

Cyclic Queues における Cycle time の分布計算

防衛大学校 鳥越 昇 (Torigoe Noboru)

防衛大学校 川島 武 (Kawashima Takeshi)

§1. はじめに

Cyclic Queues は、待ち行列ネットワーク理論の草創期から、研究されているモデルであるが、その Cycle time の分布については、あまり知られていない。

近年タイムシェアリング計算機のレスポンスタイムの分析のため、Cycle time を研究した報告が見られる。[1], [3], [6]

しかし、いずれも Single Server モデルを対象としている。

本報告は、これらの先駆者達の研究を、Many servers モデルに拡張し、Cycle time 分布の計算式を、平易な形で導出し、滞在時間に関する特性量を、若干の数値例で示したものである。

先ず §2 でモデルと、解析に必要な基本的結果を述べ、

§3 で Single Server モデルについて、知られている結果を紹介する。

そして § 4 で、Many Servers モデルの解析を行ない、§ 5 でその結果を、Central Server モデルに適要し、若干の、数値例を示す。

§ 2 モデルと基本的な結果

図のような、Cyclic Queues を考える。

Q_0 , Q_1 の各サーバーのサービスは、指数分布とし、規律は、

FCFS とする。

<記号>

N : 系内人数

s_0, s_1 : Q_0 , Q_1 のサーバー数

μ_0, μ_1 : Q_0 , Q_1 の各サーバーのサービス率

$$\rho = s_1 \mu_1 / s_0 \mu_0$$

$Q_0(t), Q_1(t)$: 時刻 t での Q_0 , Q_1 の状態

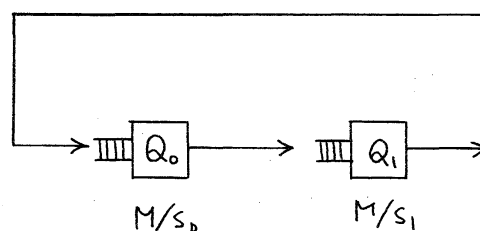
$Q(t) = (Q_0(t), Q_1(t))$: 時刻 t での系の状態

$\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ($\cdots < t_{-1} < 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots$) : Q_0 への到着時点列

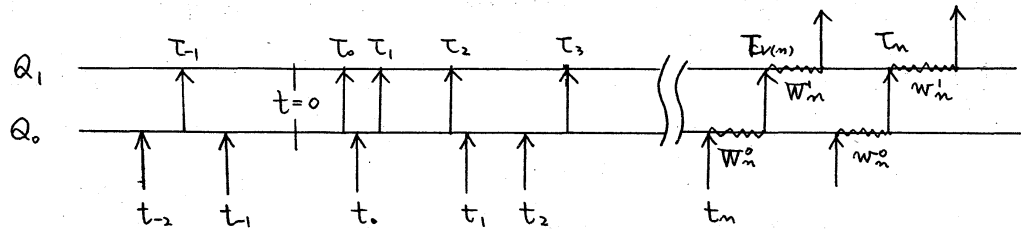
$\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ($\cdots < \tau_{-1} < 0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \cdots$) : Q_1 への到着時点列

(W_n^0, W_n^1) : t_n に到着した客の Q_0 , Q_1 での滞在時間

(w_n^0, w_n^1) : τ_n に到着した客の Q_0 , Q_1 での滞在時間



$\tau_{(m)}$: t_n で到着した客が Q_1 へ到着する時刻



平衡分布

$$P(Q(t) = (n_0, n_1)) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=0}^1 \prod_{n=1}^{n_i} \frac{1}{\mu_i(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P_N(n_0, n_1)$$

ここで $G(N)^{-1}$ は正規化定数

$$\mu_i(n) = \begin{cases} n \mu_i & (n < s_i) \\ s_i \mu_i & (n \geq s_i) \end{cases}$$

到着時点列に関して定常な分布

$$P_0(Q(t_{n+0}) = (g_0+1, g_1)) \stackrel{d}{=} P(Q(t_{n+0}) = (g_0+1, g_1) | t_0=0) = P_N(g_0, g_1)$$

$$P_1(Q(t_{n-0}) = (g_0+1, g_1)) \stackrel{d}{=} P(Q(t_{n-0}) = (g_0+1, g_1) | t_0=0) = P_{N-1}(g_0, g_1)$$

Cycle time の定義

任意の客が、 Q_0 に到着した時、他の客の並び方の確率分布が、 $P_N(g_0, g_1)$ であるという条件の下での滞在時間分布。

すなわち P_0 の下での $W_n^{(m)}$ と $w_n^{(m)}$ の同時分布

§3 Single Server の場合

< Chow, W. M の結果 [3] >

$$\begin{aligned}
 & P_0(W_n^0 \leq x, W_n^1 \leq y) \\
 &= \sum_{g_0+g_1=N-1} P_{N-1}(g_0, g_1) \int_0^x d\Pr\{W_n^0 \leq u | g_0\} \sum_{g_1'} \Pr\{Q_1(\tau_{N(n)}-0) = g_1' | W_n^0, g_0\} \\
 & \quad \int_0^y d\Pr\{W_n^1 \leq v | g_1'\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

こゝで、 $\Pr\{W_n^0 \leq u | g_0\}$, $\Pr\{W_n^1 \leq v | g_1'\}$ の計算は、容易である。

$$\text{又} \quad \Pr\{Q_1(\tau_{N(n)}-0) = g_1' | W_n^0, g_0\} \quad (2)$$

は、次のようにして計算する。

一般に到着率 μ_0 , サービス率 μ_1 の $M/M/1$ の時刻 t での状態を $X(t)$ とすると、有限時間推移確率は、

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{X(t) = j | X(0) = i\} \\
 &= \sum_{\Delta(j-i)} e^{-(\mu_0+\mu_1)t} \frac{\mu_0^n \mu_1^m t^{n+m}}{n! m!} - \sum_{\Delta(j-i-2)} e^{-(\mu_0+\mu_1)t} \frac{\mu_0^{n+1} \mu_1^{m-j-1} t^{n+m}}{n! m!} \quad (3)
 \end{aligned}$$

($\Delta(j-i)$ は $n, m \geq 0$, かつ $n-m \leq j-i$ なる n, m の集合)

と表す事ができる。[5]

とすると $Q_1(t)$ は、 $M/M/1(N)$ とみなす事ができる。

又 (2) において $\tau_{N(n)} - t_n = W_n^0$ である事と、系内数 N が一定である事から (3) において、適当に記号を変えれば

$$\Pr\{Q_1(\tau_{N(n)}-0) = g_1' | W_n^0 = u, Q_1(t_n-0) = g_0\}$$

$$= e^{-\mu_1 u} \frac{(\mu_1 u)^{N-g'_1-1}}{(N-g'_1-1)!} - \sum_{k=N}^{\infty} e^{-\mu_1 u} \frac{(\mu_1 u)^{k-g'_1-1}}{k!} \frac{(N-g_0-g'_1-\mu_1 u)(N-g_0)!}{(\mu_1 u)^{g'_1+1}(N-g_0-g'_1)!} \quad (4)$$

この事から (1) 式は

$$P_0(w_n^0 + w_n^1 \leq t) = \sum_{g_0+g_1=N-1} \int_0^t \int_0^{t-u} P_{N-1}(g_0, g_1) \sum_{g'_1} \Pr\{Q_1(\tau_{n-0}) = g'_1 | w_n^0 = g_0\} d\Pr\{w_n^1 \leq v | g'_1\} d\Pr\{w_n^0 \leq u | g_1\} \quad (5)$$

これは当然 n に無関係で、整理すると密度関数は

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\mu_1 N}{\mu_1 N - \mu_0 N} \mu_0 e^{-\mu_0 t} \frac{(\mu_0 t)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{\mu_0 N}{\mu_0 N - \mu_1 N} \mu_1 e^{-\mu_1 t} \frac{(\mu_1 t)^{N-1}}{(N-1)!} & (p \neq 1) \\ \mu_0 e^{-\mu_0 t} \frac{(\mu_0 t)^N}{N!} & (p=1) \end{cases} \quad (6)$$

< BoxMA. O.J., Donk. P の結果 [1] >

$Q(\tau_{n-0})$ の分布が $P_{N-1}(g_0, g_1)$ の条件の下で滞在時間分布は

$$P_1(w_n^0 \leq x, w_n^1 \leq y) = \sum_{g_0+g_1=N-1} P_{N-1}(g_0, g_1) \int_0^x \int_0^y d\Pr\{w_n^0 \leq u, w_n^1 \leq v | (g_0, g_1)\} \quad (7)$$

右辺第 2 項は

$$\Pr\{w_n^0 \leq u, w_n^1 \leq v | (g_0, g_1)\} = \Pr\{w_n^0 \leq u | g_0\} \Pr\{w_n^1 \leq v | g_1\} \quad (8)$$

更に (8) の右辺第 1 項は $Q(t)$ の可逆性より

$$\Pr\{w_n^0 \leq u | Q_0(\tau_{n-0}) = g_0 + 1\} = \Pr\{w_n^0 \leq u | Q(t_{n+0}) = g_0 + 1\} \quad (9)$$

(7) の分布は n に無関係に計算でき、その密度関数は、次のようになり、 $(x+y)=t$ とすれば [3] の結果と一致する。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1-p}{1-p^N} \mu_0 e^{-\mu_0 x} \mu_1 e^{-\mu_1 y} \frac{\{\mu_1(x+y)\}^{N-1}}{(N-1)!} & (p \neq 1) \\ \mu_0 e^{-\mu_0(x+y)} \frac{\{\mu_0(x+y)\}^N}{N!} & (p = 1) \end{cases} \quad (10)$$

と 3 で $V(n)$ の定義から $\{W_n^0 \leq x, W_n' \leq y\} = \{w_{V(n)}^0 \leq x, w_{V(n)}' \leq y\}$ であるが、滞在時間のエルゴード性から

$$P_0(W_n^0 \leq x, W_n' \leq y) = P_0(w_{V(n)}^0 \leq x, w_{V(n)}' \leq y) = P_1(W_n^0 \leq x, W_n' \leq y) \quad (11)$$

なる関係が一般に成立する。[4]

§4 Many Servers の場合

$Q(t)$ の推移強度関数を

$$\pi(a, b) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{Q(t+\Delta t) = b \mid Q(t) = a\}}{\Delta t}$$

とすると

$$P_N(q_0+1, q_1) \pi((q_0+1, q_1), (q_0, q_1+1)) = P_N(q_0, q_1+1) \pi((q_0, q_1+1), (q_0+1, q_1))$$

が直接計算して確かめられる。

すなわち $Q(t)$ は可逆性を有し、 $Q(t)$ の可逆性から

$$A = \{t_i = a_i, \tau_{i-1} = b_i, Q_0(t_i-0) = n_i, Q_0(\tau_{i-1}+0) = m_i, (i=1, 2, \dots)\}$$

$$B = \{\tau_i = -a_i, t_i = -b_i, Q_0(\tau_i+0) = n_i, Q_0(t_i-0) = m_i, (i=1, 2, \dots)\}$$

とすると

$$P_r\{A \mid Q_0(t_0-0) = q_0\} = P_r\{B \mid Q_0(\tau_0+0) = q_0\} \quad (12)$$

ここで $N(m_i) = \min\{m_i+1, s_0\}$ とすると、指数分布の無記憶性から、

$$P_0(t_0 \text{ に到着した客が } t_{i-1} \text{ で退去} \mid A, Q_0(t_0-0) = g_0) \\ = \frac{1}{N(m_i)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{N(m_j)} \quad (13)$$

又、 $\{B, Q_0(t_0+0) = g_0\}$ の条件の下で、 t_0 で退去した客が、 t_0 で到着した確率を考えると、 $m_i < s_0$ の時、 t_0+0 でサービス中の m_i+1 人のうちの中に注目している客が含まれている事から、確率は、 $1/(m_i+1)$ である。

又 $m_i \geq s_0$ の時、この客は、 m_i+1-s_0 人目のサービス終了と同時にサービスを、受け始める。この時サービスを受けている s_0 人のうちの 1 人がこの客である事と、指数分布の無記憶性から、確率は、 $1/s_0$ となり、この場合も (13) と同じ結果になる。すなわち、

$$P_i(w_m^0 \leq x, w_m^1 \leq y) \\ = \sum_{g_0+g_1=N-1} P_0(w_m^0 \leq x \mid Q_0(t_0-0) = g_0) P_1(w_m^1 \leq y \mid Q_1(t_0-0) = g_1) P_{N-1}(g_0, g_1)$$

これより滞在時間分布の LST は

$$E[\exp(-\theta_0 w_m^0 - \theta_1 w_m^1)] \\ = \sum_{g_0+g_1=N-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_0}{s_0 \mu_0}} \right)^{I_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_0}{\mu_0}} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_1}{s_1 \mu_1}} \right)^{I_1} \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_1}{\mu_1}} \right) P_{N-1}(g_0, g_1) \quad (14) \\ (\operatorname{Re} \theta_0, \theta_1 \geq 0)$$

$$I_0 = \max(g_0+1-s_0, 0) \quad I_1 = \max(g_1+1-s_1, 0)$$

w_n^0, w_n^1 の条件付独立性と (14) から、各要素は次のようになる。

$$E[w_n^j] = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{N-1}} \frac{1}{\mu_j} \left(\frac{i_j}{s_j} + 1 \right) P_{N-1}(i_0, i_1) \quad (j=0, 1) \quad (15)$$

$$E[(w_n^j)^2] = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{N-1}} \frac{1}{\mu_j^2} \left\{ \left(\frac{i_j}{s_j} + 1 \right)^2 + \frac{i_j}{s_j} + 1 \right\} P_{N-1}(i_0, i_1) \quad (j=0, 1) \quad (16)$$

$$E[w_n^0 w_n^1] = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{N-1}} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{i_0}{s_0} + 1 \right) \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{i_1}{s_1} + 1 \right) P_{N-1}(i_0, i_1) \quad (17)$$

又 Cycle time に関し 2 は

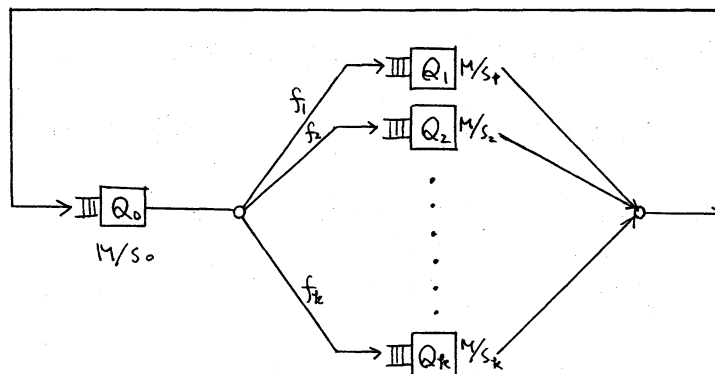
$$E[w_n^0 + w_n^1] = E[w_n^0] + E[w_n^1] \quad (18)$$

$$E[(w_n^0 + w_n^1)^2] = E[(w_n^0)^2] + E[(w_n^1)^2] + 2 E[w_n^0 w_n^1] \quad (19)$$

しかし $E[w_n^0], E[w_n^1]$ は平衡分布と Little の公式から計算できる量である。(数値例 付図)

§5 Central Server モデル

下図のような、Central Server モデルに、前節の結果を、適要する。



このモデルでは、 Q_0 を退去したお客は、確率 f_i ($i=1,2,\dots,k$) で Q_i へ行く。 Q_i は S_i のサーバーを持ち、各サーバーは、サービス率 μ_i の指数サービスを行なうものとする。

すなわち、このモデルは、前節のモデルを、自然に拡張したものと、みなす事ができる。

このモデルも又、可逆である事を示そう。

時刻 t での状態を $Q(t) = (Q_0(t), \dots, Q_k(t))$ で表わし、推移強度関数を

$$\begin{aligned} & \pi_{ij}(q_0 \dots q_i \dots q_j \dots q_k) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(Q(t+\Delta t) = (q_0 \dots q_i \dots q_{j+1} \dots q_k) \mid Q(t) = (q_0 \dots q_{i+1} \dots q_j \dots q_k))}{\Delta t} \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} & P_N(q_{0+1} \dots q_j \dots q_k) \pi_{0j}(q_0 \dots q_j \dots q_k) \\ &= \frac{1}{G(N)} \prod_{i=0}^k \prod_{n=1}^{q_i + \delta_{0i}} \frac{f_i}{\mu_i(n)} f_j \mu_0(q_{0+1}) \\ &= \frac{1}{G(N)} \prod_{i=0}^k \prod_{n=1}^{q_i + \delta_{0i}} \frac{f_i}{\mu_i(n)} \mu_j(q_j + 1) = P_N(q_0 \dots q_{j+1} \dots q_k) \pi_{j0}(q_0 \dots q_j \dots q_k) \end{aligned}$$

(δ はクロネッカーのデルタ)

この事から、このモデルにおいて、お客が $Q_0 \rightarrow Q_i$ を巡回する場合の Cycle time は、§4 で求めたものの f_i の重みをつけた値となり、系全体としては、全ての i について和をとれば、良い事になる。

すなわち、 Q_0 への番目に到着したお客様の、 Q_0 での滞在時間を w_n^0 、 Q_0 以外での滞在時間を w_n^1 とすると、L.S.T. は、

$$E[\exp(-\theta_0 w_n^0 - \theta_1 w_n^1)] \\ = \sum_{\sum_{i=1}^k i_i = N+1} \sum_{i=1}^k f_i \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_0}{s_0 \mu_0}} \right)^{I_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_0}{\mu_0}} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_1}{s_i \mu_i}} \right)^{I_i} \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta_1}{\mu_i}} \right) P_{N+1}(g_0 \cdots g_k) \\ (\operatorname{Re} \theta_0, \theta_1 \geq 0) \quad (20)$$

$$I_j = \max(g_j + 1 - s_j, 0)$$

又 § 4 同様に、各モメントは次のようになる。

$$E[w_n^0] = \sum_{\sum_{i=1}^k i_i = N+1} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{I_0}{s_0} + 1 \right) P_{N+1}(g_0 \cdots g_k) \quad (21)$$

$$E[w_n^1] = \sum_{\sum_{i=1}^k i_i = N+1} \sum_{i=1}^k f_i \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{I_i}{s_i} + 1 \right) P_{N+1}(g_0 \cdots g_k) \quad (22)$$

$$E[(w_n^0)^2] = \sum_{\sum_{i=1}^k i_i = N+1} \frac{1}{\mu_0^2} \left\{ \left(\frac{I_0}{s_0} + 1 \right)^2 + \frac{I_0}{s_0^2} + 1 \right\} P_{N+1}(g_0 \cdots g_k) \quad (23)$$

$$E[(w_n^1)^2] = \sum_{\sum_{i=1}^k i_i = N+1} \sum_{i=1}^k f_i \frac{1}{\mu_i^2} \left\{ \left(\frac{I_i}{s_i} + 1 \right)^2 + \frac{I_i}{s_i^2} + 1 \right\} P_{N+1}(g_0 \cdots g_k) \quad (24)$$

$$E[w_n^0 w_n^1] = \sum_{\sum_{i=1}^k i_i = N+1} \sum_{i=1}^k f_i \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{I_0}{s_0} + 1 \right) \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{I_i}{s_i} + 1 \right) P_{N+1}(g_0 \cdots g_k) \quad (25)$$

又 Cycle time に関し 2 と § 4 同様に容易に計算できる。

$$E[w_n^0 + w_n^1] = E[w_n^0] + E[w_n^1] \quad (26)$$

$$E[(w_n^0 + w_n^1)^2] = E[(w_n^0)^2] + E[(w_n^1)^2] + 2E[w_n^0 w_n^1] \quad (27)$$

(数値例 付図)

§ 6 おわりに

2 段の Cyclic Queue と、それに類似した Central Server モデルを比較すると、相違が見られる。特に共分散のグラフ

で着しい。今回は、これらについて検討する事はできなかったが、今後の課題とする。

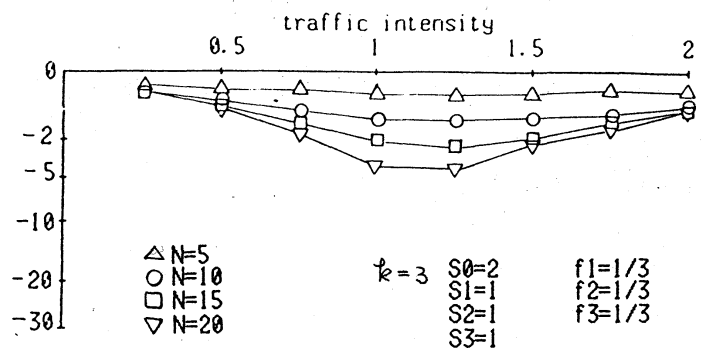
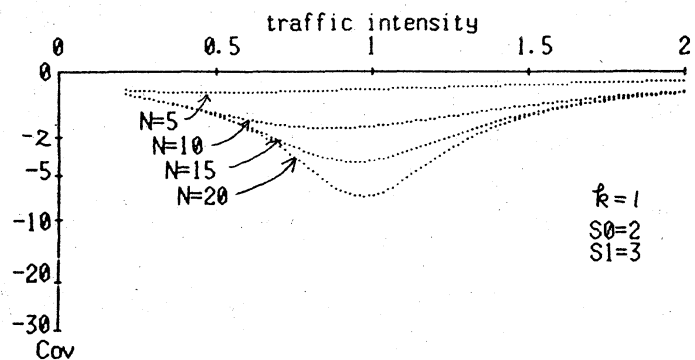
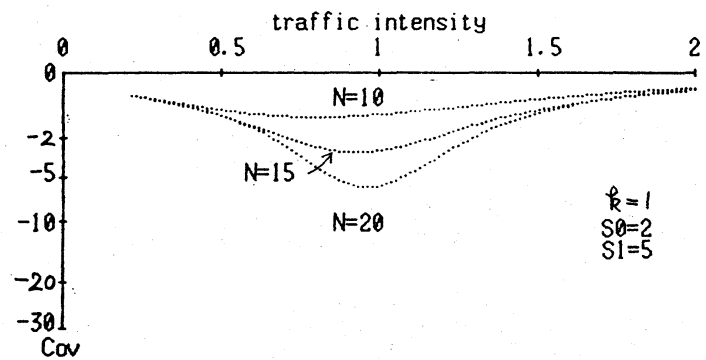
〈数値例〉

トラフィック密度

$$\rho = \frac{k \sum_{i=1}^k f_i \mu_i s_i}{s_0 \mu_0}$$

($\mu_0 = 1: \text{fix}$)

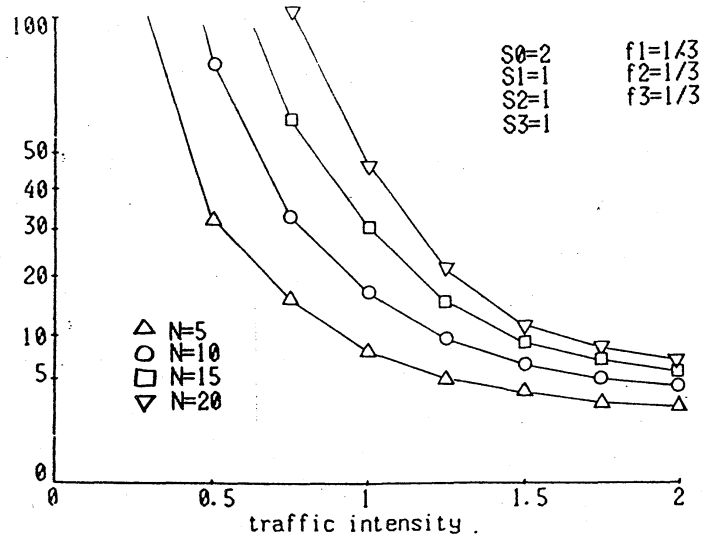
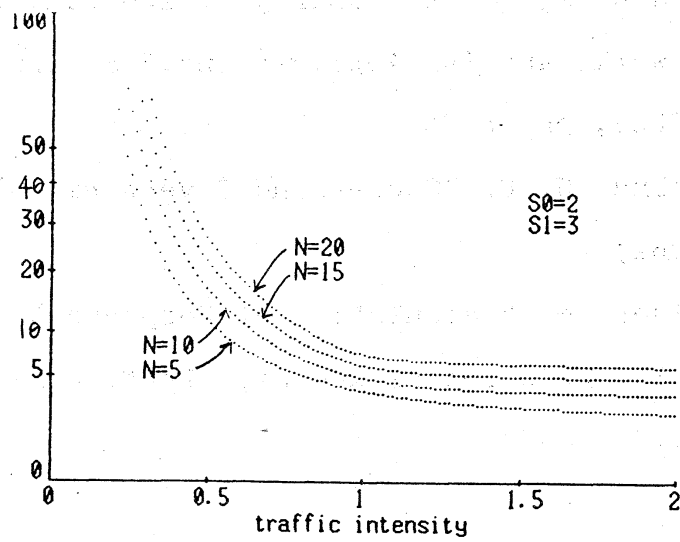
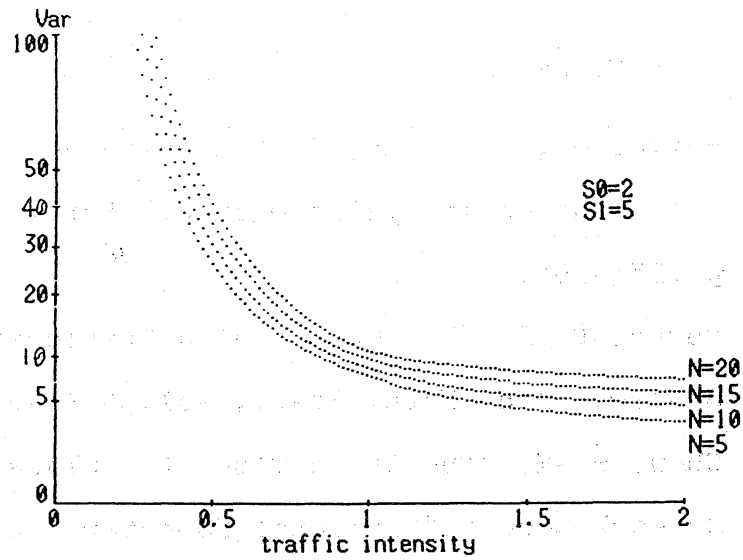
($\mu_1 = \dots = \mu_k$)



付図 1 $\text{Cov}(W_n^0, W_n^1)$

付図 2

$$\text{Var}(w_n^0 + w_n^1)$$



REFERENCES

- [1] Boxma, O., J., Donk, P. "On Responce-time and Cyclic-time Distribution in Cyclic Queues," Perf. Eval., Vol.2 (1982), pp.181-194.
- [2] Burke, P. J. "The Output of a Stationary M/M/s Queueing System," Ann. Math. Stat., Vol.39 (1968), pp.1144-1152.
- [3] Chow, W.-M. "The Cycle Time of a Class of Closed Queueing Network Models," National Computer Conf., 1978, pp.489-494.
- [4] Kawashima, T. "A Property of Two Palm Measures in Queueing Networks and Its Applications," J. Opn. Res. J., Vol.21 (1982), pp.16-28.
- [5] Prabhu, N. U. "Queues and Inventories," John Wiley, New York (1962).
- [6] Reiser, M. "Calculation of Responce-time Distribution in Cyclic Exponential Queues," Perf. Eval., Vol. 1 (1981), pp.131-133.