

ある sphere bundle の特性数の

S^1 -spin-cobordism 不変性

北大 理 鈴木 治 夫

§1 序

X を differentiable manifold, $S^1 \cong \text{円周 } \{z \mid |z|=1\}$ とするとき, X の上の differentiable S^1 -action は differentiable map $\mu: S^1 \times X \rightarrow X$ で, $\mu(z_1, \mu(z_2, x)) = \mu(z_1 z_2, x)$, $\mu(1, x) = x$ となるものである. S^1 のすべての元によって不変な X の真全体を X^{S^1} とかく。

Y は (境界をもたない) connected compact oriented differentiable manifold で differentiable S^1 -action をもち, $Y^{S^1} = \emptyset$ となるものとする. Y' は Y と同様の性質をもつ別の manifold とし, Y' の orientation を逆にしたものを $(-Y')$ とかく. Differentiable S^1 -action をもつ compact differentiable manifold W が存在し, $W^{S^1} = \emptyset$, $\partial W = Y \cup (-Y')$ かつ $Y, (-Y')$ 上の S^1 -actions が W の上の S^1 -action の制限となつているとき, Y, Y' は S^1 -cobordant, または同一 S^1 -cobordism class に属するといふ. Y, Y' が W

に一意的 spin-structures が定まり [1], Y, Y' に local spin-numbers による Atiyah-Hirzebruch invariant P [2, 3] が定義される場合を考える。 Y, Y' が compact connected oriented differentiable manifold M, M' 上の或る n 次元 complex vector bundles ξ, ξ' に associated な sphere bundles の構造をもつとき, P の不変性を用いて, ξ, ξ' の Chern numbers の中で, 一致するものを見出すことができる。

§2 Fiber bundle の構造をもつ manifolds

M は compact connected oriented $2k$ 次元 differentiable manifold とする。 ξ を M 上の differentiable n 次元 complex vector bundle とし, その構造群が n -torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 \subset U(n)$ なるものとする。即ち $\xi \cong \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$, ξ_i は M 上の differentiable complex line bundle とする。 X_ξ を ξ の associated $2n$ -disk bundle とする。 X_ξ は境界をもつ $2(n+k)$ 次元 compact connected oriented differentiable manifold となる。 Y_ξ を ξ の associated $(2n-1)$ -sphere bundle とする。 Y_ξ は $2(n+k)-1$ 次元 compact connected oriented differentiable manifold で, 明らかに, X_ξ の境界 $\partial X_\xi = Y_\xi$ である。 S^1 の元の 2 乗と diagonal map $S^1 \rightarrow S^1 \times \cdots \times S^1$ との結合により, S^1 は X_ξ の上に作用し, Y_ξ の上の作用を引きおこす。この S^1 -action に関して, $(Y_\xi)^{S^1} = \emptyset$ 。一方 $(X_\xi)^{S^1}$ は X_ξ の 0-section と一致し, 1 を加えて M

と同型な differentiable manifold とする。

次に, $H^1(X_3; \mathbb{Z}_2) = H^1(Y_3; \mathbb{Z}_2) = 0$, $w_2(X_3) = w_2(Y_3) = 0$ と仮定する。

このとき, X_3, Y_3 の上に同型を除いて一意的に spin-structures が定まる。このような条件を満たす M , ξ は容易に見出される。 $n=1$ に対しては, $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$, $w_2(M) \neq 0$ なる M にとり, $w_2(M) = c_1(\xi) \bmod 2$ なる ξ をとる。 $n \geq 1$ に対しては, $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$, $w_2(M) = 0$ なる M にとり, $c_1(\xi) \equiv 0 \bmod 2$ なる ξ とればよい。

X_3 における $(X_3)^{S^1}$ の normal bundle $N((X_3)^{S^1})$ は ξ に同型で, その fiber のベクトル空間において, $z \in S^1$ は複素数 z^2 の積として作用するから, この作用の固有値は z^2 となる。このとき, $z \in S^1$, $z \neq \pm 1$ に対して, Atiyah-Hirzebruch invariant [2, 3]

$$(1) \quad \rho(z, Y_3) = \text{Spin}(z, (X_3)^{S^1}) \\ = (-1)^{(k+n)} \hat{\sigma}(M) \prod_{i=1}^n (z^i e^{x_i/2} - z e^{-x_i/2})^{-1} [M]$$

が得られる。ここで $x_j = c_1(\xi_j)$ は ξ_j の first Chern class ($j=1, 2, \dots, n$) と, $\hat{\sigma}$ は characteristic series,

$$\frac{x/2}{\sinh x/2} = \frac{x}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$$

をもつ multiplicative sequence である。 $\hat{\sigma}$ の定義によつて,

$$\hat{\sigma}(M) = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{A}_r(p_1(M), \dots, p_r(M)),$$

$\hat{A}_r(p_1(M), \dots, p_r(M)) \in H^{4r}(M; \mathbb{Q})$ は Pontryagin class $p_i(M)$ に關する有理係数多項式である。

§3 S' -spin-cobordisms

Y, Y' を同一次元 $\bar{n}$ compact connected oriented differentiable manifolds と

$$H^1(Y; \mathbb{Z}_2) = H^1(Y'; \mathbb{Z}_2) = 0, \quad w_2(Y) = w_2(Y') = 0$$

なるものとする。また、 Y, Y' の上に S' が differentiable 作用し、 $Y^{S'} = Y'^{S'} = \emptyset$ とする。Differentiable S' -action を持つ compact differentiable manifold W が存在し、 $W^{S'} = \emptyset$

$$H^1(W; \mathbb{Z}_2) = 0, \quad w_2(W) = 0$$

$$\partial W = Y \cup (-Y')$$

で、 ∂W 上の S' -action は $Y, (-Y')$ 上の S' -actions と一致するものとする。このとき、明らかに Y, Y' および W の上に、同型を除き一意的に spin-structures が定まる。この意味で、上の条件が満たされると、 Y, Y' は S' -spin-cobordant または同一 S' -spin-cobordism class に属するということ。

定理 1 (Atiyah-Hirzebruch [2]) Y, Y' が S' -spin-cobordant ならば、 $P(\mathbb{Z}, Y) = P(\mathbb{Z}, Y')$ 。

この定理を用いて § の invariant Chern characteristic number を見出すのであるが、その前に次の補題を示しておく。

補題 $x \in H^2(M; \mathbb{Z})$ に対し、

$$(z^{-1}e^{x/2} - ze^{-x/2})^{-1} = (z^{-1} - z)^{-1}(1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k), \quad z \neq \pm 1.$$

ただし z は変数

$$z' = (z^{-1} + z) / (z^{-1} - z)$$

に関する有理係数 i 次多項式で、その i 次の項は

$$(-1/2)^i (z')^i$$

となる。

この補題を用いて次の主定理が証明される。

定理2 §2 における記号の下で、

$$H^1(X_{\mathbb{Z}}; \mathbb{Z}_2) = H^1(Y_{\mathbb{Z}}; \mathbb{Z}_2) = 0, \quad w_2(X_{\mathbb{Z}}) = w_2(Y_{\mathbb{Z}}) = 0$$

ならば、

$$\begin{aligned} \rho(z, Y_{\mathbb{Z}}) &= \text{spin}(z, (X_{\mathbb{Z}})^{\mathbb{Z}_2}) \\ &= (-1)^{(R+n)} (z^{-1} - z)^n F, \quad z \neq \pm 1 \end{aligned}$$

となる。ただし、 F は $z' = (z^{-1} + z) / (z^{-1} - z)$ に関する有理係数 R 次多項式で、その $(z')^k$ の係数は、 $x_i = c_i(\mathbb{Z}_2)$ とおくと、

$$(-1/2)^k \left(\sum_{l_1 + \dots + l_n = k} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \right) [M]$$

である。

$\sum_{l_1 + \dots + l_n = k} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$ は $x_1, \dots, x_n$ に関する k 次対称多項式で、したがって、基本対称多項式、即ち Chern classes $c_1(\mathbb{Z}_2), \dots, c_n(\mathbb{Z}_2)$ の整係数多項式となる。このようにして得られる Chern classes の多項式を

$$(2) \quad P_k(c_1, \dots, c_n)$$

とかく。

ξ'_i is compact connected oriented differentiable $2k$ 次元 manifold M' 上の differentiable complex line bundles, $\xi' = \xi'_1 \oplus \dots \oplus \xi'_n$ とする。

§2 における X_ξ, Y_ξ と同様に, differentiable S' -manifolds $X_{\xi'}, Y_{\xi'}$ を構成し, $H'(X_{\xi'}, \mathbb{Z}_2) = H'(Y_{\xi'}, \mathbb{Z}_2) = 0$, $w_2(X_{\xi'}) = w_2(Y_{\xi'}) = 0$ なるようにする。 $Y_\xi, Y_{\xi'}$ が S' -spin-cobordant ならば, 定理 1 によって,

$$P(z, Y_\xi) = P(z, Y_{\xi'})$$

だから, $F(Y_\xi)$ および $F(Y_{\xi'})$ における z' の最高次 (または) の項の係数は一致しなければならない。 故に次の結論を得る。

定理 2 の系 $P_k(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)) [M] = P_k(c_1(\xi'), \dots, c_n(\xi')) [M']$ 。

定理 2 の証明の outline.

$$\begin{aligned} (-1)^{(k+n)} P(z, Y_\xi) &= \hat{\sigma}(M) (z^{-1} - z)^{-n} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i x_i + \dots + \alpha_k (x_i)^k) [M] \\ &= (z^{-1} - z)^{-n} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \hat{A}_j(M) \right) \left(\sum_{l_1 + \dots + l_n = k-j} \alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \right) [M] \end{aligned}$$

となるから,

$$F = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \hat{A}_j(M) \left(\sum_{l_1 + \dots + l_n = k-j} \alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \right) [M]$$

は, z' に関する有理係数多項式で, F における z' の最高次 (または) の項の係数は補題により

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{l_1 + \dots + l_n = k} \alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \right) [M] \\ &= \left(\frac{-1}{2} \right)^k \left(\sum_{l_1 + \dots + l_n = k} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \right) [M] \\ &= \left(\frac{-1}{2} \right)^k P_k(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)) [M] \end{aligned}$$

となる。 証明終。

この結果は, differentiable structures Σ かつ compact connected ori-

ented $2k$ -元 manifold 上の n -次元 complex vector bundles の同型の判定条件に適用される。 $n=1$ の場合は [4] 参照。

定理 2 系の $\Sigma' \in M$ と異なる manifold M' 上の complex vector bundle に与えられることにより、服部晶夫氏の助言を得た。

参考文献

- [1] M. F. Atiyah and R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II. Applications, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 451-491.
- [2] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, Spin-manifolds and group actions, Essays on Topology and Related Topics (Memoires dédiés à Georges de Rham), Springer, New York 1970, 29-47.
- [3] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Index of elliptic operators III, Ann. of Math. (2) 87 (1968), 536-604.
- [4] H. Suzuki, A note on S^1 -acting cobordisms, to appear.