

Gibbs 測度の一般化について

(On the ergodic decomposition of hyperbolic measure)

京大・理 D1 辻井 正人

論文[P]の中で、Ya.B. Pesin は測度の双曲性の概念を導入し、多様体上のリーマン体積に対して絶対連続な双曲型の測度(後述)について非常に強いエルゴード的性質を示した。この論文の目的は論文[T]の中で述べてある上記の結果の拡張を示すことである。最初に全体を通じての設定と Pesin の結果について述べる。

設定 M : C^2 コンパクト リーマン多様体 $f: M \rightarrow M$ C^2 微分同相 μ : f -不変な確率測度**定義**

μ が双曲型であるとは、リヤプノフ指数が、 μ についてほとんどいたるところ、全て non-zero であることを言う。ただし、ここでリヤプノフ指数とは各点 $x \in M$ に対し

て、

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n v\| \quad v \in T_x M$$

のとり値の集合で、その値の個数は M の次元以下である。

定理 (Pesin [P])

μ が双曲型でリーマン体積に対して絶対連続であるとする。

そのとき、次の a), b), c) が成り立つ。

a) μ についてほとんど致るところの $x \in M$ について

$$W^{ss}(x) = \{ y \in M \mid \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log d(f^n x, f^n y) < 0 \}$$

$$W^{su}(x) = \{ y \in M \mid \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{-n} x, f^{-n} y) < 0 \}$$

は injectively immersed manifold になる。

b) 互いに交わらない可算個の Borel set Λ_i^k ($0 \leq i \leq n_k$,

$k \in \mathbb{N}$) が存在して

$$\mu\left(\bigcup_{i,k} \Lambda_i^k\right) = 1$$

$f|_{\bigcup_i \Lambda_i^k}$ は ergodic

さらに

$$f(\Lambda_i^k) = \Lambda_{i+1}^k, \quad f(\Lambda_{n_k}^k) = \Lambda_0^k$$

$f^{n_k}|_{\Lambda_i^k}$ は Bernoulli

$$c) \quad h_\mu = \int_M \chi^{(u)}(x) d\mu(x)$$

ここで $\chi^{(u)}(x)$ は正のリヤプノフ指数の重複度をこめた和である ([M, pp.265] 参照)

② c) には測度が双曲型である必要はないが、ここでは双曲型の測度のみを考える。

そこで次のようなことを考えるのは自然である。

『上の定理で μ の絶対連続性の仮定を取り除いたとき、結果 a), b), c) は成立するだろうか。』

a) は一般の場合に成り立つことが知られている。しかし、b), c) は測度 μ の分布の様子を反映していて一般には成立しない。(このことについては [L-Y] 参照。) 次のような例を考えれば明らかである。

例 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を Horse shoe map, K を F の双曲型不変集合とする。 $F|_K$ は $\{0,1\}$ を symbol とする両側無限列の集合 $B(2)$ 上の shift map と topologically conjugate であることはよく知られている。 μ_p を $\{0\}$ に確率 p を与える Bernoulli 測度とし、 μ を

$$\mu = \int_{[0,1]} \mu_p dp$$

で定義する。 K は attractor ではないから c) をみたさない。

([B], 定理 1.22 と 4.11 を参照)。また、エルゴード分解の一意性より μ は可算個のエルゴード測度に分解されない。

そこで、我々は以下で双曲測度の 1 つの class を定義し、その class については b), c) が (b) の Bernoulli 性を除いて) 成立することを示す。

定義 μ が双曲型であるとする。 μ が S -絶対連続とは $\mu(X) > 0$ なる Borel 集合 X に対し常に $W^{ss}(X) \equiv \bigcup_{x \in X} W_{\infty}^{ss}$ は正のリーマン体積をとつことである。

定理 μ が双曲型で S -絶対連続とする。このとき次の b), c) が成立する。

b) 互いに交わらない可算個の Borel set $\Lambda_i^k (0 \leq i \leq n_k, k \in \mathbb{N})$ が存在して

$$\mu\left(\bigcup_{i,k} \Lambda_i^k\right) = 1$$

$f|_{\bigcup_i \Lambda_i^k}$ は ergodic

さらに、

$$f(\Lambda_i^k) = \Lambda_{i+1}^k, \quad f(\Lambda_{n_k}^k) = \Lambda_0^k$$

$f^{n_k}|_{\Lambda_i^k}$ は Kolmogorov

$$c) \quad h_\mu = \int_M \chi^{(u)}(x) d\mu(x)$$

注意 1

$f^{n_k}|_{\Delta_k^k}$ は Bernoulli であることが期待されるが、現在のところはよくわからない。

注意 2

双曲型の測度については

研究集会の後で気付いたことであるが、 S -絶対連続の条件は、[L-Y]の中の“ μ has absolutely continuous measures on unstable manifold”と同値である。[L-Y]の中で上の条件とc)が同値であることが示されているので、双曲型の測度について

$$S\text{-絶対連続} \Leftrightarrow c)。$$

よって、双曲測度については、Pesin formula (c) がその測度の Kolmogorov 性の意味することになる。([T2])

Reference

[B] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphism. Lect. Notes. on Math 470

[L-Y] F. Ledrappier and L.-S. Young, The metric entropy of diffeomorphism. I, Ann of Math, 122, 509-539

- [M] R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer-Verlag (1987)
- [P] Ya. B. Pesin, *Lyapunov exponent and Smooth Ergodic Theory*, *Russian Math Surveys* 32 No 4 (1977) 55-114
- [T1] Tsujii, M., *On the ergodic decomposition of hyperbolic measures*, Preprint
- [T2] Tsujii, M., *Hyperbolic measures satisfying Pesin's entropy formula*, in preparation.