

$\mathbb{P}^2$ における曲線の余空間の基本群について

東大 理学部 岡 睦雄

ここでは主として Zariski 予想も念頭において得られた複素射影空間 $\mathbb{P}^2$ の曲線の余空間に関する基本群について、いくつかの結果を紹介し、詳しい証明は参照された論文と見てほしい。

(I) Reducible curve の場合.

今 $\mathbb{C}^2$ の中に 2 つの曲線 C_1, C_2 があって、互に一般の位置 (i.e. C_1 と C_2 は無限遠 $\mathbb{P}^1$ で交わらず、 $\mathbb{C}^2$ の中の交点はいずれも transverse) にあると仮定する。

定理 1 (岡-坂本 [4]) 上の仮定のもとで、 $\pi_1(\mathbb{C}^2 - C_1 \cup C_2)$ は $\pi_1(\mathbb{C}^2 - C_1) \times \pi_1(\mathbb{C}^2 - C_2)$ に同型である。

系 1. 曲線 C の既約成分 C_j ($j=1, \dots, r$) が全て正則で、各々一般の位置にあると仮定する。このとき $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ は可換群である。 ($\mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/d_0\mathbb{Z}$ と同型。ここに d_0 は各成分 C_j の次数の最大公約数。)

この系 1 と Lefschetz-Hamm の切断定理を使えば、応用として次の定理が得られる。

定理 2. $\mathbb{P}^{n+1}$ の中の正則な超曲面 V_j ($j=1, 2, \dots, r$) が

互いに一般の位置にあるとする. $V \in \bigcup_{j=1}^m V_j$ とすれば,

- (i) $\pi_1(\mathbb{P}^{n+1} - V)$ は可換で, (ii) $\pi_j(\mathbb{P}^{n+1} - V) = 0$
 $(2 \leq j \leq n)$. ([6]).

(II) Irreducible curve の場合.

既約曲線に関して殆んど知られていない. Zariski による次数 6 で, 6 の cusp 特異点をもつ, π_1 が $\mathbb{Z}_2$ と $\mathbb{Z}_3$ の自由積 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ になる例が主な結果である. 222 は次の方程式で定義される曲線の余空間の基本群に関して, 計算結果を報告します.

$$C: \prod_{j=1}^l (Y - \beta_j Z)^{\nu_j} - \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i Z)^{\lambda_i} = 0$$

ここに, X, Y, Z は $\mathbb{P}^2$ の homogeneous coordinate.

α_i, β_j は複素数. λ_i, ν_j は正の整数.

$n = \sum \nu_j = \sum \lambda_i$ は C の次数.

定理. C の特異点 $\{P_{ij} = [\alpha_i, \beta_j, 1]\}$ 以外に G は反定する. (これは $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ と一般に選ぶと, 満たされる.)

Y の時 $G \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ とする.

(i) G の center は cyclic group $\mathbb{Z}_a$ を含む.

$$a = n \cdot \frac{\lambda \nu}{\lambda \nu}; \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$$

$$\lambda = (\nu, \lambda).$$

$$(ii) \quad G/\mathbb{Z}_a \cong \mathbb{Z}_{\lambda/\lambda} * \mathbb{Z}_{\lambda/\lambda} * F(\lambda-1)$$

(ii) G の commutator group $D(G)$ は free group $\mathbb{Z}$, 特に $\lambda=1$ と $\exists$ $\lambda \neq 1$ rank $(\lambda-1)(\lambda-1)$ の free group. ([3])

この定理より得られる興味ある例は 2, 3 のみ。

(I) 可換に与る例

$$C: (Y^r - Z^r)(Y^{\lambda} - 2Z^{\lambda})^2 - \varepsilon(X^{\lambda} - Z^{\lambda})(X^m - 2Z^m)^3 = 0$$

$$(n = r + 2\lambda = \lambda + 3m; \lambda = r = 0 \text{ ではない})$$

ε は適当な複素数. G は $\mathbb{Z}_n$ と同型だが, 曲線 C は λ 個の (2,3)-cusp を持つ. この例で $G \in \text{abelian}$ の $\exists$ λ 個の cusp の数は.

n	6	7	8	9	10	11	12	13	...	100
# of cusps	4	6	8	12	15	15	20	20		165

$$\text{一般の } n \text{ に対する } \begin{cases} \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n}{3} \right] & \text{if } 6 \nmid n \\ \frac{n^2}{6} - \frac{n}{3} & \text{if } 6 \mid n \end{cases}$$

(II) 非可換, Center あり.

$$C: (X^{pr} + Z^{pr})^q + (Y^{qr} + Z^{qr})^p = 0$$

$$(p, q) = 1, \quad p, q, r \geq 2.$$

i) Center $\cong \mathbb{Z}_r$

ii) $G/\mathbb{Z}_r \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$

iii) Commutator $D(G) \cong F((p-1)(q-1))$

(free group of rank $(p-1)(q-1)$.)

$\in < 12$, $p=r=2$, $q=3 \in \neq 3 \in$. $G \cong SL(2, \mathbb{Z})$.

(III). Center $\neq \{1\}$ (非可換).

$$C: (X^p + Z^p)^2 + (Y^q + Z^q)^2 = 0.$$

(i) $G \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$

(ii) Center $= \{1\}$

(iii) $DC(G) \cong F((p-1)(q-1))$.

$2 \nmid 5817$, $p=2$, $q=3 \in \neq 3 \in$ Zannski $\rightarrow 5817$
 が得られる.

文献

- [1] Oka, M. On the fundamental group of a reducible curve in $\mathbb{P}^2$. (J. London Math. Soc. (2), 12 (1976) 229-252)
- [2] Oka, M. Some plane curves whose complements have non-abelian fundamental groups. Math. Ann. 218, 55-65 (1975).
- [3] On the fundamental group of the complement of certain plane curves (to appear)
- [4] Oka, M - Sakamoto, K: Product theorem of the fundamental group of a reducible curve (to appear).

- [5] Zariski: On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve. Amer. J. Math. 51 (1929).
- [6] OKA, M: On the topology of the complement of a hypersurface in $\mathbb{P}^{n+1}$ (to appear).
- [7] Lê - Hamm: Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure. fasc. 3. 1973.