

## Spatial Graph Theory

東京大文理 小林一章

(Kazuaki Kobayashi)

ここではグラフといえば有限グラフを意味するものとし  
ます。Spatial graph theory とはユークリッド空間に埋め込  
まれたグラフ(1次元複体)を研究する理論である。しかし  
実際には2次元ユークリッド空間(平面)への埋め込みは、  
与えられたグラフ  $G$  が平面へ埋め込み可能か否か(即ち、 $G$   
が planar か否か)が重要であって、これは一応解決がつい  
ています(Kuratowski の定理)。埋め込み可能の時、どれ  
位その方法があるかという事に関しては曲面に対し根上氏が  
faithful という概念を使って研究されています。また4次元  
以上のユークリッド空間への埋め込みはいつでも可能であっ  
て1つのグラフの任意の2つの埋め込みは空間全体の同相写  
像の1パラメータ族で互いに移り得るという事が示されます。  
従って埋め込みの分類という観点からは3次元ユークリッド  
空間  $R^3$  (又は3次元球面  $S^3$ ) への埋め込みが実際の研究目標

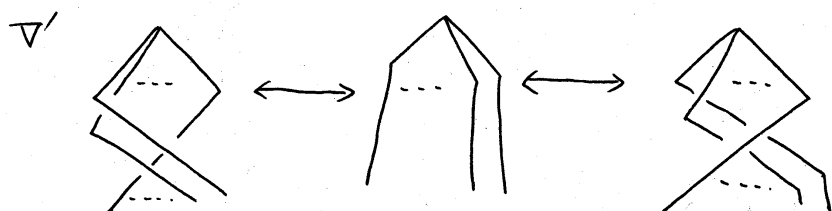
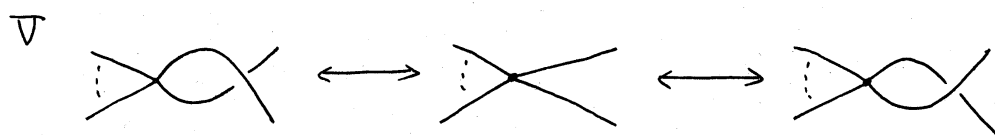
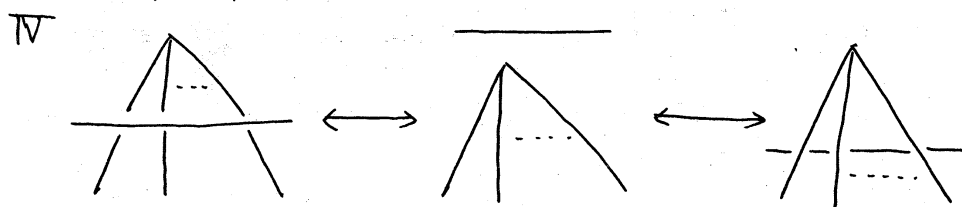
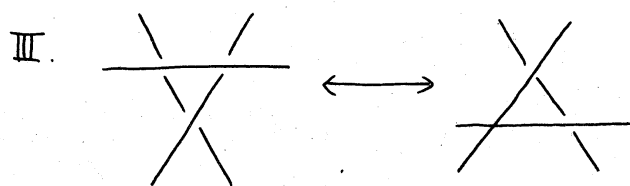
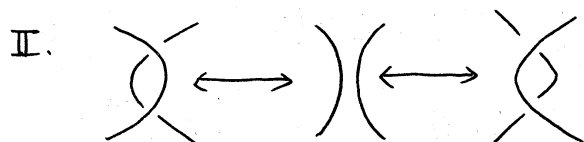
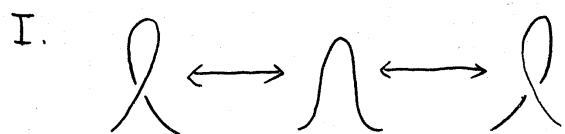
となる訳です(この次元の時は常に埋め込み可能です)。  $R^2$  への埋め込み問題の拡張として曲面への埋め込みを問題とするときはグラフの組み合せ的側面が重要になってきますが、  $R^3$  への埋め込みに関しては今の所もっと大雑把に位相的にとらえる事が注目されています。このような研究の応用としては DNA の異性体の研究等に应用されているようです。

グラフ(1次元複体)は *circles* の一般化ですので研究方法は今迄蓄積されてきた結び目、絡み目理論の結果を利用したり拡張したりします。大まかに言ってグラフの2つの埋め込み (*spatial graphs*) を区別するのにそれらが含んでいる結び目や絡み目の集合を比較する方法と絡み目理論で開発された不変量を *spatial graph* に応用出来るよう拡張し、その不変量を2つの *spatial graphs* に対し計算し比較する方法があります。私は後者の方について解説したいと思います。

先ず不変量を定義する前に良く使われる2つの *spatial graphs* の間の同値関係を定義する。(後で別の同値関係も定義します。)

定義。  $G$  を有限グラフとし  $f, g: G \rightarrow R^3$  を2つの埋め込みとする。  $F_t: R^3 \rightarrow R^3$  ( $t \in [0, 1]$ ) は同相写像の1パラメータ族で  $F_0 = \text{id.}$ ,  $F_1(f(G)) = g(G)$  であるものとする。このとき2つの *spatial graphs*  $f(G)$  と  $g(G)$  は (*flexible ver-*

tex) ambient isotopic という。これは次の Reidemeister moves (I~V) と呼ばれる変形を有限回行なうことによって2つの spatial graphs の図が互いに移り得るという事と同じである。 Reidemeister moves.



しかしグラフは絡み目の場合と違って頂点の所で図形の“斉次性”が崩れており、応用する時に都合が悪かったり、うまく不変量が定義出来ないときがあります。そこで上の Reide-

meister move  $V$  をもう少し制限の強い  $R$ -move  $V'$  に置き換え, それ等の有限回で移り得るとき 2 つの spatial graphs は (rigid vertex) ambient isotopic という。

[I] Yamada 多項式 ([Y])

$G$  を有限グラフ,  $e(G)$  を  $G$  の辺集合,  $F$  を  $e(G)$  の部分集合 ( $F = \emptyset$  のときも含む) とし

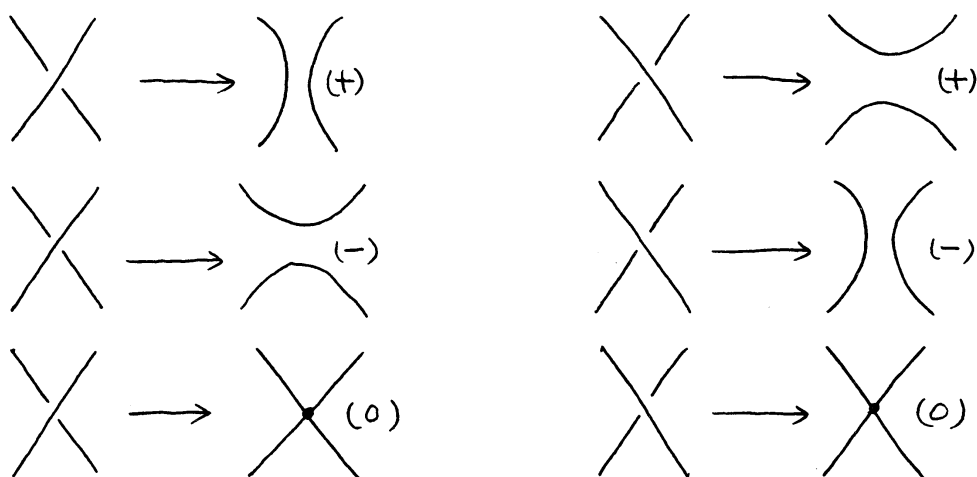
$$Q(G)(x, y) = \sum_{F \subseteq e(G)} (-x)^{|F|} x^{\beta_0(G-F)} y^{\beta_1(G-F)} \text{ と定義する。}$$

ここで  $\beta_0(G), \beta_1(G)$  は 0, 1 次元の  $G$  の Betti 数

命題.  $Q(G)$  は  $G$  の位相不変量である。

$G$  を有限グラフ,  $\tilde{G}$  を  $G$  の spatial graph (即ち  $S^3$  に埋め込まれた  $G$  の像),  $\tilde{G}_\Delta$  を  $\tilde{G}$  の 1 つの diagram とする。

positive spin (+), negative spin (-), zero spin (0) というものを次で定義する。



$\tilde{G}_\Delta$  の各 crossing を (+), (-), (0) のいずれかの spin で置き代えたもの (plane graph) を  $\tilde{G}_\Delta$  から得られた state という。

従って  $\tilde{G}_\Delta$  が  $n$  個の crossing を持っていたら  $\tilde{G}_\Delta$  から  $3^n$  個の state が得られる。state  $S$  が  $(+)$  spin,  $(-)$  spin,  $(0)$  spin を各々  $p, q, r$  個持っていたとき  $\{\tilde{G}_\Delta/S\} = A^{p-q}$  とおく

$$R(\tilde{G}_\Delta)(A) = \sum_S \{\tilde{G}_\Delta/S\} Q(S) (-1, -(A+2+A^{-1})) \text{ とおく.}$$

命題. (1)  $R(\tilde{G}_\Delta \sqcup \tilde{G}'_\Delta) = R(\tilde{G}_\Delta) \cdot R(\tilde{G}'_\Delta)$

$$(2) R(\tilde{G}_\Delta * \tilde{G}'_\Delta) = -R(\tilde{G}_\Delta) \cdot R(\tilde{G}'_\Delta)$$

$$(3) R(\tilde{G}_\Delta \wedge \tilde{G}'_\Delta) = 0$$

ここで  $\sqcup$  は disjoint union,  $*$  は one point union,  $\wedge$  は bridge sum を表わす。

$$\tilde{G}_\Delta \wedge \tilde{G}'_\Delta \longleftrightarrow \text{Diagram: } \bigcirc \tilde{G}_\Delta \text{ --- } \bigcirc \tilde{G}'_\Delta$$

定理.  $R(\tilde{G}_\Delta)$  は  $(-A)^n$  (for some  $n$ ) を除いて rigid vertex ambient isotopy invariant であり, 特に  $G$  の各頂点の次数が 3 以下なら  $R(\tilde{G}_\Delta)$  は  $(-A)^n$  を除いて flexible vertex ambient isotopy invariant である。

命題.  $R(\tilde{G}_\Delta)$  には次のような再帰的な式が成り立つ。

$$(1) R(\text{X}) = AR(\text{O}) + A^{-1}R(\text{X}) + R(\text{X})$$

$$(2) R(\text{Diagram with loop } e) = R(\text{Diagram with loop } e) + R(\text{Diagram with loop } e)$$

ここで  $e$  はループをなす辺。

## [II] Kauffman 多項式 ([Ka]).

$L, L'$  を向きのついた2つの絡み目とし Reidemeister move の II と III で互いに移り合う  $L$  と  $L'$  は regular isotopic という。

$R_L(a, z)$  を次の公理で定まる  $L$  の regular isotopy invariant とする。

$$1. \quad L \text{ と } L' \text{ が regular isotopic} \implies R_L = R_{L'}$$

$$2. \quad R_{\nearrow \searrow} - R_{\searrow \nearrow} = z R_{\rightarrow}$$

$$3. \quad R_{\rightarrow} = a R_{\curvearrowright}, \quad R_{\leftarrow} = a^{-1} R_{\curvearrowleft}$$

$L$  の各 crossing に次のような符号  $+1, -1$  を対応させ、それを全ての crossing について和を取ったものを writhe (又は twisting number) といい、 $w(L)$  とかく

$$\begin{array}{c} P \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \varepsilon(P) = +1 \quad \begin{array}{c} P \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \varepsilon(P) = -1, \quad w(L) = \sum_P \varepsilon(P).$$

命題. Homfly 多項式 (2 変数 Jones 多項式)  $P_L(a, z)$  は次で定義され、 $L$  の ambient isotopy invariant である。

$$P_L(a, z) = a^{-w(L)} R_L(a, z).$$

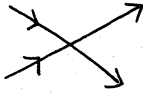
尚  $P_L(a, z)$  に対しては次の再帰的な式が成り立つ。

$$a P_{\nearrow \searrow} - a^{-1} P_{\searrow \nearrow} = z P_{\rightarrow}$$

絡み目に對し以上のような準備をしておいて以下で spatial graph に対して Kauffman 多項式を定義する。

$G$  を有限な 4-正則 グラフとし、 $G$  の各辺に、どの頂点に

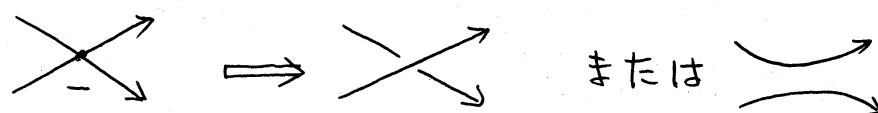
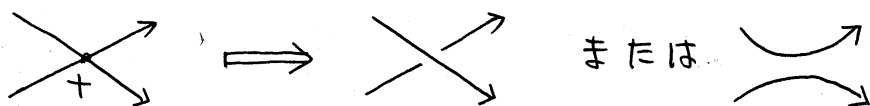
於いても2本の辺が入り, 2本の辺が出ていくように向きを

つける。   $\tilde{G}$  を  $G$  の spatial graph とする。

向きのついた spatial graph  $\tilde{G}$  に対し次の事を行なう。

1°  $\tilde{G}$  の各頂点に + または - の符号をつける。(どのようにつけてもよい。)  または 

2° 符号のついた各頂点を次のように変形する。



このようにして符号のついた spatial graph  $\tilde{G}$  から  $2^n$  個の絡み目 (または結び目) が作られる。そのような絡み目を  $L = L(\tilde{G})$  とおく。

3°  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  ( $\varepsilon_i = \pm$ ) を各頂点における符号の集合とし,  $(\tilde{G}, \vec{\varepsilon})$  を spatial graph  $\tilde{G}$  と符号の列  $\vec{\varepsilon}$  の対とする。  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tilde{G}) = \{L(\tilde{G})\}$  を 2° で作った絡み目の集合とし  $L \in \mathcal{L}(\tilde{G}, \vec{\varepsilon})$  とする。  $i(L)$  を (+) 頂点に対応する smoothing () の個数とし,  $j(L)$  を (-) 頂点に対応する smoothing () の個数とする。  $(\tilde{G}, \vec{\varepsilon})$  に対する変数多項式  $[\tilde{G}, \vec{\varepsilon}](a, A, B)$  を 
$$[\tilde{G}, \vec{\varepsilon}](a, A, B) = \sum_{L \in \mathcal{L}} (-A)^{i(L)} (-B)^{j(L)} R_L(a, A-B)$$
 で定義する。 ここで  $R_L(a, A-B)$  は絡み目に対し上で定義した regular isotopy invariant  $R_L(a, z)$ 。

命題  $[\tilde{G}, \vec{E}]$  は符号列  $\vec{E}$  の並び方に依らない。

定理  $[G] = [\tilde{G}, \vec{E}]$  は向きのついた spatial graph  $\tilde{G}$  に対する rigid vertex regular isotopy invariant (R-moves II, III, IV, V' で不変な量)。

定理  $P(\tilde{G}) = a^{-w(\tilde{G})} [\tilde{G}]$  は rigid vertex ambient isotopy invariant (即ち R-moves I ~ IV, V' で不変)  $w(\tilde{G})$  は link (絡み目) の時と同様に定義する  $\tilde{G}$  の writhe。

Yamada 多項式と Kauffman 多項式を比較すると

① Yamada 多項式は  $(-A)^n$  を modulo としてはいるが全ての有限 spatial graph に適用出来るが、Kauffman 多項式は 4-正則 spatial graph にのみ適用出来、適用範囲が狭い。

② Y-多項式, K-多項式共に殆んどの場合 rigid vertex ambient isotopy invariant であり、 $G$  の頂点の次数が 3 以下の時のみ Y-多項式が flexible vertex ambient isotopy invariant である。

③ Y-多項式は spatial graph  $\tilde{G}$  を変形して、そこから導かれる平面グラフ (state) に対して定義されるグラフの多項式の組み合わせとして定義されている。一方 K-多項式は  $\tilde{G}$  を変形して、そこから導かれる絡み目に対して定義される絡み目の多項式の組み合わせとして定義されている。



[III] Kinoshita ([Ki]) による link の基本イデアルの spatial graph への拡張.

$F_n = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を  $n$  個の文字  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  で生成される自由群とし  $u = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{j_n}^{\varepsilon_n}$  ( $\varepsilon_i = \pm 1$ ) を  $F$  の元,  $u$  の  $k$ -th initial section を  $u_{(k)} = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{j_k}^{(\varepsilon_k-1)/2}$  とする. このとき  $x_j$  に关する  $u$  の自由微分を  $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_k \varepsilon_k u_{(k)}$  で定義する. ただし和は  $x_j$  に等しい  $x_k$  上を動き,  $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$  とする.

群  $G$  が有限表示  $(x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m)$  をもち  $\phi: F_n \rightarrow G$  を自然な準同型とするとき,  $G$  の Jacobian  $M$  を  $(\infty, n)$  型の行列  $M = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^\phi \\ 0 \end{bmatrix}$  と定義する. 一般に  $M$  を, 1 をもつ環  $R$  上の行列とし,  $M$  の集合  $\{M\}$  とする.

$\{M\}$  の間に次の基本操作を入れる.

- (1) 2つの行の入れ換え, 2つの列の入れ換え.
- (2) 0 から成る行の追加.
- (3) ある行に他の行の左 1 次結合を加える.
- (4) 1 行 1 列をつけ加える. ただしその交わった所の成分は 1 で, 列の残りの成分は全て 0.
- (5) 上の操作の逆の操作.

これらの操作は群表示の間の Tietze 変換に対応しているのので上の基本操作による  $M$  の同値類は群  $G$  の不変量である. 次の操作も上の (1) ~ (5) の組み合わせで出て来る.

(1) ある列に他の列の右一次結合を加える。

(H) ある行に左から単元をかける。

(i) ある列に右から単元をかける。

以下では  $R$  を単位元  $1$  をもつ可換環とし,  $M$  を  $R$  上の  $(\infty, n)$  型の行列とする。ただし初めの  $m$  行のみに  $0$  でない成分があるとす。このとき  $M$  の  $d$ -th elementary ideal  $Ed(M)$  を次で定義する。

(1)  $0 < n-d \leq m$  のとき  $Ed(M)$  は  $M$  の全ての  $(n-d) \times (n-d)$  小行列式によって生成される ideal

(2)  $n-d > m$  のとき  $Ed(M) = 0$

(3)  $n-d \leq 0$  のとき  $Ed(M) = R$

$E_0(M) \subset E_1(M) \subset \cdots \subset E_n(M) = R$  である。

$G$  を有限表示群,  $H$  を可換群とし,  $\psi: G \rightarrow H$  を準同型とする。準同型の列  $F_n \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} H$  は整数群環の間の準同型の列  $JF_n \xrightarrow{\phi} JG \xrightarrow{\psi} JH$  に拡大出来,  $M$  を  $G$  の Jacobian としたとき,  $G$  の  $\psi$  での Jacobian  $A(G, \psi)$  を  $M^\psi$  で定義する。elementary ideal の列  $\{Ed(A(G, \psi))\}_{d=0, \dots, n}$  は  $\psi$  に関する  $G$  の不変量である。

以上の代数的な準備をしてにおいて以下で幾何に應用する。

$L$  を  $S^n$  ( $n \geq 3$ ) 内の複体で  $S^n - L$  が連結となるようなものとする。 $G = \pi_1(S^n - L)$  とし,  $\ell$  を  $L$  上の  $(n-2)$  次元整数係数輪体

とし,  $H$  を無限巡回群とする。  $H = \langle t \mid - \rangle$  とし準同型  $\psi: G \rightarrow H$  を  $g^\psi = t^{\text{link}(g, l)}$  で定義する。ただし  $g \in G$  で  $\text{link}(g, l)$  は  $g$  と  $l$  の linking 数 (絡み数)。  $\psi$  は  $\psi: JG \rightarrow JH$  に拡張出来,  $A(G, l) \equiv A(G, \psi)$ ,  $Ed(l) \equiv Ed(A(G, \psi))$  と定義する。

各  $d$  に対し  $\{Ed(l)\}$  は  $(S^n, L)$  の位相不変量となる。

$N(L)$  を  $L$  の正則近傍とし  $(S^n, L)$  の同相に関する同値類を考える。

$(S^n, \overline{N(L)}) \approx (S^n, \overline{N(L')})$  の時  $(S^n, L)$  と  $(S^n, L')$  は 近傍同値

という。  $(S^n, L) \stackrel{N}{\approx} (S^n, L')$  とかく

$$(S^n, L) \approx (S^n, L') \Rightarrow (S^n, L) \stackrel{N}{\approx} (S^n, L') \Rightarrow \overline{S^n - N(L)} \cong \overline{S^n - N(L')}$$

逆方向の主張については

◦  $\overline{S^n - N(L)} \cong \overline{S^n - N(L')} \xrightarrow{?} (S^n, L) \stackrel{N}{\approx} (S^n, L')$  について。

(1)  $L, L'$  が絡み目なら成立しない。(例 1)

(2)  $L, L'$  が結び目のときは成立しないとしても異なるものは高々 2 個  $([C-G-L-S])$  (最近成立するという announce が入っているが詳しい証明はついていない  $[G-L]$ )。

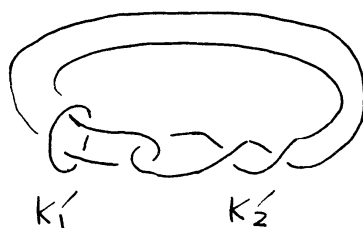
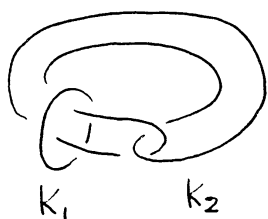
◦  $(S^n, L) \stackrel{N}{\approx} (S^n, L') \xrightarrow{?} (S^n, L) \approx (S^n, L')$  について。

(1)  $L, L'$  が結び目, 絡み目なら成立。

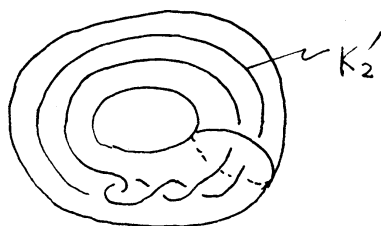
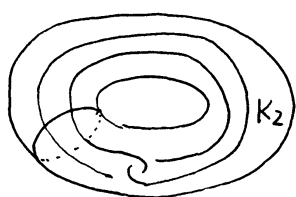
(2)  $L, L'$  がグラフの時は成立しない例がある。

(以上は全て  $n=3$  の場合)

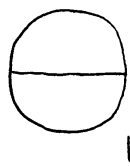
例 1.



$L = K_1 \cup K_2$ ,  $L' = K_1' \cup K_2'$  とする。  $K_1, K_2$  は共に自明な結び目,  $K_1'$  は自明な結び目,  $K_2'$  は自明でない結び目. 従って  $(S^3, \overline{N(L)}) \not\approx (S^3, \overline{N(L')})$  しかし  $\overline{S^3 - N(K_1)}$  と  $\overline{S^3 - N(K_1')}$  は下図のように solid torus の中に  $K_2, K_2'$  がある図のようになり, それ等の  $K_2, K_2'$  の補空間は同相になり. それ故  $\overline{S^3 - N(L)} \cong \overline{S^3 - N(L')}$

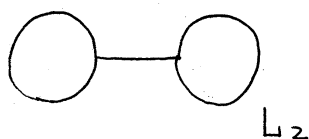


例 2.



$(S^3, \overline{N(L_1)}) \approx (S^3, \overline{N(L_1')})$  を示すには  $\overline{N(L_1)}, \overline{N(L_1')}$  が共に種数2のハンドル体なのでハンドルをすべらせて  $\overline{N(L_1')}$  を  $\overline{N(L_1)}$  に移せ, それは  $S^3$  の ambient isotopy で実現出来る. 一方  $L_1'$  には自明でない結び目 (trefoil knot) が含まれているが  $L_1$  上の全ての単純閉曲線は自明な結び目. 故に  $(S^3, L_1) \not\approx (S^3, L_1')$

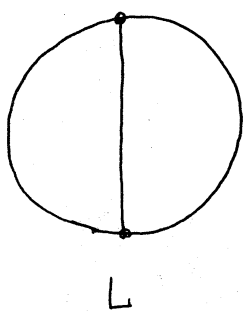
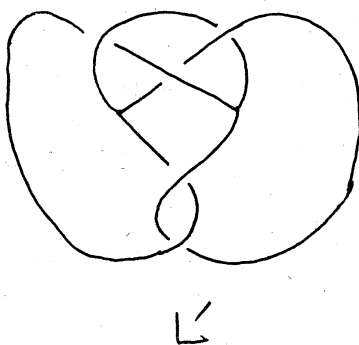
例3.

 $L_2$  $L'_2$ 

例2と同じ理由によって  $(S^3, L_2) \neq (S^3, L'_2)$  が示せ (今度は  $L_2$  と  $L'_2$  に含まれている絡み目の型が異なる。)  $(S^3, N(L_2)) \approx (S^3, N(L'_2))$  が示せる。尚  $(S^3, N(L_1)) \approx (S^3, N(L_2))$  である。

上の例1, 例2, 例3はいずれも絡み目又はグラフ  $L, L'$  に含まれている結び目, 絡み目の型が異なっている事が区別する判定の鍵となっているが, 次の例では  $L, L'$  に含まれている3つの単純閉曲線はいずれも自明な結び目になっているが基本イデアルが異なるため  $(S^3, N(L)) \neq (S^3, N(L'))$  が示せる例である ([Ki])

例4.

 $L$  $L'$ 

命題 ([Ki])  $f(t)$  を  $f(1) = \pm 1$  となるような整係数多項式とすると  $\theta$ -curve の spatial graph  $L_f$  と  $L_f$  上の 1-cycle  $\ell$  で次をみたすものが存在する。

$$E_d(l) = \begin{cases} (0) & \text{if } d \leq 1 \\ (f(t)) & \text{if } d = 2 \\ (1) & \text{if } d \geq 3. \end{cases}$$

Y-多項式とK-多項式に関しては，これらの多項式の特長がまだ良くわかっていないので，上のような形の命題は未だ知られていない。

Y-多項式，K-多項式に含まれている位相幾何学的意味は[Y], [K]の論文以外に殆んど知られていないが，Y-多項式の“最高次数-最低次数”がある種の spatial graphs の交差点の数に[関]係する事が知られている。([Ko]).

### 参 考 文 献

- [C-G-L-S] Culler, M, Gordon, C. M., Luecke, J, and Shalen, P. B. : Dehn surgery on knots, Ann. Math. 125 (1987) 237-300
- [G-L] Gordon, C. M. and Luecke, J.: Knots are determined by their complements, preprint
- [Ka] Kauffman, L. H. and Vogel, P.: Link polynomial and a graphical calculus, preprint
- [Ki] Kinoshita, S.: Elementary ideal in knot theory, Kwansei Gakuin Univ. Annual Studies. vol. XXXV

(1986) 183-208

- [Ko] Kobayashi, K. : Reduced degree of Yamada polynomial and planarity of graphs, preprint
- [M] Murasugi, K. : On invariants of graphs with applications to knot theory, preprint
- [Y] Yamada, S. : An invariants of spatial graphs, preprint