

音響設計のための時間領域差分法の高精度化

Improvement of Finite-difference Time-domain Method for Acoustic Design

鶴秀生 (日東紡音響エンジニアリング), 岩津玲磨 (東京電機大学)

TSURU, Hideo (Nittobo Acoustic Engineering Co. Ltd.)

IWATSU, Reima (Tokyo Denki University)

ABSTRACT: The finite difference method in time domain is often used in wave acoustic simulations. The accuracy of this method depends on numerical dissipation and dispersion caused by a finite difference and a time integration. A compact finite difference can reduce numerical dispersion of space derivative. Therefore, an optimization of the compact finite difference is investigated. In order to improve the time integration scheme, a symplectic integration technique is adopted and excellent long time behavior is obtained.

1 はじめに

波動音響数値計算を実務的な音響設計に適用する場合、波長に比べて大きな空間に対し、周期に比べて長時間の計算を行う必要があるため、効率的な解析手法が必要とされる。差分法は微分方程式中の微分を直接差分で置き換えるため、物理モデルから数値モデルへの移行が比較的容易である。そこで時間領域差分法 (FDTD) の精度向上手法を調べた。比較的大きな格子間隔でも精度よい解析ができるコンパクト差分において、係数を最適化して数値分散を抑えることを試みた^{1,2)}。時間積分精度の改良法として、多段階積分法と Symplectic 積分についての検討した³⁻⁷⁾。格子間隔を波が伝搬する時間に比べて大きな時間間隔で安定な計算を行えるようにするために空間フィルタの適用方法について検討した。数値分散が音圧分布やインパルス応答の予測結果へ与える影響について調べた。

2 差分法の基礎方程式と空間コンパクト差分の最適化

音波の伝搬を考える場合、圧力変動 p と速度ベクトル $\mathbf{v}$ を連立させる方法が差分法では一般的である。空気吸収その他の影響を無視した、音波伝搬の基礎方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho_0 c^2 Q \quad (1)$$

となる⁸⁾。ここで Q は体積速度、 ρ_0 は平均密度、 c は音速である。この微分方程式は単純であるが、そのことは必ずしも数値計算が簡単なことを意味しているわけではない。なぜならわずかな誤差が減衰せず増大する恐れがあるからである。なお、これらの方程式を差分化する場合、Fig.1 のようなスタガード格子上で計算されることが多い。

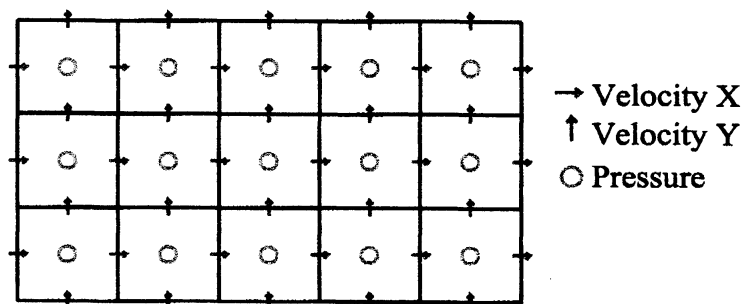


Fig.1 Staggered Grid

等間隔格子上的コンパクト差分についての最適化手法を考えることにする^{1,2)}。コンパクト差分は微分値を近接する格子点の値と連立し、差分近似を行う手法である。格子間隔 h のスタガード格子上で連立一次方程式の係数が3重対角行列となる

$$\alpha f'_{i+1} + f'_i + \alpha f'_{i-1} = b \frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3h} + a \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h} + e \quad (2)$$

のコンパクト差分式を考える。ここで α はパラメータ、 e は誤差項で、各係数間に

$$a = \frac{3}{8}(3 - 2\alpha), b = \frac{22\alpha - 1}{8}, e = \frac{9 - 62\alpha}{1920} h^4 f^{(5)} \quad (3)$$

の関係がある。 $\alpha = 1/22$ の時は係数 b が0になるため、差分式は最も少ない格子点で表現でき、複雑な形状への適用に有効である。 $\alpha = 9/62$ の時は誤差項 e が消滅し、差分式は6次精度になる。ここで実効波数 k' を評価することにする。実行波数は $f(x) = \sin(kx)$ を与えたとき、その一回微分の差分による評価値を $k' \cos(kx)$ としたときの k' である。格子間隔 h を用いて $w = hk$ とおき、 $w' = hk'$ として格子波数、実効格子波数を定義して、格子波数に対する差分近似精度を評価する。 $w = \pi/2$ は、1波長あたり4格子点があること(4PPW: point per wavelength)を表している。上記のコンパクト差分においては

$$w'(w, \alpha) = \frac{2a \sin(\frac{w}{2}) + \frac{2}{3}b \sin(\frac{3w}{2})}{1 + 2\alpha \cos(w)} \quad (4)$$

となる。相対誤差 $(w' - w)/w$ のグラフを Fig.2 に示す。

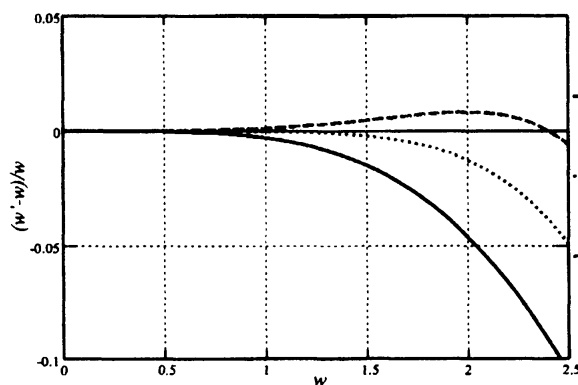


Fig.2 Error comparison of effective wave-length

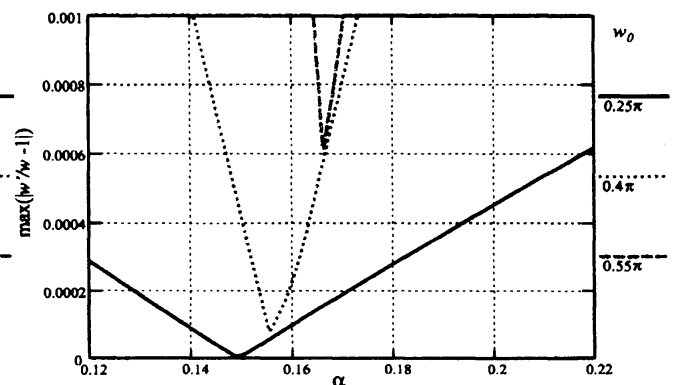


Fig.3 Maximum absolute value of relative error versus α

パラメータ α を最適化するために、以下の方法を採用した。解析周波数の最大値を指定し、その波長に対応する w_0 以下の w に対して相対誤差の最大値が最小になるように、パラメータ α を決定することにした。上限波数 w_0 までの最大相対誤差を縦軸に、横軸を α としてプロットして Fig.3 に示した。 α の値を調整することで最大相対誤差の値を最小にできることがわかる。実際 $w_0 = 0.55\pi$ 程度の格子間隔でも相対誤差を 10^{-3} 以下にできる。Table 1 に上限波数と最適 α とそのときの最大誤差を示した。

Table 1 Upper bound wave number (PPW), 以上のように波長に対して比較的大きな格子間隔で計算を行ってもかなり誤差を小さくできることが示された。

最大波数 w_0	1 波長の 格子数	最適 α	相対誤差
0.25π	8	0.14905	4.5×10^{-6}
0.3π	6.67	0.1508	1.4×10^{-5}
0.4π	5	0.15555	8.1×10^{-5}
0.5π	4	0.1621	3.3×10^{-4}

コンパクト差分において区間が有限で非周期的な場合は境界差分スキームを考える必要がある。スタガード格子において二つの境界差分式が考えられる。以下、それぞれの場合について検討することにする。

$$f'_0 + \alpha_b f'_1 = \frac{1}{h}(a_b f_{1/2} + b_b f_{3/2} + c_b f_{5/2} + d_b f_{7/2} + e_b f_{9/2}) + \epsilon. \quad (5)$$

となる。ここで ϵ は誤差項で、各係数は α_b と

$$a_b = -\frac{22\alpha_b + 93}{24}, b_b = \frac{17\alpha_b + 229}{24}, c_b = \frac{3\alpha_b - 75}{8}, d_b = \frac{-5\alpha_b + 111}{24}, e_b = \frac{\alpha_b - 22}{24}, \quad (6)$$

で関係つけられる。関数 $f(x) = \cos(kx) + i \sin(kx)$ の微分値の差分による評価値を $f'(x) = ik'[\cos(kx) + \sin(kx)]$ とおく。格子波数 $w = hk$ を用いると w' は $z = e^{iw/2}$ とおくと

$$iw' = \frac{a_b z + b_b z^3 + c_b z^5 + d_b z^7 + e_b z^9}{1 + \alpha_b z^2}. \quad (7)$$

で与えられる。コンパクト差分では内部と境界の微分値がカップルする。そこで微分評価区間内の誤差分布を連立 1 次方程式を解くことで求めた。波長が格子間隔の 6 倍のときに格子点数 $n = 60$ の区間内の実効波数の絶対値の相対誤差の空間分布を Fig.4 に示した。

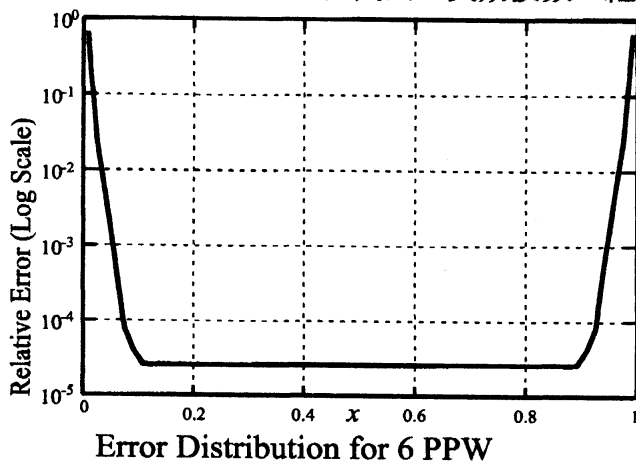


Fig.4 Distribution of the absolute value of relative amplitude error.

内部区間 ($2 \leq i \leq n-2$) の α は 6PPW の周波数領域での最適値とした。境界からひとつ

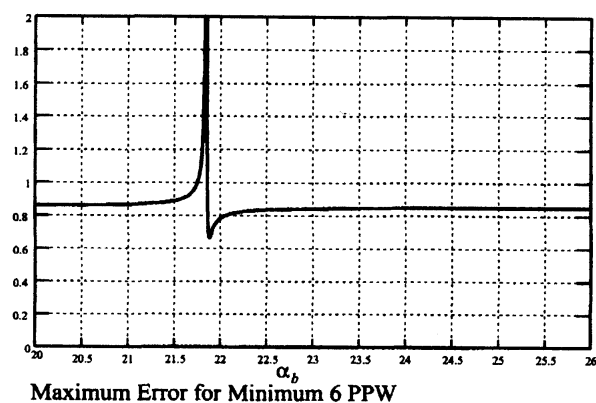


Fig.5 Maximum absolute value of amplitude error versus α_b .

内側の格子点 ($i = 1, n-1$) での差分は α を $1/22$ とした。境界点での α_b は 21.88 とした。誤差は境界格子点 $i = 0, n$ で最大になる。次に境界格子点の誤差の α_b に対する依存性を Fig.5 に示した。この場合、誤差は最適化を行ってもそれほど小さくならないことがわかる。しかも α_b が $1/22$ の逆数の 22 付近で誤差が発散していることがわかる。よって、このタイプの境界差分では、PPW が余り大きくないときには最適化がうまく働かないことがわかる。

その他の境界差分タイプとして、微分の評価点が差分計算区間には含まれる場合がある。音響 FDTD においてこれは速度の空間微分に対応する。その場合のコンパクト差分式は

$$f'_0 + \alpha_b f'_1 = \frac{1}{h} (a_b f_{-1/2} + b_b f_{1/2} + c_b f_{3/2} + d_b f_{5/2} + e_b f_{7/2}) + \epsilon. \quad (8)$$

で、係数の間に

$$a_b = \frac{\alpha_b - 22}{24}, b_b = \frac{-27\alpha_b + 17}{24}, c_b = \frac{9\alpha_b + 3}{8}, d_b = \frac{-\alpha_b - 5}{24}, e_b = \frac{1}{24}, \quad (9)$$

の関係がある。同様の考慮により、この場合の実効格子波数 w' は

$$iw' = \frac{a_b z^{-1} + b_b z + c_b z^3 + d_b z^5 + e_b z^7}{1 + \alpha_b z^2}. \quad (10)$$

となる。格子点 60 個の区間において格子波数 $\pi/3$ の試行関数の微分をコンパクト差分で評価した場合の実効波数の絶対値の誤差分布を Fig.6 に示した。内部領域の α は 6PPW 以下の周波数領域での最適値とした。境界点での差分には α_b を 8.21 とした。

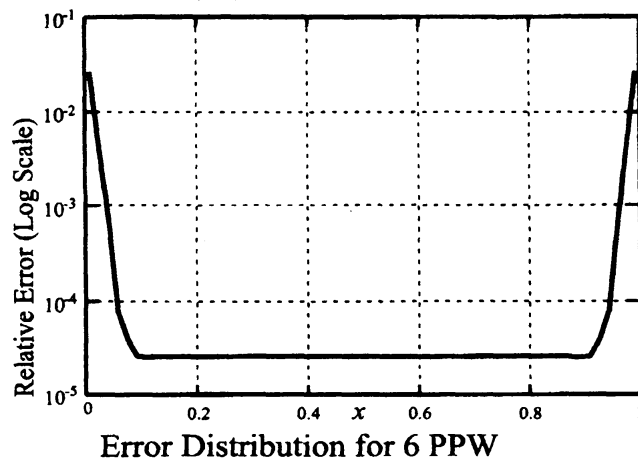


Fig.6 Distribution of absolute value of relative amplitude error.

境界点での絶対値誤差は、最初の境界タイプと比べるとかなり小さくなる。上限周波数を設定した周波数帯域に対し境界点での振幅誤差の絶対値の最大値を評価することができる。別のタイプ境界差分のときと同様の手順で、 α_b を 8.212 付近の値を設定することで 2.68×10^{-2} 程度に抑えることができる。

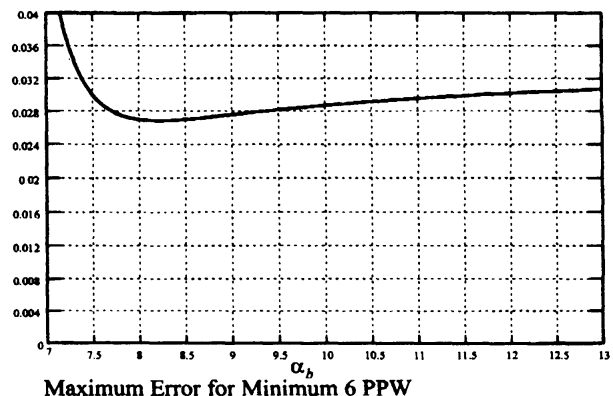


Fig.7 Maximum absolute value of amplitude error versus α_b .

3 時間積分の高精度化

差分法においては、空間微分を求めた後に時間積分を行うことによって、時間発展を求めていくことになる。したがって時間方向の積分精度を改良することが課題となる。複数の時間ステップでの微分評価値を用いる多段階積分法と中間的なステップを用いる Symplectic 積分法について考慮した。最初に多段階積分法の基本的な概念の紹介と簡単な検討結果の検討を行う。まず最初に関数 f の時間微分を F で表す場合、関数 $f(t)$ を初期値から $F(t)$ の複数の時刻での値を用いて時間積分を行う方法を考える。たとえば

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = b_0 F(t + \frac{\Delta t}{2}) + b_1 F(t - \frac{\Delta t}{2}) + b_2 F(t - \frac{3\Delta t}{2}) \quad (11)$$

のように多段階の微分値を用いる。この場合

$$b_1 = 2 - 2b_0, \quad b_2 = b_0 - 1 \quad (12)$$

の関係がある。 $b_0 = 1$ のときは1段階の普通の FDTD 法で用いる時間積分手法に帰着することがわかる。このパラメータ b_0 を調整することで精度を上げることを試みる。角周波数 ω の波 $\exp(i\omega t)$ に対して、各時刻 $t + \Delta t/2, t - \Delta t/2, t - 3\Delta t/2$ において関数 f の時間微分値 F が正確に与えられたとする。このことは FDTD 法においては、運動方程式に現れる音圧の空間微分値を正確に計算することに対応する。角周波数と時間ステップを用いて規格化角周波数 $\theta = \omega \Delta t$ を定義すると、次のタイムステップ $t + \Delta t$ での真の値 $f(t + \Delta t) = f(t) \exp(i\theta)$ と数値計算による値

$$\tilde{f}(t + \Delta t) = f(t) [1 + i\theta (b_0 \exp(i\frac{\theta}{2}) + b_1 \exp(-i\frac{\theta}{2}) + b_2 \exp(-i\frac{3\theta}{2}))] \quad (13)$$

との差の絶対値が最小になるように、 θ に対してパラメータを調整することができる。相対誤差 err

$$err = \left| \frac{\tilde{f}(t + \Delta t) - f(t + \Delta t)}{f(t + \Delta t)} \right| \quad (14)$$

を最小にするパラメータ b_0 を θ の関数として求めた。様々な θ に対して数値計算によって得られた最適パラメータを Table 2 に表した。比較のために多段階でないケース $b_0 = 1$ での誤差も示した。

Table 2 Normalized frequency, b_0 and relative error.

規格化角周波数 θ	最適 b_0	相対誤差 の最適値	$b_0 = 1$ の相対誤差
0.1	1.0415	4.16×10^{-6}	4.17×10^{-5}
0.2	1.041	6.62×10^{-5}	3.33×10^{-4}
0.5	1.037	2.49×10^{-3}	5.19×10^{-3}
1.0	1.024	3.46×10^{-2}	4.11×10^{-2}

規格化角周波数が小さいと最適化の効果が大きい。FDTD 法において適用する場合は圧力の方程式と運動方程式に対して、同様の多段階積分法を採用すればよい。Runge-Kutta

法では中間時刻で微分値の計算を行う必要があるため中間の段階数の倍数だけ計算量が増えるが、この多段階積分法では微分計算自体は各ステップで1度行うだけでよいので、計算量を大きく増やすことなく精度を向上できる。

多段階積分法では無次元化時間ステップが比較的大きいとあまり大きな向上が得られなかった。微分方程式がハミルトン形式の構造を持っているときは、保存量を保存する積分手法として Symplectic 積分法が有効である⁵⁻⁷⁾。Symplectic 積分はこの数十年の間、粒子系のダイナミクスや天体力学の分野で発展してきた。Symplectic 積分の理論は主に常微分方程式の分野で発展してきたが、最近、偏微分方程式の分野への拡張されるようになった。ここでは最初に Symplectic 積分手法の紹介を行う。次に Ruth の式を音波伝搬を記述する偏微分方程式に適用することを試みた。その結果、長時間積分の精度を飛躍的に向上させることができた。

それでは Symplectic 積分法の概要を示す。もし変数 p と q の時間発展を示す常微分方程式が次のような形式で表現されるならば

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= f(q), \\ \frac{dq}{dt} &= g(p)\end{aligned}\quad (15)$$

時間間隔 τ の時間発展を、 m 個の中間的ステップを用いて実行する。その i 番目の中間ステップにおいて係数 $b_i, \tilde{b}_i$ を用いて

$$\begin{aligned}P_i &= P_{i-1} + \tau b_i f(Q_{i-1}), \\ Q_i &= Q_{i-1} + \tau \tilde{b}_i g(P_i),\end{aligned}\quad (16)$$

の式を用いて補助的な値を計算をする。ここで

$$P_0 = p(t), Q_0 = q(t), P_m = p(t + \tau), Q_m = q(t + \tau) \quad (17)$$

として変数 p, q の値を更新する。係数 $b_i, \tilde{b}_i$ は Ruth 法によると Table 3 の値となる⁵⁾。音波の伝搬において p と q はそれぞれ音圧と速度ベクトル $\mathbf{v}$ とみなすことができる。なお、 $f(q)$ と $g(p)$ はそれぞれ、速度ベクトル $\mathbf{v}$ と音圧 p の最適化コンパクト差分等をを用いて表現できる。

Gaussian 形状の初期波形 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp\left[-\ln 2 \left(\frac{x}{3}\right)^2\right], \quad (18)$$

とにおいて、波動伝搬の1次ベンチマーク問題を解いた。グリッド間隔は $h = 1.0$ で音速は無次元化して1.0とおいた。10000時間ステップまでの伝搬を様々な数値計算手法を用いて予測し、 $x' = x - ct$ として結果を Fig.8 に示した。

Table 3 Coefficients for Ruth's method.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
b_i	7/24	3/4	-1/24
$\tilde{b}_i$	2/3	-2/3	1

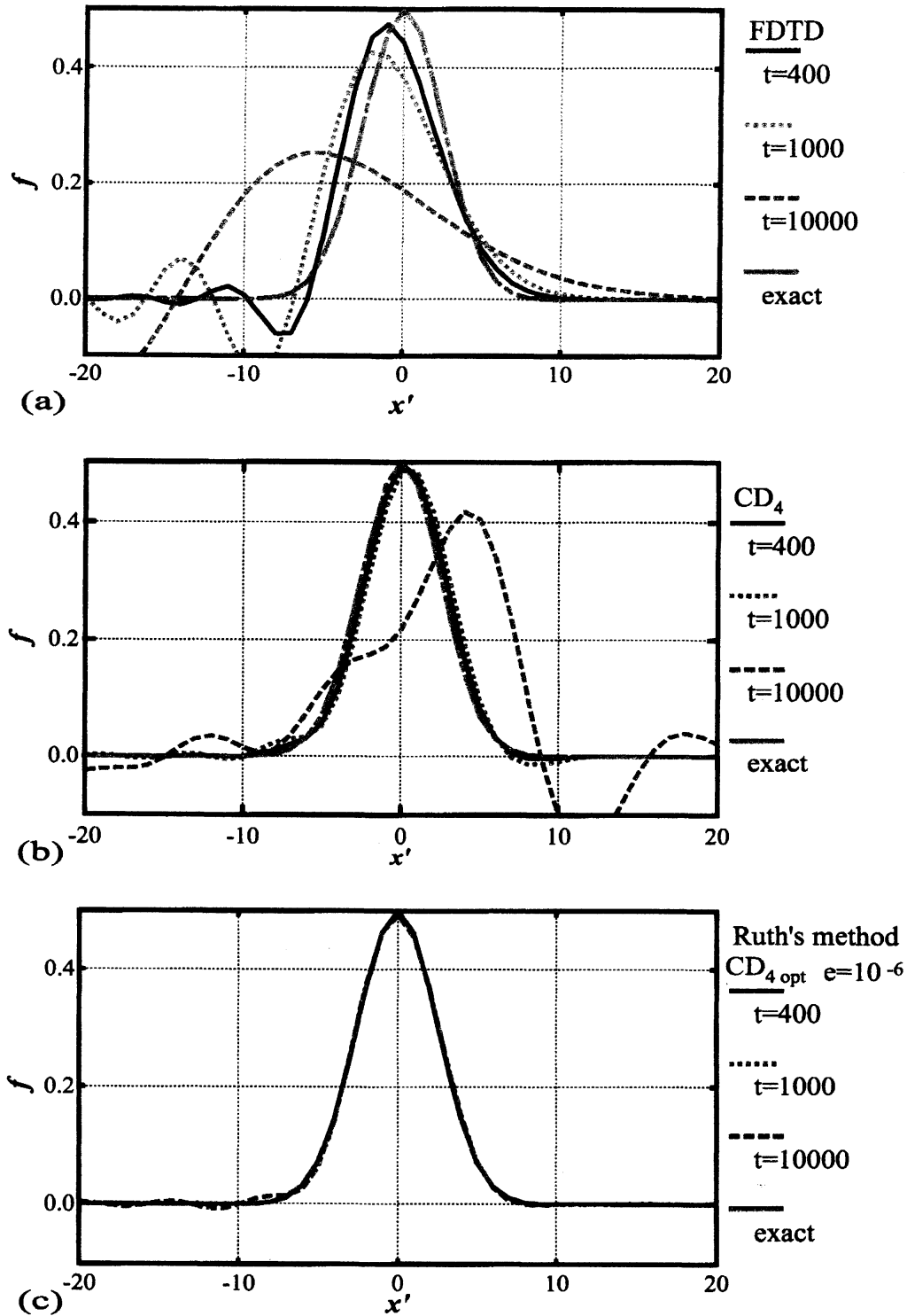


Fig.8 Comparison of the wave forms at several time steps obtained by (a) the conventional FDTD scheme (explicit second order finite difference and leap frog time integration) with CFL number 0.9, (b) the fourth order compact finite difference and the leap frog time integration with CFL number = 0.25, and (c) the optimized fourth order compact finite difference ($\alpha = 0.1475$) and Ruth's time integration with CFL number= 0.5.

$\alpha = 0.1475$ を用いた 4 次の最適化コンパクト差分と Ruth 法を用いた時間積分を適用した場合は、10000 時間ステップ後でもほとんど波形が変わらないことがわかる。このように Symplectic 積分法を用いると時間積分の精度が飛躍的に改善されることがわかる。

4 空間フィルタを用いた安定化

差分法において複雑な形状の空間を格子で近似する場合、格子間隔を小さく取る必要がある。その場合低い周波数の解析においても、時間ステップ幅をかなり小さくとらなければ、安定な解析ができない。そこで不安定の原因となる高周波成分を除去する空間フィルタを考えることにする。格子点での関数値を f_i とおくと

$$\begin{aligned} & \nu \hat{f}_{i-2} + \mu \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \mu \hat{f}_{i+1} + \nu \hat{f}_{i+2} \\ &= a f_i + \frac{d}{2}(f_{i+3} + f_{i-3}) + \frac{c}{2}(f_{i+2} + f_{i-2}) + \frac{b}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}), \end{aligned} \quad (19)$$

でフィルタ後の値 $\hat{f}_i$ を求めることにする。格子間隔 h と波数 k を用いた格子波数 $w = hk$ に対する伝達関数 $T(w)$ は

$$T(w) = \frac{a + b \cos(w) + c \cos(2w) + d \cos(3w)}{1 + 2\mu \cos(w) + 2\nu \cos(2w)}, \quad (20)$$

となる。伝達関数 $T(w)$ の $w = 0, \pi$ での値や微分値に条件を設定することで係数間の関係式が得られる。4 次精度の関係式として

$$a = \frac{1}{4}(2 + 3\mu), b = \frac{1}{16}(9 + 16\mu + 10\nu), c = \frac{1}{16}(-3 + 6\mu + 26\nu), d = \frac{1}{32}(1 - 2\mu + 2\nu), \quad (21)$$

を得ることができる。また $\nu = (3 - 2\mu)/10$ とおくと、6 次精度になる。6 次精度のときにパラメータ μ を変化させたときの伝達関数 $T(w)$ を Fig.8 に示す。フィルタを適用するこ

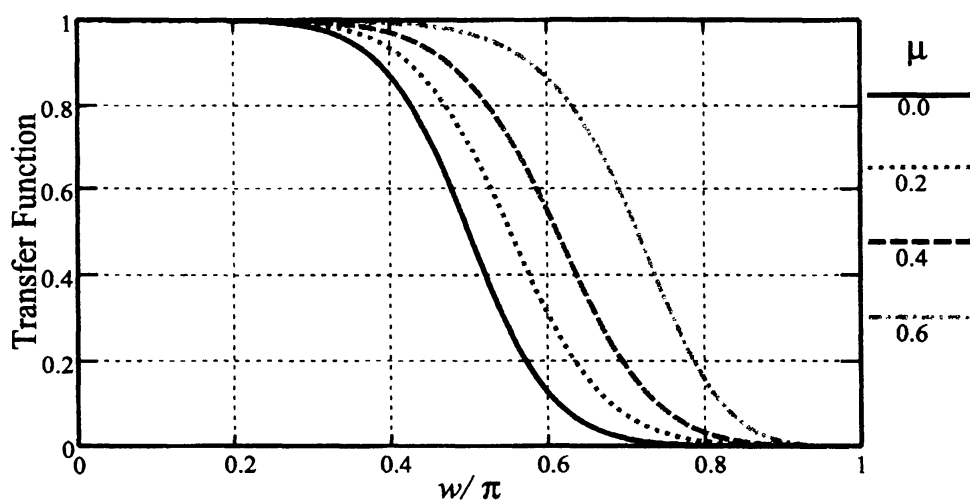


Fig.9 Transfer fuction for various μ

とで低周波成分は完全に通過させて、余計な高周波成分がカットすることができる。なお

領域境界では、別のフィルタ係数を考えなければならない。たとえば、領域境界において $w = \pi$ で4次精度で0になるように

$$\hat{f}_1 = \frac{15}{16}f_1 + \frac{1}{16}(4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5), \quad (22)$$

$$\hat{f}_2 = \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{16}(f_1 + 6f_3 + 4f_4 + f_5), \quad (23)$$

$$\hat{f}_3 = \frac{5}{8}f_3 + \frac{1}{16}(-f_1 + 4f_2 + 4f_4 - f_5), \quad (24)$$

のようなフィルタ係数を用いることができる。格子間隔が 0.05m で 401×401 の2次元等間隔グリッドで表現した空間内の波動伝搬の数値計算を行い、フィルタを用いた安定化の有効性を確かめた。音源は 1000Hz の Gaussian Wave Packet とした。空間差分にはパラメータ $\alpha = 0.15$ の4次の最適化コンパクト差分を適用した。PML 境界条件⁹⁾と完全剛の境界条件を設定して数値計算を行った。Table 4 に設定条件と結果を示すことにする。

Table 4 Calculation method, μ, ν and error.

時間積分	境界条件	Δt ms	Filter μ, ν	収束
蛙とび	PML	0.16	-0.1, 0.2	収束
蛙とび	完全剛	0.16	-0.1, 0.2	発散
Ruth 法	完全剛	0.17	-0.1, 0.2	収束
Ruth 法	完全剛	0.18	-0.1, 0.2	発散
Ruth 法	PML	0.21	-0.1, 0.2	収束
Ruth 法	PML	0.22	-0.1, 0.2	発散

なお空間フィルタを用いないと $\Delta t = 0.11ms$ ですべての場合で発散する。したがって空間フィルタを用いることで安定化が図られることが示された。時間積分手法や境界条件によっても収束条件が異なることがわかった。

5 数値分散の可視化と可聴化

2次元波動伝搬の数値計算を行って、数値分散の可視化を試みた。音源として中心周波数 2500Hz の Gaussian 波束の点音源を自由空間に設定した。音源の体積速度の特性を Fig.10 に示した。

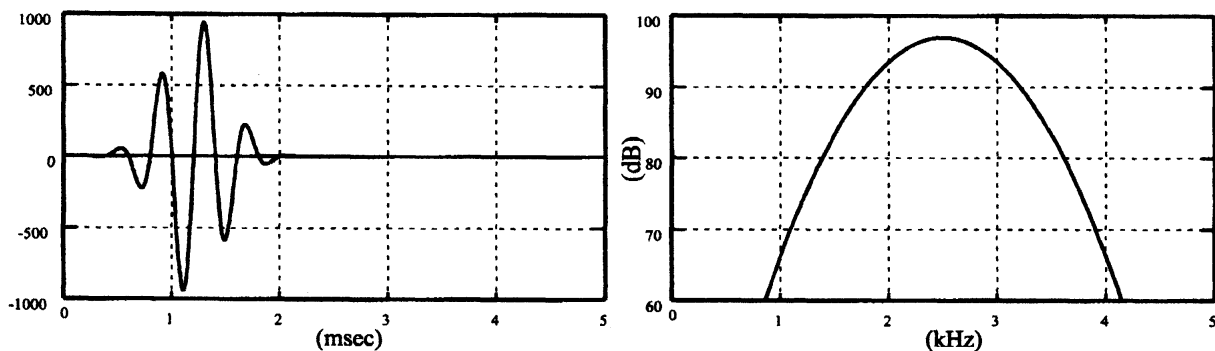


Fig.10 Temporal representation and frequency characteristics of sound source

数値計算において音速は340m/sとして格子間隔は40mm (3.4PPW 程度) とした。差分法における時間ステップは40 μ sとした。パラメータ α を変化させたときの瞬時音圧分布をFig.11に示した。

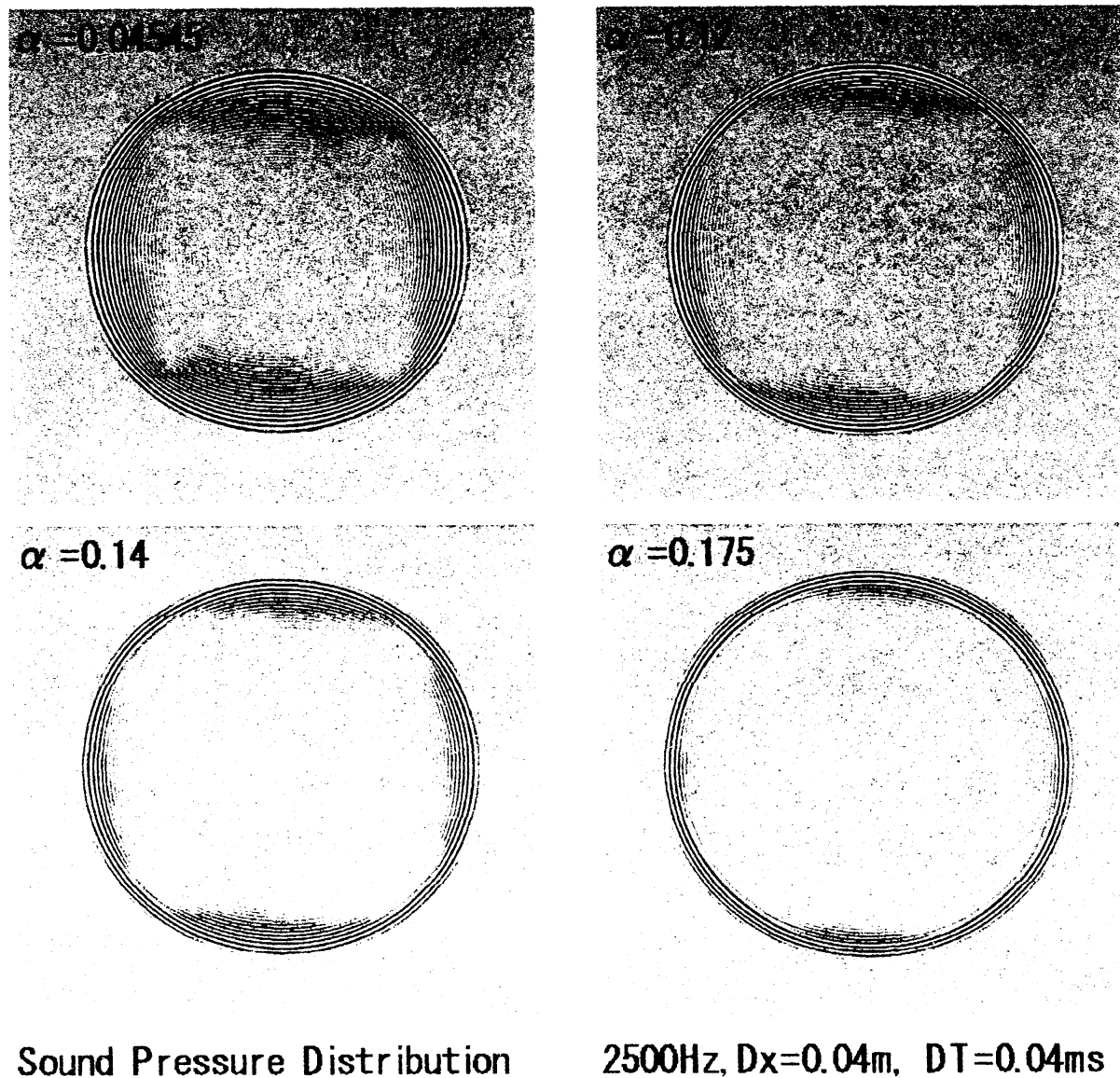


Fig.11. Instantaneous sound pressure distribution for $\alpha = 1/22, 0.12, 0.14, 0.175$.

自由空間において、理想的には同心円的な音圧分布であるが、 α が0.12以下では分布形状が角張ってしまい、かなり誤差が目立つ。最適値に近い $\alpha = 0.175$ ではかなり等方的に音波が伝搬し、数値分散が抑制されていることがわかる。

次に数値計算精度を可聴化によって評価するために、数値計算上の音声を合成することを試みる。実際、数値計算によって得られる帯域制限インパルス応答と音源音声を畳み込みことで数値計算上の音源から離れた評価点での音声を作成することができる。最初に音波の周波数ごとの数値計算上の伝搬速度を求めることにする。角周波数 ω の音波に対す

る格子間隔 h 上での最適化コンパクト差分を用いた波数 k は

$$\omega = \frac{c}{h} \frac{2a \sin(\frac{hk}{2}) + \frac{2}{3} \sin(\frac{3hk}{2})}{1 + 2\alpha \cos(hk)} \quad (25)$$

を用いて求めることができる。この波数 k を用いると、数値計算上の位相速度 c_p は

$$c_p = \frac{\omega}{k} \quad (26)$$

となる。音源から距離 r の点で音を観測した場合の数値計算上で得られる応答関数を求める場合、位相速度 c_p の波動に対する距離 r での遅延時間 $\Delta_{\omega} t = r/c_p$ が必要になる。この遅延時間を用いて各周波数成分に位相遅れを与える。差分法では計算可能な帯域が制限されるので、高周波成分を除いた成分を周波数領域で足し合わせて逆フーリエ変換を行って、帯域制限インパルス応答の時間領域波形を求めることができる。このインパルス応答を音源信号に畳み込むことで、数値計算上の音声の可聴化が可能になる。数値計算条件として格子間隔 20mm で上限周波数 4kHz で距離 $r=300\text{m}$ と設定した。各差分手法で予測されるインパルス応答の時間波形を求め Fig.12 に示した。

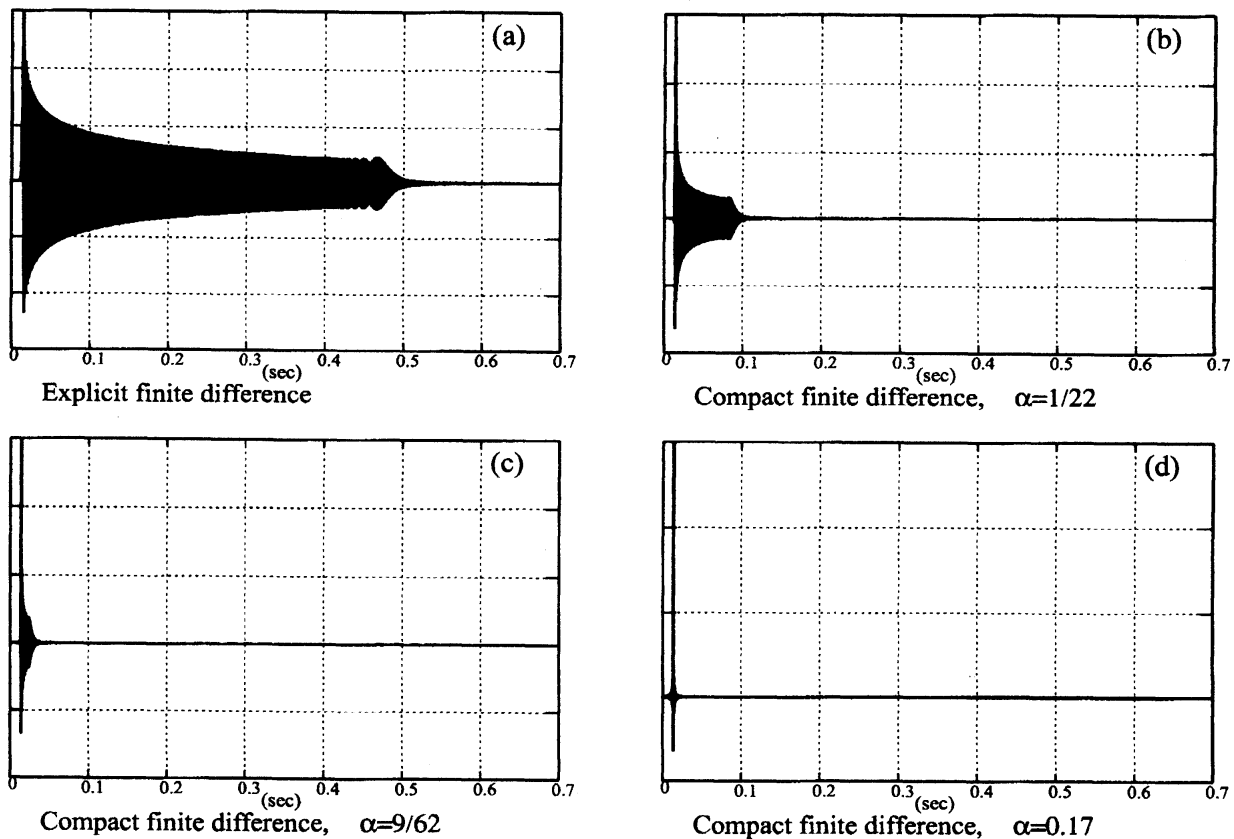


Fig.12 Band-limited impulse response functions by (a) an explicit central finite difference, compact finite differences with (b) $\alpha = 1/22$, (c) $\alpha = 9/62$ and (d) $\alpha = 0.17$, respectively. ここで、時間原点を適当にずらして表示した。通常よく用いられる陽的な差分手法では全くインパルス波形が再現できていないことがわかる。コンパクト差分を適用する場合において、最適化パラメータを用いるかどうかで、かなりインパルス応答波形が変わることが

示された。得られたインパルス応答を音源音声に畳み込むことで数値誤差の影響を得られた音声を試聴することで評価した。その結果、数値計算手法によって音質がかなり変化することもわかった。従って可聴化までを目標とした実務的な数値計算には、高精度の手法の適用が必要なことがわかる。

6 まとめ

差分法における空間差分の精度向上のために、コンパクト差分の最適化を行い、微分の近似精度を上げた。領域境界のコンパクト差分式の考慮も行い、有限長の格子上での誤差の空間分布の評価を行った。多段階積分法や Symplectic 積分法を用いた時間積分の精度向上と、空間フィルタを用いた数値積分の安定化を実現できた。このように数値計算手法を改良することで、莫大な計算量を必要とする実務的な音響解析にも数値予測手法の適用が可能にすることができる。また数値分散の影響を調べるために、2次元自由空間内の数値計算結果を示した。また帯域制限インパルス応答を計算することで、数値分散が音質にどのくらい影響するかも調べた。最適化コンパクト差分による数値分散の抑圧は、数値計算上で得られる音質を人間が試聴してすぐに判断できるくらい向上することがわかった。

参考文献

- [1] S. K. Lele, "Compact finite difference scheme with spectral-like resolution", J. Comput. Phys. 103 (1992) pp.16-42.
- [2] 岩津玲磨、鶴秀生, "高解像度最適化スキームを用いた時間領域の音響計算", 第 21 回数値流体力学シンポジウム, 東京 (2007) B2-1.
- [3] C.K.W. Tam and J.C. Web, "Dispersion-relation-preserving schemes for computational acoustics.", J. Comput. Phys. 107 (1993) pp.262-281.
- [4] 岩津玲磨、鶴秀生, "時間領域音響計算に用いる compact 差分と多段階積分法の最適化 (複雑流体の数値とシミュレーション)", 数理解析研究所講究録. 1529 (2007) pp. 1-14.
- [5] R. D. Ruth, "A canonical integration technique", IEEE Trans. Nuclear Sci. NS-30 (1983) pp. 2669-2671.
- [6] H. Yoshida, "Construction of higher order symplectic integrators", Phys. Lett. A150, (1990) pp. 262-268.
- [7] I. Saitoh, Y. Suzuki and N. Takahashi, "The symplectic finite difference time domain method", IEEE Trans. on Mag. 37 (2001) pp. 3251-3254.
- [8] L. M. Brekhovskikh and O. A. Godin, *Acoustics of Layered Media II: Point Source and Bounded Beams* (Springer Series on Wave Phenomena), Springer-Verlag, Heidelberg, (1992) pp. 112-116.
- [9] J. Berenger, "A perfectly matched layer for absorption of electro magnetic waves", J. Comput. Phys. 114 (1994) pp. 185-200.