

Tight 4-design について

阪大 数理学部 野田隆三郎

$v \geq k + \lambda$ とみたす $2\lambda - (v, k, \lambda)$ design において

$$b \geq \binom{v}{\lambda} \quad (\text{Generalized Fisher's inequality [2]})$$

が成り立つが特に等号の成り立つものは tight 2λ -design という。 $v = k + \lambda$ であるような 2λ -design は必然的に tight とは成り立たないが self-dual tight 2λ -design という。 $\lambda \geq 3$ の時には self-dual tight 2λ -design は一つも知られていない。 $\lambda = 2$ の時、つまり tight 4-design と (これはただ一つ、 $4 - (23, 7, 1)$ design (とその補 design) が存在も知られている。

tight 4-design が成り立つかという問題は面白い問題であるがこれに関して最近 伊藤昇, 榎本参衛両氏と筆者の三人の協力により次の結果を得た。

定理. $4 - (v, k, \lambda)$ ($v \geq 2k$) は self-dual tight

design とすると次のいずれかがなりたつ.

(1) $v=23, k=7, \lambda=1$

(2) ある整数 C があって

$$v = C^2 + 1$$

$$k = \frac{1}{2} \left\{ C^2 + 1 - (\sqrt{3C^2 - 2} - C) \sqrt{\frac{C\sqrt{3C^2 - 2} + 3}{2}} \right\}$$

$$\lambda = \binom{v}{2} \times \frac{\binom{k}{4}}{\binom{v}{4}}$$

と表わされる.

なお(2)における k を整数にするような C は存在したとしても高々有限個であることが知られているので tight 4-design の parameter の可能性は有限個しかない. 定理の証明については文献[1] 及びそれに先行する伊藤氏の論文を参照せよ.

参考文献

- [1] H. Enomoto, N. Ito and R. Noda : Tight 4-designs, Osaka Jour. Math. に投稿中.
- [2] Ray Chaudhuri and R.M. Wilson : On t-designs, Osaka Jour. Math Vol 12, No. 3 1975.