

Block 上での2つのノルムの同値性について

東京理科大学ポスドクトラル研究員 丹羽 美由紀 (Miyuki Niwa)

Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

1. 補間定理の歴史

1926 年, M. Riesz[12] は L_p 空間での補間定理を示した. そして後の 1938 年 G. O. Thorin[15] がこの定理を拡張したため, Riesz-Thorin の補間定理としてよく知られている. Riesz の証明は後の実補間法に, Thorin の証明は後の複素補間法の基となる.

定理 1 (Riesz-Thorin の補間定理). $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty, 0 < \theta < 1$, T は線型作用素とする. T が L_{p_0} 空間から L_{q_0} 空間へ作用素ノルム M_0 で有界, かつ, T が L_{p_1} 空間から L_{q_1} 空間へ作用素ノルム M_1 で有界ならば, T は L_p 空間から L_q 空間へ作用素ノルム $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ で有界となる. ここで $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$.

この定理に対して, 様々な拡張がなされたのであるが, その中の重要な結果のとして 1958 年の Stein-Weiss[14] による, 重みつき L_p 空間での補間定理と 1966 年の Calderón[3]-Hunt[8] による Lorentz 空間での補間定理があげられる.

定理 2 (Stein-Weiss の補間定理). $1 \leq p_0, p_1 < \infty, 0 < \theta < 1$, T は準線型作用素 ($|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$), v_0, v_1, w_0, w_1 は非負可測関数とする. T が $L_{p_0}(v_0 d\mu)$ 空間から $L_{q_0}(w_0 d\nu)$ 空間へ有界, かつ, T が $L_{p_1}(v_1 d\mu)$ 空間から $L_{q_1}(w_1 d\nu)$ 空間へ有界ならば, T は $L_p(v d\mu)$ 空間から $L_q(w d\nu)$ 空間へ有界となる. ここで $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1, v^{1/p} = v_0^{(1-\theta)/p_0} v_1^{\theta/p_1}, w^{1/q} = w_0^{(1-\theta)/q_0} w_1^{\theta/q_1}$.

定理 3 (Calderón-Hunt の補間定理). $1 \leq p_0, p_1 < \infty, 1 \leq q_0 \neq q_1 \leq \infty, 0 < \theta < 1$, T は擬線型作用素 ($|T(f+g)| \leq K(|Tf| + |Tg|)$, K は定数) とする. T が $L_{p_0 q_0}$ 空間から $L_{r_0 s_0}$ 空間へ有界, かつ, T が $L_{p_1 q_1}$ 空間から $L_{r_1 s_1}$ 空間へ有界ならば, $q \leq s$ に対して, L_{pq} 空間から L_{rs} 空間へ有界となる. ここで $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$.

一方, Lions[9, 1959 年], Lions-Peetre[10, 1960 年] らによって, Riesz-Thorin や Stein-Weiss の補間定理が Banach 空間の対 (カップル) の間の線型作用素に拡張された.

定義 4. Banach (quasi Banach) 空間 X_0 と X_1 に対して, 分離線型位相空間 $\mathcal{X}$ が存在して X_0 と X_1 が $\mathcal{X}$ に連続的に埋め込まれるとき, (X_0, X_1) は (compatible) couple になるという. (X_0, X_1) を $\bar{X}$ と表す.

- $X_0 + X_1 = \{x : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$
- $\|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1})$
- $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$

定義 5 (K -関数, K -補間空間). $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$ に対して,

$$K(t, x; \bar{X}) = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1})$$

を K -関数と言う. $0 < \theta < 1$, $0 < q \leq \infty$, $x \in X_0 + X_1$ に対して,

$$\|x\|_{\theta, q; K} = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, x; \bar{X})]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

となる x 全体を K -補間空間といい, $K_{\theta, q}(\bar{X}) = \bar{X}_{\theta, q; K}$ で表す.

定義 6 (J -関数, J -補間空間). $x \in X_0 \cap X_1$, $t > 0$ に対して,

$$J(t, x; \bar{X}) = \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\}$$

を J -関数と言う. $0 < \theta < 1$, $0 < q \leq \infty$ とする. $u(t) : [0, \infty) \rightarrow X_0 \cap X_1$ は $x = \int_0^\infty u(t) dt/t$ を満たすとする. このとき,

$$\|x\|_{\theta, q; J} = \inf_{x=\int_0^\infty u(t) dt/t} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} J(t, x; \bar{X})]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

となる x 全体を J -補間空間といい, $J_{\theta, q}(\bar{X}) = \bar{X}_{\theta, q; J}$ で表す.

次の2つの定理 (定理7と定理8) は実補間法の2大定理と言われる.

定理 7 (equivalent theorem).

$$K_{\theta, q}(\bar{X}) = J_{\theta, q}(\bar{X}), \quad \text{with equivalent norm.}$$

注意 1. この定理により, K -法, J -法のどちらで補間空間を考えても同値になるので, K や J を記さないことがある.

定理 8 (reiteration theorem).

$$(\bar{X}_{\theta_0, q_0}, \bar{X}_{\theta_1, q_1})_{\lambda, q} = \bar{X}_{\theta, q},$$

ここで

$$\theta = (1 - \lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1, \quad \theta_0 \neq \theta_1.$$

したがって、実補間法で Riesz-Thorin, Stein-Weiss, Calderón-Hunt はそれぞれ次のように表すことができる。

- $(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta, p} = L_p, \quad 1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1,$
- $(L_{p_0}(w_0 d\mu), L_{p_1}(w_1 d\mu))_{\theta, p} = L_p(w d\mu),$
 $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1, w^{1/p} = w_0^{(1-\theta)/p_0} w_1^{\theta/p_1},$
- $(L_{p_0 q_0}, L_{p_1 q_1})_{\theta, q} = L_{pq}, \quad 1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1.$

そこで, Stein-Weiss と Calderón-Hunt を統合させた, 重みつき Lorentz 空間での補間が考えられるのは自然であるが, 1997 年に Ferreyra[4] が反例を与えた。即ち,

$$(L_{p_0 q_0}(w_0 d\mu), L_{p_1 q_1}(w_1 d\mu))_{\theta, q} \neq L_{pq}(w d\mu).$$

ここで p, q, r は前に同じとする。

一方, Gilbert[6, 1972 年], Lizorkin[11, 1975 年], Freitag[5, 1978 年] らによっても, 重みつき L_p 空間の補間が考えられ, 次の結果が得られた。

$$(L_{p_0}(w_0 d\mu), L_{p_1}(w_1 d\mu))_{\theta, q} = L_{pq} \left(\left(\frac{w_1}{w_0} \right)^{1/(p_1-p_0)}, \left(\frac{w_0^{p_1}}{w_1^{p_0}} \right)^{1/(p_1-p_0)} d\mu \right).$$

これを Stein-Weiss の結果と比べてみると, インデックス q が任意になっていることがわかる。その代わり右辺の空間が多少複雑な重みつき Lorentz 空間になっていることがわかる。

定義 9 (重みつき Lorentz 空間 $L_{p,q}(u, v d\mu)$).

$$L_{p,q}(u, v d\mu) = \{f : \|f\|_{L_{p,q}(u, v d\mu)} < \infty\},$$

ここで,

$$\|f\|_{L_{p,q}(u, v d\mu)} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} (f \cdot u)_v^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p, q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} (f \cdot u)_v^*(t), & 0 < p < \infty, q = \infty. \end{cases}$$

$u \equiv 1$ ならば $L_{p,q}(v d\mu)$ と表し, $v \equiv 1$ ならば $L_{p,q}(u)$ と表すことにする。

ここで f_v^* は f の v に関する再配列関数を表す。

ここまでは couple に対する補間を述べてきたのであるが, n 個の Banach (quasi Banach) 空間の補間についても考えられてきた. ここで $\bar{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ は n -tuple を表すとする. 1974 年, Sparr[13] は次のことを示した.

定理 10. $(n+1)$ -tuple $\bar{X}$ に対して, *equivalent theorem* が成立するならば *reiteration theorem* も成立する.

しかし, Sparr 自身が equivalence theorem の反例を示した. これに対して 1997 年, Asecritova-Krugljak[1] が “Banach (quasi Banach) function lattice の n -tuple に対しては equivalent theorem が成立する”ことを示した. この結果を用いて, 2001 年 Asecritova-Krugljak-Maligranda-Nikolova-Persson[2] が triple (X_0, X_1, X_2) に対する理論を用いて, 重みつき Lorentz 空間の補間空間を表現した. そのために新しい関数空間である block-Lorentz 空間を導入した.

定義 11 (block-Lorentz 空間 $L_{pr}^{\sigma,q}$). $\Omega_k = \Omega_k(w) = \{x \in \Omega : 2^k \leq w(x) < 2^{k+1}\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $0 < p, q, r \leq \infty$ に対して,

$$L_{pr}^{\sigma,q} = \{f : \|f\|_{L_{pr}^{\sigma,q}} < \infty\},$$

ここで,

$$\|f\|_{L_{pr}^{\sigma,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f w^{\sigma} \chi_{\Omega_k}\|_{L_{pr}}^q \right)^{1/q}$$

注意 2. $p = q = r$ の場合は重みつき L_p 空間に一致する. 即ち,

$$L_{pp}^{\sigma,p} = L_p(w^{\sigma} d\mu).$$

次の定理は重みつき Lorentz 空間の補間を表している. $f \approx g$ は $C_1 g \leq f \leq C_2 g$ を満たす C_1, C_2 が存在することを表す.

定理 12. $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$ に対して, $L = (L_{p_0 q_0}(w_0 d\mu), L_{p_1 q_1}(w_1 d\mu))_{\theta, q}$ とおく. そのとき,

$$\|f\|_L \approx \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f \chi_{\Omega_k}\|_{L_{pq}(w d\mu)}^q \right)^{1/q}$$

ここで

$$\Omega_k = \Omega_k(w_0, w_1) = \{x \in \Omega : 2^k \leq w_0(x)/w_1(x) < 2^{k+1}\},$$

$$1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1,$$

$$1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1,$$

$$w^{1/p} = w_0^{(1-\theta)/p_0} w_1^{\theta/p_1}.$$

2. 主結果

我々の主結果は、2つのノルム $\|\cdot\|_{L_{pq}(u, v d\mu)}$ (Freitag norm) と $\|\cdot\|_{L_{pq}(w d\mu)}$ (A-K-M-N-P) が block Ω_k 上では同値であることを示した。

定理 13 (G-M-N-S [7]). $0 < \theta < 1$, $0 < p_0, p_1, q < \infty$, $p_0 \neq p_1$ とし, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ とする. 任意の可測関数 w_0, w_1 に対し $u = (w_1/w_0)^{1/(p_1-p_0)}$, $v = (w_0^{p_1}/w_1^{p_0})^{1/(p_1-p_0)}$ とおく. そのとき任意の $\Omega_k = \{x \in \Omega : 2^k \leq w_0(x)/w_1(x) < 2^{k+1}\}$ に対して,

$$\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{pq}(u, v d\mu)} \sim \|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{pq}(w d\mu)}.$$

証明. ノルム $\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(w d\mu)}$ を次のように変形する:

$$(1) \|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(w d\mu)} = \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k}(x) > s\}} w(x) d\mu(x) \right)^{q/p} s^{q-1} ds \right)^{1/q}.$$

$\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(u, v d\mu)}$ に対して変数変換, $\lambda = 2^{k/(p_1-p_0)} s$ を施し, 集合 Ω_k と重み関数 u, v と w の定義から次のように変形する:

(2)

$$\begin{aligned} & \|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(u, v d\mu)} \\ &= \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} \cdot u > s\}} v(x) d\mu(x) \right)^{q/p} s^{q-1} ds \right)^{1/q} \\ &\leq \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} \cdot 2^{-k/(p_1-p_0)} > s\}} v(x) d\mu(x) \right)^{q/p} s^{q-1} ds \right)^{1/q} \\ &= \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} > \lambda\}} v(x) d\mu(x) \right)^{q/p} 2^{-kq/(p_1-p_0)} \lambda^{q-1} d\lambda \right)^{1/q} \\ &\leq \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} > \lambda\}} \left(\frac{w_0^{p_1}}{w_1^{p_0}} \right)^{\frac{1}{p_1-p_0}} \cdot 2^{\frac{p}{p_1-p_0}} \left(\frac{w_1}{w_0} \right)^{\frac{p}{p_1-p_0}} d\mu(x) \right)^{q/p} \lambda^{q-1} d\lambda \right)^{1/q} \\ &= 2^{1/(p_1-p_0)} \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} > \lambda\}} w(x) d\mu(x) \right)^{q/p} \lambda^{q-1} d\lambda \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

同様に変数変換 $\lambda = 2^{(k+1)/(p_1-p_0)} s$ と集合 Ω_k , 重み関数 u, v と w の定義

から

(3)

$$\begin{aligned}
 & \|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(u,vd\mu)} \\
 & \geq \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} 2^{-(k+1)/(p_1-p_0)} > s\}} v(x) d\mu(x) \right)^{q/p} s^{q-1} ds \right)^{1/q} \\
 & = \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} > \lambda\}} v(x) d\mu(x) \right)^{q/p} 2^{-(k+1)q/(p_1-p_0)} \lambda^{q-1} d\lambda \right)^{1/q} \\
 & \geq 2^{-1/(p_1-p_0)} \left(q \int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} > \lambda\}} w(x) d\mu(x) \right)^{q/p} \lambda^{q-1} d\lambda \right)^{1/q}.
 \end{aligned}$$

(1), (2), (3) から結果が得られた。 □

参考文献

- [1] I. Asekritova, N. Krugljak, *On equivalence of K- and J-methods for $(n+1)$ -tuples of Banach spaces*, Studia Math. **122** (1997), 99–116.
- [2] I. Asekritova, N. Krugljak, L. Maligranda, L. Nikolova, L. E. Persson, *Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications*, Studia Math. **145**(3) (2001), 219–254.
- [3] A. P. Calderón, *Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math. **26** (1966), 273–299.
- [4] E. V. Ferreyra, *On a negative result concerning interpolation with change of measures for Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1413–1417.
- [5] D. Freitag, *Real interpolation of weighted L_p spaces*, Math. Nachr. **86** (1978), 15–18.
- [6] J. E. Gilbert, *Interpolation between weighted L^p spaces*, Ark. Mat. **10** (1972), 235–249.
- [7] A. Gogatishvili, S. Moritoh, M. Niwa, T. Sobukawa, *Interpolation theorem for block-Lorentz spaces*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces. (2003), to appear.

- [8] R. A. Hunt, *On $L(p, q)$ spaces*, Enseign. Math. **12** (1966), 249-276.
- [9] J. L. Lions, *Théorèmes de traces et d'interpolation I-V*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. **13** (1959), 389-403.
- [10] J. L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'espace d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964), 5-68.
- [11] P. I. Lizorkin, *Interpolation of weighted L^p spaces*, Dokl. Acad. Nauk SSSR **222**(1) (1975), 32-35.
- [12] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, Acta. Math. **49** (1926), 465-497.
- [13] G. Sparr, *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. **99** (1974), 247-316.
- [14] E. M. Stein, G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 159-172.
- [15] G. O. Thorin, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Forh. **8** (1938), 166-170.