

$f_* \omega_{M/S}$ の semi-positivity について

東大 教養 藤田 隆夫

$f: M \rightarrow S$ を代数多様体の fiber space, $\omega_{M/S}$ をその relative dualizing sheaf $\mathcal{O}_M(K_M - f^*K_S)$ とする。このとき, 小平次元の加法不等式予想と関連して ([1]) 次の予想が考えられる:

予想. 上の状況の下, $f_* \omega_{M/S}$ は S 上 numerically -semi positive であろう. (以下 n. s. pos. と略記する)

ただしここで n. s. pos. とは次の意味である:

定義. 多様体 V 上の line bundle L は, V の任意の部分多様体 W に対して $L^r \{W\} \geq 0$ ($r = \dim W$) が成立つとき, n. s. pos. と呼ばれる。 V 上の連接層 $\mathcal{F}$ は, $P(\mathcal{F}) = \text{Proj}_V \left(\bigoplus_{r=0}^{\infty} S_{\mathcal{O}_V}^r \mathcal{F} \right)$ 上の可逆層 $\mathcal{O}(1)$ (に対応する line bundle) が n. s. pos. のとき, n. s. pos. と呼ぶ。

上の予想は, S に特異ファイバーが存在しない場合には事実成立つことが Griffiths により示されている ([3])。

本講の目的は次の部分的結果につき述べることにある:

定理^([2]). $\dim S = 1$ の時には, 先の予想が事実成立つ.

以下証明方針を略述する。まず, 主に duality 理論に関連する純代数幾何的手法により, 次の補題に帰着させる。

補題. 定理の条件のもと, $\mathcal{L}$ を $f_* \omega_{M/S}$ の準同型像たる任意の可逆層とする。このとき, $\deg \mathcal{L} \geq 0$ 。

^{補題の}証明の方針. $\mathcal{L}$ を Σ に対応する line bundle とし, Σ を $f: M \rightarrow S$ の singular locus とする。 $S' = S - \Sigma$ 上の点上の fiber は非特異なので, Σ 上の Hodge 構造を用いて, $\mathcal{L}|_{S'}$ 上に自然な Hermitian norm が定義できる。しかしこの norm は Σ には一般には拡張できない。しかしながら, Σ を Σ の近傍のみで少し変形するテクニックにより, 次のような式を得る: $\deg \mathcal{L} = \int_S \omega + \sum_{p \in \Sigma} \sigma_p$. ただしここで ω は $\mathcal{L}|_{S'}$ 上の上記 norm に対し定義された曲率テンソル ($\Sigma = \emptyset$ ならこれが $\mathcal{L}$ の Chern 類を表わす), 積分は広義積分, σ_p は各 $p \in \Sigma$ に対し適当に定義された補正項。さて Griffiths 理論により $\int_S \omega \geq 0$ は示せる。また norm の p 近傍での振舞いを調べ, $\sigma_p \geq 0$ も出る。

[文献]

- [1] 筆者, 小平次元の理論の過去・現在・未来 (数学)
- [2] Fujita, T.: On Kähler fiber spaces over a curve, J. Math. Japan
- [3] Griffiths, P.: Periods of Integrals III, IHES 38