし, この $E_F(k)$ を (3.51) に使うならば右辺は $\ln(k/k_0)$ となるのでエネルギー・スペクトルは

$$E(k) \propto k^{-5/3} [\ln(k/k_0)]^{2/3} \quad (3.53)$$

となる。

上の議論を前節の $y > -2$ のときと比べて見よう。 $\epsilon = y + 4 - d$ であるが, いま $d = 3$ に固定して考えることにする。ランダム力のスペクトルは (3.48) であるが, これを (3.50) と比べれば $s = 1 - \epsilon$ であるから, $s > 1$ は $\epsilon < 0$ に対応することがわかる。したがって $\epsilon < 0$ のときには高波数側の励起エネルギーが大きいので, 非局所相互作用としての渦粘性の表現が有効に働くことになることを意味している。言葉を変えていうと, k に対して $p (\gtrsim \Lambda \gg k)$ のモードが効くからスケールの分離があるということになる。このことは $y = -2$ の場合や $y < -2$ の場合のスケーリングについてもあてはまる (ただしくりこまれた粘性係数の値は異なる)。そして他の非線形項が線形項に比して相対的に小さくなるため誤差の評価 (誤差のコントロール) が可能である。これがくりこみ群の大きな魅力の1つである。

同様に (3.48) を (3.52) と比べれば, $s < 1$ は $\epsilon > 0$ に対応することがわかる。したがって $\epsilon > 0$ のときには, 低波数に大きなエネルギーがあるために, 同程度のサイズの流体要素の相互作用 (局所的相互作用) によるエネルギー・輸送の方が渦粘性による輸送より卓越する。すなわち, Λ より大きい波数へのエネルギー・輸送においては $k \ll \Lambda$ ではなく $k \lesssim \Lambda$ のモードが重要な働きをしている。従ってスケールの分離はない。また摂動展開においては全ての項が同じ強さ (中立) で入ってくるので, $\epsilon = O(1)$ のときには誤差評価ができない。

4 Yakhot & Orszag の理論

通常, くりこみ群による解析では興味のある物理量のスケーリング指数が決まるだけであるが, Yakhot & Orszag (1986) は FNS の理論を変形して慣性領域における Kolmogorov スペクトル $E(k) = K \bar{\chi}^{2/3} k^{-5/3}$ のべき $-5/3$ だけでなくその係数 K まで求めた。

議論を $y > -2$ に限定し, いったん (2.20) のところまで戻ろう。 $\Lambda' < k < \Lambda$ の自由度を消去した後, $k \ll \Lambda$ においてはくりこまれた粘性

$$\delta\nu(k) \equiv \nu(\Lambda') - \nu(\Lambda) = -\frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2(\Lambda)} \bar{A}_d \Lambda^{-(\epsilon+1)} \delta\Lambda, \quad (4.54)$$

を得る。ここで $\delta\Lambda = \Lambda - \Lambda' = (e^{\epsilon\ell} - 1)\Lambda/\epsilon$ である。 D, λ にはくりこみはない。(4.54) を波数空間内の厚さ $\delta\Lambda$ の球殻内の自由度を消去したときの渦粘性 $\nu(\Lambda)$ の増分 $\delta\nu(\Lambda)$ とみなせば, Λ についての常微分方程式を得ることができる。これを $\nu(\infty) = 0$ のもとで解くと

$$\nu(\Lambda) = \left(\frac{3\lambda_0^2 D_0 \bar{A}_d}{\epsilon \Lambda^\epsilon} \right)^{1/3} \quad (4.55)$$

となる。この表現は本来 $k \ll \Lambda$ でのみ有効なのだが, ここで一気に $k \rightarrow \Lambda$ にまで (4.55) を内挿する。すると k に依存した渦粘性 $\nu(k)$ を得ることになる:

$$\nu(k) = \left(\frac{3D_0 \bar{A}_d}{\epsilon} \right)^{1/3} k^{-\epsilon/3} = \beta \bar{\chi}^{1/3} k^{-4/3}, \quad \beta = \left(\frac{3D_0 \bar{A}_d}{3\bar{\chi}} \right)^{1/3}. \quad (4.56)$$

ここで $\epsilon = 4, \lambda_0 = 1$ と置いた. $k \rightarrow \Lambda$ に内挿された渦粘性を持つくりこまれた方程式においては他の全ての非線形項は小さいとして無視すると, $\nu(k)$ を用いた応答関数

$$G_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = (-i\omega + \nu(k)k^2)^{-1} P_{ij}(\mathbf{k}) \quad (4.57)$$

を使って速度の相関関数 $Q_{ii}(\mathbf{k})$ は

$$\begin{aligned} Q_{ii}(\mathbf{k}, \omega) &= G_{ia}(\mathbf{k}, \omega) G_{ib}(-\mathbf{k}, -\omega) \langle f_a(\mathbf{k}, \omega) f_b(-\mathbf{k}, -\omega) \rangle \\ &= \frac{2(d-1)D_0}{\omega^2 + \nu^2(k)k^4} k^{-\nu} \end{aligned} \quad (4.58)$$

と表わされる. エネルギースペクトルは ω で積分して

$$E(k) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} S_d(k) Q_{ii}(\mathbf{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = K \bar{\chi}^{2/3} k^{-5/3}, \quad (4.59)$$

$$K = \frac{1}{2(2\pi)^d} \left(\frac{4(d-1)^3 A_d^3 D_0^2}{3 \bar{A}_d \bar{\chi}^2} \right)^{1/3} \quad (4.60)$$

となる. このままでは Kolmogorov 定数 K も β も決まらないので, スペクトル理論によるエネルギー流束関数 $\Pi(k)$ を使う. 詳しい計算は後藤 (1998) にゆずって, 結果のみを示すと

$$K^2 = 5.2534\beta \quad (4.61)$$

を得る. この式と (4.56), (4.60) から 2 つの定数を決めることができ, 結果は $d = 3$ において

$$K = 1.113, \quad \beta = 0.236. \quad (4.62)$$

この値は実験値 $K = 1.62 \pm 0.17$ (Sreenivasan 1995) と比べるとかなり低い. Yakhot & Orszag (1986) は, $k^{-5/3}$ を導くときには $\epsilon = 4$ を使いながら, Kolmogorov 定数を $K = 1.617$ と求める際には $\epsilon = 0$ とおくというかなり強引なことをしている¹².

上の議論からわかるように, 彼らの方法の本質は, 高波数の自由度の消去による $k \ll \Lambda$ での渦粘性表現とその $k \rightarrow \Lambda$ への内挿 (スケーリングはしない), そして波数間のエネルギー輸送に関するスペクトル理論の枠組み (慣性領域では $\Pi(k) = \bar{\chi}$ であること) を持ち込んで Kolmogorov 定数を決めることにある. だから厳密な意味ではなくくりこみ群ではなく, 渦粘性表現を用いたスペクトル理論の変形と考えたほうがより正確である (Kraichnan 1987a,b, Eyink 1994). そうだとすれば, これはずいぶんと問題の多い理論といわなければならない. Euler 的な理論にも関わらず Lagrange 的な特性時間 $\tau_k \sim \bar{\chi}^{-1/3} k^{-2/3}$ と Kolmogorov スペクトルを出すのは, 論理的な矛盾である¹³. また第 5 章で述べたように Lagrange 的な応答関数の緩和時間 τ_k には高波数成分の影響 (渦粘性として非局所的相互作用) のみならず, k 以下の低波数のモードによるトータルなストレイン $\int_0^k p^2 E(p) dp$ による影響 (これは局所的相互作用) が取り込まれるべきであるにも関わらず Yakhot & Orszag (1986) の理論では渦粘性しか取り込んでいない (Gotoh & Kaneda 1988).

5 乱流におけるくりこみ群の困難

Yakhot & Orszag (1986) に刺激されてさまざまなくりこみ群の乱流への応用が考えられてきた. その動機には, 臨界点近傍でのスケーリング則が解析的に導けたように, 同じことが乱流の場合にもできるのではないかという期待や, くりこみ群のスキームが乱流のサブグリッドモデリングの発想と極めて近いために, 乱流の数値計算に使えるのではないかという強い期待があると考えられる. しかしこれまでの説明にも顔をのぞかせていた幾つかの問題点もある. ここでは, 乱流におけるくりこみ群において問題点とされている主なものを整理しておこう.

¹² $k \ll \delta \Lambda \ll \Lambda$ でなく, $\delta \Lambda \ll k \ll \Lambda$ として解析を行いその後 $k \rightarrow \Lambda$ とすると $K = 1.32$ となる. このとき Navier-Stokes 方程式は図 4 の右辺第 4 項目まで含み, またランダム力も図 5 の右辺第 3 項目まで取り込むことになる (Nakano 1992).

¹³ くりこみ群ではガリレイ不変性により $\lambda = 1$ であったのに Y&G の理論が Euler 的であるというのは一見奇妙に思えるかも知れない. くりこみ群で扱う Navier-Stokes 方程式は速度の振幅の式であり, くりこまれた式がガリレイ不変性を持つのはもったもなことである. 誤りは, 相関関数を考えるときに Lagrange 的でなく Euler 的相関をとってしまうところにある.

1. 誤差の評価

(2.45) からわかるように $E(k) \propto k^{-5/3}$ は $\epsilon = 4$ の時であり, $\bar{\lambda} \propto \epsilon^{1/2}$ であるから, $\bar{\lambda}$ のべき展開の高次の項は全て $O(1)$ である. すなわち誤差のコントロールができなくなる. これはスペクトル理論で出会ったのと同じ困難である.

2. 高波数における特性時間

高波数 k のモードにおける低波数の影響は移流と引き伸ばしである. もし高波数でなく, 低波数側から自由度を消去すると, 速度の振幅の式を扱うとはいえ, 本質的に Lagrange 的な取り扱いを必要とする. なぜなら, もし Euler 的なくりこみをする, 引き伸ばしによる真の特性時間が低波数の移流による sweeping 効果によって短く見積られてしまうからである.

3. 局所相互作用の無視

くりこみ群では $k \ll \Lambda, \omega \rightarrow 0$ の極限で $p > \Lambda$ のモードの影響を考えた. $\epsilon < 0 (s > 1)$ の時には, スケールの分離があるとみなせるのでこの極限をとることに問題はない. しかし $\epsilon > 0 (s < 1)$ の時には, 波数間の相互作用は局所的であり, $k \lesssim \Lambda$ のモードが重要である (スケールの分離がない) ので注意が必要である. 実際, 数値計算やスペクトル理論からエネルギー輸送においては局所的な相互作用がより支配的であることがわかっている (Domaradzki & Rogallo 1990, Kraichnan 1976). 従ってこれまでの乱流におけるくりこみ群は一番大切な局所的相互作用をとりあげずに, 渦粘性の形になるいわば都合のよい項のみをとりだしているにすぎない.

4. 間欠性

一般にエネルギー輸送が波数空間における局所的な相互作用による場合, カスケードステップの増加と共に間欠性が増大してくる. これがくりこみ群で取り扱えるかどうかは疑わしい. 例えば図 6 は $S = \omega^2/2 - \sigma^2 (= \nabla^2 p, \sigma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2)$ を可視化したものであるが, 渦度や速度勾配が大きな値をもつ領域がある特徴的な構造と空間配置をもつことを示している. このことは, 波数空間の広いバンドにわたってフーリエ係数間にきわめて強い相関が存在することを意味している. 一方, くりこみ群では波数空間を小さな波数バンドに分けて, バンドごとにランダム力が Gaussian であるとして平均をとり, 渦粘性の形をした非局所的相互作用のみを取り上げている. これではバンド間の相関は絶ち切られてしまう. 従って, このような方法では高次相関などをいくら計算しても本来の相関を正しく扱えることはできないと考えられる.

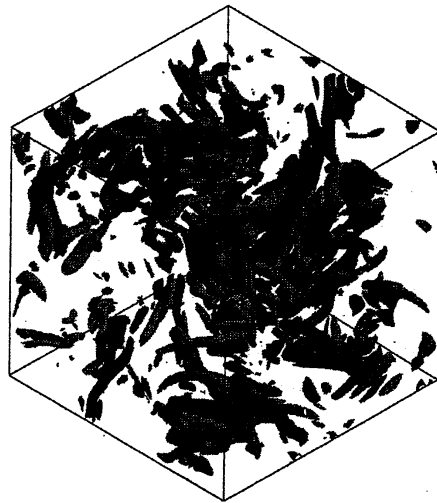


Fig.6 Domains of the source term $S(x)$ of the Poisson equation for the pressure at $Re_\lambda = 68$. Red: $S/\sigma_S = 2.0$, blue: $S/\sigma_S = -1.5$

5. 振幅の決定

実際の乱流の計算, 予測, 制御においてはスケーリングだけでなく, Subgrid scale のモデル化には揺らぎの具体的な振幅や係数の評価を必要としている. 従って, くりこみ群が真に評価されるにはこれに答えることが必要である.

これらの点を見るかぎり乱流におけるくりこみ群は成功しているというにはまだ程遠いといわざるを得ないだろう. しかし, Kolmogorov (1941) の理論は慣性領域で速度差の n 点分布関数 P_n がある普遍的な無次元関数 Φ_n を用いて

$$P_n(\delta u_1, \dots, \delta u_n) \Pi_{\alpha=1}^n d(\delta u_\alpha) = (\bar{\chi} r)^{n/3} \Phi_n(w_1, \dots, w_n; r_1/r, \dots, r_n/r; \tau_1/\tau_r, \dots, \tau_n/\tau_r) \Pi_{\alpha=1}^n dw_\alpha, \quad (5.63)$$

$$w_n = \delta u_n / (\bar{\chi} r)^{1/3}, \quad \tau_r = \bar{\chi}^{-1/3} r^{2/3}, \quad (5.64)$$

と表わされることを述べている。これは見方を変えれば分布関数 P_n が不動点で満たす方程式となっているともとれる (Eyink 1994)。もしその見方が正しいとするならば、有限の不動点を持ち局所的な相互作用を正しく扱える乱流のくりこみ群が作れる可能性を示唆しているように見える。

すでに述べたように、乱流は我々の日常生活と密接に結びついており、この問題の解決は身近におこる極めてありふれた流体物理現象の理解にとどまらず、我々の生活にその予測と制御をととして極めて大きな影響をもたらす。例えば約 1 万キロにわたる大陸間を航行する大型航空機は、乱流による空気抵抗を 1% 減少させることにより、さらに 100 キロ余分に飛ぶことができる。これによる、経済効果そして排出される CO_2 の減少による大気と気候への影響は大きいであろう。このようにみると、くりこみ群をふくむ乱流理論のさらなる発展が切実に望まれていることがわかる。今後、この物理学上の難問に挑戦する人々が増えて 21 世紀にはこの問題が解決されることを期待したい。

参考文献

- [1] 後藤 俊幸: 乱流理論の基礎 朝倉書店 (1998).
- [2] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov and A. N. Vasiliev: *The Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence*. (Gordon and Breach Science Publishers), (1999).
- [3] C. DeDominicis and P. C. Martin: Phys. Rev. A **19** 419 (1979).
- [4] J. A. Domaradzki and R. S. Rogallo: Phys. Fluid A **2**, 413 (1990).
- [5] G. L. Eyink: Phys. Fluids **6**, 3063 (1994).
- [6] D. Forster, D. R. Nelson and M. J. Stephen: Phys. Rev. Lett. **36** 867 (1976).
- [7] D. Forster, D. R. Nelson and M. J. Stephen: Phys. Rev. A **16** 732 (1977).
- [8] B. Galperin and S. A. Orszag: *Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows*. (Cambridge University Press), (1993).
- [9] T. Gotoh and Y. Kaneda: 数理解析研講究録 **661** 231 (1988).
- [10] T. Gotoh, Y. Kaneda and N. Bekki: J. Phys. Soc. Jpn. **57**, 866 (1988).
- [11] Y. Kaneda: J. Fluid Mech. **107** 131 (1981).
- [12] Y. Kaneda: Phys. Fluids. **29** 701 (1986).
- [13] A. N. Kolmogorov: Dokl. Akad. Nauk SSSR **30** 301 (1941a).
- [14] A. N. Kolmogorov: Dokl. Akad. Nauk SSSR **32** 16 (1941b).
- [15] R. H. Kraichnan: J. Fluid Mech. **5** 497 (1959).
- [16] R. H. Kraichnan: Phys. Fluid. **8** 575 (1965).
- [17] R. H. Kraichnan: Phys. Fluid. **9**, 1728 (1966).
- [18] R. H. Kraichnan: J. Atmos. Sci. **33** 1521 (1976).
- [19] R. H. Kraichnan: Phys. Rev. A **25**, 3281 (1982).
- [20] R. H. Kraichnan: Phys. Fluids. **30** 1583 (1987a).
- [21] R. H. Kraichnan: 1987b Phys. Fluids. **30** 2400 (1987b).
- [22] V. S. L'vov and I. Procaccia: 1994 *Lecture Notes of the Les Houches 1994 Summer School*.
- [23] S. K. Ma and G. Mazenko: Phys. Rev. B **11** 4077 (1975).
- [24] M. Millionshtchikov: C. R. Acad. Sci., U.R.S.S. **32** 615 (1941).
- [25] A. S. Monin and A. M. Yaglom: *Statistical Fluid Mechanics*. (Cambridge MIT press), 1971.
- [26] T. Nakano: J. Phys. Soc. Jpn. **61** 3994 (1992).
- [27] T. Nakano and F. Tanaka: Prog. Theor. Phys. **65** 120 (1981).
- [28] S. T. Orszag: *Lectures in the Statistical Theory of Turbulence*, Les Houches Summer School of Theoretical Physics, eds. R. Balian and J. L. Peube, (Gordon & Breach, 1977).
- [29] I. Proudman and W. H. Reid: Phil. Trans. Roy. Soc. **A247** 163 (1954).
- [30] J. Smagorinsky: Mon. Wea. Rev. **91** 99 (1963).
- [31] K. R. Sreenivasan: Phys. Fluids **7** 2778 (1995).
- [32] T. Tatsumi: Proc. Roy. Soc. **A239** 16 (1957).
- [33] T. Tatsumi, S. Kida and J. Mizushima: J. Fluid Mech. **85** 97 (1978).
- [34] V. Yakhot and S. A. Orszag: J. Sci. Comput. **1** 3 (1986).
- [35] Y. Zhou, W. D. McComb and G. Vahala: "Renormalization Group in Turbulence: Historical and Comparative Perspective," ICASE report. <http://www.icas.edu> 1997.