

学 位 審 査 報 告 書

(ふりがな) 氏 名	かねこ はじめ 金 子 元
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) LIMIT POINTS OF FRACTIONAL PARTS OF GEOMETRIC SEQUENCES (等比数列の小数部分の極限点について)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 畑 政義 准教授 穴倉 光広 教 授 池田 保 教 授

京都大学	博士 (理 学)	氏 名	金 子 元
論文題目	LIMIT POINTS OF FRACTIONAL PARTS OF GEOMETRIC SEQUENCES		

(論文内容の要旨)

与えられた等差数列の小数部分が一様分布するための必要十分条件は、その公差が無理数であるという事実の一方で、等比数列に関する判定条件は一般に未解決である。等比数列の0でない初項を ξ 、1より大きい等比を α とおく。Koksmaは、 α を固定するとき殆ど全ての ξ に対して等比数列の小数部分は一様分布することを示した。にも拘らず、与えられた ξ と α に対して $\xi\alpha^n$ の小数部分の分布を調べる問題は、歴史的に見ても Hardy や Salem が述べたように、極めて難しく興味深いディオファントス問題の1つである。

本論文において金子氏は、 α が代数的数の場合にこの問題を研究し、その等比数列の小数部分の分布、特に小数部分の極限点の分布に関して以下に述べる結果を得た。実数 x の小数部分を $\{x\}$ で表し、整数部分を $[x]$ で表す。 $\alpha > 1$ を d 次の代数的数とし、その最小多項式を $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0$ (ただし $a_d > 0$)とおく。もし、 $a_d \geq 2$ および α 以外のすべての共役元が単位円内に属するならば、ある初項 $\xi_0 \neq 0$ が存在して $\{\xi_0 \alpha^n\} < (a_d - 1)/|P(1)|$ がすべての整数 $n \geq 0$ について成立する。従って、もし右辺が1より小さいならば、このような等比数列の小数部分は一様分布しない。この主定理の証明には、金子氏自身が見い出した次の表示式が重要な役割を演じる。絶対値が1より大きい α の共役元の個数を $p \geq 1$ とし、それらを $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_p$ と表す。それ以外の $d - p$ 個の共役元 $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_d$ の絶対値がすべて1より小さいとき、

$$\{\xi\alpha^n\} = \frac{1}{a_d} \sum_{i \leq -1, j \geq 0} \rho_i(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \rho_j(\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_d) s_{i+j-n}$$

が成立する。ここで、

$$\rho_n(X_1, \dots, X_s) = \sum_{i=1}^s \left(\prod_{1 \leq j \leq s, j \neq i} \frac{1}{X_i - X_j} \right) X_i^{n+s-1}$$

であり、 n が正のときは変数 $X_1, \dots, X_s$ に関する対称多項式となる。また、 s_m は $s_m = a_d[\xi\alpha^{-m}] + \cdots + a_0[\xi\alpha^{-m-d}]$ によって定まる有界整数列である。主定理は $p = 1$ の場合であるが、この場合はさらに $\mu(\alpha; \xi_1) \leq (a_d - 1)\nu/(a_d(\alpha - 1))$ を満たす $\xi_1 \neq 0$ が存在することを示した。ここで $\mu(\alpha; \xi)$ は $\{\xi\alpha^n\}$ の全ての極限点を含むトーラス $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の最小区間の長さを表し、 $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} |\rho_n(\alpha_2, \dots, \alpha_d)|$ である。

以上が本論文の主要結果である。

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、通常の p 進展開の自然な拡張として、代数的数 α の共役元に関する対称多項式を用いて等比数列 $\xi\alpha^n$ の小数部分を表示するという独創的な方法に基づき、それまでの研究結果を以下に述べるように改良したものである。

任意の実数 $\alpha > 2$ に対して、Tijdeman はすべての整数 $n \geq 0$ で $\{\xi\alpha^n\} \leq (\alpha - 1)^{-1}$ を満たす $\xi \neq 0$ の存在を示した。また、Dubickas は右辺を、ある 2 次の α の有理関数で置き換え得ることを示し、Tijdeman の結果を改良した。主定理の結果は、定理の扱う α の場合に Tijdeman および Dubickas の結果を改良するものである。

この結果に加えて、金子氏は次に述べる新しい結果も得た。代数的数 $\alpha > 1$ に対する等比数列の小数部分の下からの評価に関しては、Dubickas による

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\xi\alpha^n\} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\xi\alpha^n\} \geq \frac{1}{\ell(\alpha)}$$

が知られている。ここで $\ell(\alpha)$ は α の reduced length である。ただし、 α が Pisot 数の場合は $\xi \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ とする。これは、 α が有理数の場合の Flatto-Lagarias-Pollington の結果を一般の代数的数に拡張した顕著な不等式であるが、これに関連して、本論文では α の共役元がすべて正である場合に、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\xi\alpha^n\}$$

の下からの新しい評価を与えた。これによって

$$\inf_{\xi \neq 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\xi\alpha^n\}$$

に関するより精密な評価が得られた。特に、ある条件を満たす Pisot 数 α に対して、超越数 ξ_0 においてこの下限が達成されることを示し、 ξ_0 と共にその下限の値を決定することに成功した。

この方法を用いて、すでに金子氏は参考論文においても、等比数列の小数部分の極限点の上からの評価を超越数論における Mahler 関数と関連して見出ししており、今後もディオファントス近似論及び超越数論における応用が期待できる有力な方法であると思われる。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成 22 年 1 月 14 日に試問を行った結果、合格と認めた。