

Invariant theory for the extended affine root system

京大数理研 佐竹 郁夫 (IKUO SATAKE)

§ 0 Introduction

0° ここでは、extended affine root 系と呼ばれるものを導入して、それ上定義される Weyl 群に関する、不変式論について述べる。この研究は特異点理論に基づいている。

1° すなわち、単純特異点と呼ばれる次の特異点

$$A_\ell : x^{\ell+1} + y^2 + z^2 = 0$$

$$D_\ell : x^2y + y^{\ell-1} + z^2 = 0$$

$$E_6 : x^4 + y^3 + z^2 = 0$$

$$E_7 : x^4 + xy^3 + z^2 = 0$$

$$E_8 : x^5 + y^3 + z^2 = 0$$

に対して、その semiuniversal deformation を考え、これをアフィン代数多様体の族とみて、Gauss Manin 接続を考える。このとき、左側に冠した記号に対応する、Lie 環のルート系を用いることにより、この Gauss Manin 接続を再構成することができる。

すなわち、complex Cartan subalgebra を $\mathfrak{f}_\mathbb{C}$,
 その Weyl 群を W , $\mathfrak{f}_\mathbb{C}$ 上の Weyl 群不変な内積を I ,
 (complex bilinear form) とすると、 $\mathfrak{f}_\mathbb{C}$ が線型空間
 であるから、 I から自然に $\mathfrak{f}_\mathbb{C}$ に metric を入れることが
 でき、この I の Weyl 群不変性から、metric を $\mathfrak{f}_\mathbb{C}/W$
 上に induce できる。これから定義される metric
 compatible な $T(\mathfrak{f}_\mathbb{C}/W)$ 上の connection (mero-
 morphic connection) が、上記 Gauss Manin 接続
 と同一視できる。(Saito [5] 参照)
 以下、言葉を流用して、この接続を Gauss Manin 接続
 と呼ぶ。

2° そこで、特異点の hierarchy で次に位置する、
 単純楕円型特異点に関しても同様の構成を行いたい。

超曲面特異点として定義される単純楕円型特異点は
 次のものである。

$$E_6^{(1,1)} : zy^2 - x(x-z)(x-\lambda z) = 0$$

$$E_7^{(1,1)} : xy(x-y)(x-\lambda y) + z^2 = 0$$

$$E_8^{(1,1)} : y(y-x^2)(y-\lambda x^2) + z^2 = 0$$

$$(\lambda \neq 0, 1)$$

左側に冠した記号は、Saito [6] により導入された

extended affine root system における記号である。

(以下、省略して e. a. r. s. と書くことがある。)

これらの特異点に対して、単純特異点の場合と同様な構成を、この e. a. r. s. を用いることによってできる。

(ただし、対応する Lie 環については、現在研究途中である。Yamada [8] 参照)

e. a. r. s. は Saito [6] により完全に分類されており、その中に、 $A_\ell^{(1)}$ 型と呼ばれる系列がある。

従って、逆に、これに対して同様の構成を行うことによって、meromorphic connection の系列が定義できる。特に $\ell=4$ の場合には、超曲面特異点でない単純楕円型特異点に対する、Gauss Manin 接続を与えていると考えられる。これらは、代数多様体の族から得られる Gauss Manin 接続と、まだ同一視できないものも含んでいるが、言葉を流用して、 $A_\ell^{(1)}$ 型 Gauss Manin 接続と呼ぶことにする。

3° これらの研究のためには、 $\mathcal{F}_\ell/W$ 、いいかえれば $\mathcal{F}_\ell$ 上の Weyl 群不変式環の構造が基本的であり、それについては古典的に、次の定理が知られている。

Th 0-1 (Chevalley)

f_c 上の多項式環を $P[f_c]$ とする。 W は $P[f_c]$ 上に作用するが、ある W -不変な多項式 $f_1, \dots, f_\ell$ が存在して、

$$P[f_c]^W = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_\ell]$$

但し、 ℓ はルート系の rank である。

f_c / W 上に Gauss Manin 接続が定義できるが、
斎藤による「原始積分」の理論から、 f_c / W 上に
「flat structure」が定義できる。

Th 0-2 (Saito [7])

f_c / W 上 定義される Gauss Manin 接続の
「leading term」をとることにより、「flat
structure」が定義される。とくに、flat
coordinate とよばれる W -不変式 $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_\ell$
が存在して、

$$P[f_c]^W = \mathbb{C}[\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_\ell]$$

Chevalley の定理 により、 $P[f_c]^W$ が多項式環になることはわかるが、その generator の選び方については何も主張していない。Saito の定理は、 $P[f_c]^W$ に「flat structure」と呼ばれる上部構造を与えて、とくに、特殊な W -不変式、いわば Gauss Manin 接続の観点から「よい不変式」を選ぶ、という事を主張しているのである。

4° 3° で述べた事を e. a. r. s. の場合に拡張したい。Th(0-1) の Chevalley の定理に相当する部分は、Bernstein, J.N; Schwarzman, O.V.; Kac, V.; Peterson, D; Looijenga, E. により示されている。

Th(0-2) の Saito の定理に相当する部分は、 $E_6^{(1,1)}$, $E_7^{(1,1)}$, $E_8^{(1,1)}$ を含むある class について、やはり示されている。 $A_e^{(1,1)}$ 型については Th(0-2) に相当する定理は（そのままの形では）ない。

ここでは、 $A_e^{(1,1)}$ 型について、その Gauss Manin 系の構造を知るための step として、具体的な計算をすることを目標とする。

§ 1 $A_\ell^{(1)}$ 型 extended affine root system と
その Weyl 群

Def ($A_\ell^{(1)}$ 型 e.a.r.s.)

$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_\ell, a, b$ を basis とする $\mathbb{R}$ 上の linear space V . i.e. $V := \bigoplus_{i=0}^{\ell} \mathbb{R}\varepsilon_i \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ とする。

これに内積を、 $I'(\varepsilon_i, a) = I'(a, \varepsilon_i) = 0$ ($\forall i$)
 $I'(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $I'(\varepsilon_i, b) = I'(b, \varepsilon_i) = 0$ ($\forall i$)
 $I'(a, a) = I'(b, b) = I'(a, b) = I'(b, a) = 0$
と入れる。

$$R := \left\{ \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + n b + m a \mid 0 \leq i < j \leq \ell, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$F := \bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{R}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$$

$$G := \mathbb{R}a$$

$$I'|_F = I$$

とする。このとき (R, F, G, I) は $A_\ell^{(1)}$ 型 extended affine root system と呼ぶ。 R はその root と呼ぶ。

定義からわかるように、これは classical な A_ℓ 型ルート系に、2方向の null root $\mathbb{Z}a, \mathbb{Z}b$ をつけ加えたものである。

$$\alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, \ell) \quad \text{とする.}$$

$$\text{rad } I = \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \quad \text{となっている.}$$

$\alpha \in R$ に対して、

$$w_\alpha(u) := u - I(u, \alpha^\vee) \alpha$$

$$\left(u \in F, \quad \alpha^\vee := \frac{2\alpha}{I(\alpha, \alpha)} \right)$$

と定義する。

Def (Weyl 群 W_R)

W_R : w_α ($\alpha \in R$) で生成される群

W_{R_f} : W_R が $F/\text{rad } I$ 上引き起こす変換群

(classical な A_ℓ 型 Weyl 群に同型となる)

とすると、surjection $P_* : W_R \rightarrow W_{R_f}$ が得られ、

$\text{Ker } P_* =: H_R$ とする。

$$\text{i.e. } 0 \rightarrow H_R \rightarrow W_R \xrightarrow{P_*} W_{R_f} \rightarrow 1$$

$$L := \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}\alpha_i \quad \text{とすると、}$$

Def (hyperbolic extension)

$$\tilde{F} := F \oplus \mathbb{R}\tilde{\lambda}$$

$$\tilde{I} \text{ を、 } \tilde{I}(\tilde{\lambda}, b) = \tilde{I}(b, \tilde{\lambda}) = 1$$

$$\tilde{I}(\tilde{x}, a) = \tilde{I}(a, \tilde{x}) = 0$$

$$\tilde{I}(\tilde{x}, x) = \tilde{I}(x, \tilde{x}) = 0 \quad (x \in L)$$

$$\tilde{I}(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0 \quad \tilde{I}|_F = I$$

で $\tilde{I}$ を定義する。

$(\tilde{F}, \tilde{I})$ を (F, I) の hyperbolic extension とし、

$$\tilde{w}_\alpha \text{ を同様に } \tilde{w}_\alpha(u) := u - \tilde{I}(u, \alpha^\vee)\alpha$$

$(u \in \tilde{F}, \alpha \in R)$ で定義し、 $\tilde{w}_\alpha$ で生成される群を $\tilde{W}_R$ とする。

$\tilde{w}_\alpha|_F = w_\alpha$ より得られる全射 $\tilde{W}_R \rightarrow W_R$ の Ker を $\tilde{K}_R$ とする。

$$0 \rightarrow \tilde{K}_R \rightarrow \tilde{W}_R \rightarrow W_R \rightarrow 1$$

さらに $\tilde{w}_\alpha|_L$ として得られる全射 $\tilde{W}_R \rightarrow W_{Rf}$ の Ker を $\tilde{H}_R$ とすると、まとめて次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & \tilde{K}_R & \rightarrow & \tilde{H}_R & \rightarrow & H_R & \rightarrow 1 \\
 & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \tilde{K}_R & \rightarrow & \tilde{W}_R & \rightarrow & W_R & \rightarrow 1 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & W_{Rf} & = & W_{Rf} & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 1 & & 1 &
 \end{array}$$

§ 2. Weyl 群 不変式環

1° 古典的な場合の f_c に相当するものを導入する。

Def

$$\tilde{E} := \{ x \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\tilde{F}, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1, \text{Im } h(x) > 0 \}$$

$$E := \{ x \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1, \text{Im } h(x) > 0 \}$$

$$H := \{ x \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{rad } I, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1, \text{Im } h(x) > 0 \}$$

(複素上半平面と同一視する)

自然な inclusion : $\text{rad } I \hookrightarrow F \hookrightarrow \tilde{F}$ から、

projection $\tilde{E} \rightarrow E \rightarrow H$ が induce される。

$\tilde{E} \rightarrow E$ なる自然な projection に $\tilde{W}_R, W_R$ が
transposed inverse で equivariant に作用するが、

Prop (Saito [7])

$$\tilde{E} \rightarrow E \rightarrow H$$

にそれぞれ $\tilde{H}_R, H_R$ を作用させて、

$$\tilde{E} / \tilde{H}_R \rightarrow E / H_R \rightarrow H$$

$$\parallel$$

$$L^*$$

$$\parallel$$

$$X$$

とする。

- i) X は H で parametrize された Abelian variety の family となる。
- ii) L^* は X の $\mathbb{C}^*$ bundle となる。
- iii) L を L^* より定まる X 上の line bundle とすると、 L^{-1} は ample である。
- iv) L の zero section を (各 $\tau \in H = \mathbb{C}^*$ とに) blow down したものを $\mathbb{L}$ とかく。
 $\mathbb{L}$ は、 H で parametrize された、孤立特異点をもつ affine algebraic variety の family となる。

従って、以下に見るように theta 関数を用いて、不変式を構成することが出来る。

theta 関数を定義するために、 $\tilde{F}$, $\tilde{E}$ に座標を導入しよう。

$$\tilde{F} = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{R} \alpha_i \oplus \mathbb{R} a \oplus \mathbb{R} b \oplus \mathbb{R} \tilde{\lambda}$$

に対して、 $\alpha'_i, a', b', \tilde{\lambda}' \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\tilde{F}, \mathbb{C})$ を、それぞれ $\alpha_i, a, b, \tilde{\lambda}$ の dual basis とする。これを用いると、

$$\tilde{E} = \left\{ \sum x_i \alpha'_i + a' + \tau b' + t \tilde{\lambda}' \mid x_i, t \in \mathbb{C}, \tau \in H \right\}$$

$E = \left\{ \sum_{i=1}^l x_i \alpha_i' + a' + \tau b' \mid x_i \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H} \right\}$
と書ける。

α_i' を、classical な Cartan subalgebra $\mathfrak{f}_{\mathbb{C}}$ の元とみなし、 $\mathfrak{f}_{\mathbb{C}}^*$ ($\mathfrak{f}_{\mathbb{C}}$ の dual space。内積を $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle := I(\alpha_i, \alpha_j)$ で入れる) に入っている内積を用いて定義される map $\iota: \mathfrak{f}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{f}_{\mathbb{C}}^*$ を用いて、次の map を定義する。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} \times \mathfrak{f}_{\mathbb{C}}^* \times \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{i=1}^l x_i \alpha_i' + a' + \tau b' + t \tilde{\lambda}' & \mapsto & (\tau, \iota(\sum_{i=1}^l x_i \alpha_i'), t) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} \times \mathfrak{f}_{\mathbb{C}}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{i=1}^l x_i \alpha_i' + a' + \tau b' & \mapsto & (\tau, \iota(\sum_{i=1}^l x_i \alpha_i')) \end{array}$$

この同型を用いて、 $\tilde{E}$ 上の函数を explicit に定義する。

2° Chevalley type theorem を確立するために、 $\tilde{E}$ 上の Weyl 群 $\tilde{W}_R$ 不変式環、いいかえれば L^* 上の classical Weyl 群 W_{R_f} 不変式環を、次の形で定式化する。

$$S_m := \Gamma(X, \mathcal{O}(L^{-\otimes m}))$$

$$S := \bigoplus_{m=0}^{\infty} S_m$$

$$S_m^W := S_m \text{ のうちで, } W_{R_f} \text{ 不変なもの全体}$$

$$S^W := \bigoplus_{m=0}^{\infty} S_m^W$$

$$\tilde{E} \simeq H \times f_c^* \times \mathbb{C} \text{ 上の関数 } \Theta_{\mu, m}^M(\tau, z, t)$$

$$(M = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i, \quad \mu \in f_c^*, \quad m \in \mathbb{Z}_+)$$

を

$$\Theta_{\mu, m}^M(\tau, z, t) := e^{-2\pi F m t} \sum_{\gamma \in M + \frac{1}{m}M} \exp \left[\pi F m t \langle \gamma, \gamma \rangle - 2\pi F m \langle \gamma, z \rangle \right]$$

で定義する。

w_i : fundamental weight (i.e. $\langle \alpha_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$)

$$\rho = \sum_{i=1}^{\ell} w_i, \quad w_0 = 0 \quad \text{とする。}$$

$$\frac{A_{\Delta_i + \rho}}{A_\rho} := \frac{\sum_{w \in W_{R_f}} (\det w) \Theta_{w(\omega_i + \rho), \ell+2}^M}{\sum_{w \in W_{R_f}} (\det w) \Theta_{w(\rho), \ell+1}^M}$$

と定義する。($A_{\ell}^{(1)} \mp \text{affine Kac-Moody algebra}$ の fundamental weight & highest weight とする. irreducible highest weight representation の character に $(\mathcal{O}(H))$ factor を

除いて) - 一致している。))

Th. (Bernstein, J.N. and Schwarzman, O.V

[1], [2] ; Kac, V. and Peterson, D. [3]

; Looijenga, E. [4])

S^W は $\mathcal{O}(H)$ 係数の多項式環となり、その独立な generator として、 $\frac{A_{\Delta_i+p}}{A_p}$ がとれる。

$$\text{i.e. } S^W = \mathcal{O}(H) \left[\frac{A_{\Delta_0+p}}{A_p}, \dots, \frac{A_{\Delta_\ell+p}}{A_p} \right]$$

但し $\mathcal{O}(H)$ は H 上の (global な) 正則関数である。

$$S := H \times \mathbb{C}^{\ell+1} \ni (\tau, x_0, \dots, x_\ell) \text{ として、}$$

$$\pi: \underset{\psi}{H \times \mathcal{F}_\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}} \longrightarrow \underset{\psi}{H \times \mathbb{C}^{\ell+1}}$$

$$(\tau, z, t) \longmapsto (\tau, x_0, \dots, x_\ell)$$

$$\text{を } \begin{cases} \tau = \tau \\ x_i = \frac{A_{\Delta_i+p}}{A_p} \end{cases} \quad (i=0, \dots, \ell)$$

で定義すると、

π は $\widetilde{W}_R$ 不変式を並べたものだから、

$$\widetilde{\mathbb{E}} / \widetilde{W}_R = H \times \mathcal{F}_\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} / \widetilde{W}_R = L^* / W_{Rf}$$

からの map とできる。

$$\begin{array}{ccc}
 \pi : \mathbb{H} \times f_c^* \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{H} \times \mathbb{C}^{\ell+1} \\
 \searrow & \wr & \nearrow \\
 & L^* / W_{Rf} &
 \end{array}$$

上記定理と解析幾何の一般論とから、

$$\begin{array}{ccc}
 L^* / W_{Rf} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} \times (\mathbb{C}^{\ell+1} \setminus \{0\}) \\
 \wr & \wr & \wr \\
 \mathbb{L} / W_{Rf} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} \times \mathbb{C}^{\ell+1}
 \end{array}$$

となる。従って、以下、 $\pi \in \tilde{W}_R$ quotient map とみなす。

§ 3 metric & connection

1° $\tilde{E}$ は affine space として定義されていたから、 $\tilde{E} \ni x$ に対して同型 $T_x^* \tilde{E} \xrightarrow{\sim} (\tilde{F}/G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ が定義できる。 $\tilde{F}/G$ には、内積 $\tilde{I}$ が入っていたから、 $\tilde{E}$ に dual metric $\tilde{I}_{\tilde{E}} : \Omega^1_{\tilde{E}} \times \Omega^1_{\tilde{E}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{E}}$ ($\Omega^1_{\tilde{E}}$ は $\tilde{E}$ 上の hol. 1-form, $\mathcal{O}_{\tilde{E}}$ は $\tilde{E}$ 上の hol. fn. 上記 $\tilde{I}_{\tilde{E}}$ は $\mathcal{O}_{\tilde{E}}$ -bilinear) を定義できる。

$\tilde{I}$ は $\tilde{F}/G$ 上 non degenerate だから、 $\tilde{I}_{\tilde{E}}$ で $T_x^* \tilde{E}$ と $T_x \tilde{E}$ とを同一視して、 $\tilde{E}$ 上の metric $\tilde{I}_{\tilde{E}}^* : \text{Der } \tilde{E} \times \text{Der } \tilde{E} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{E}}$ が定義できる。 $\tilde{I}$ は $\tilde{W}_R$ 不変だったことから、これら $\tilde{I}_{\tilde{E}}$, $\tilde{I}_{\tilde{E}}^*$ を $\tilde{E}/\tilde{W}_R$ 上に落とすことができる。

これを explicit に計算しよう。

z_i を、 $\tilde{\eta}^*$ の $\langle, \rangle$ に関する orthonormal basis とする。 ($\langle z_i, z_j \rangle = \delta_{ij}$)

$$\tilde{E} \simeq \mathbb{H} \times \left(\bigoplus_{i=1}^l \mathbb{C} z_i \right) \times \mathbb{C}$$

すると $\tilde{I}_{\tilde{E}}$ は、

$$\tilde{I}_{\tilde{E}}(d\tau, dz_i) = 0, \quad \tilde{I}_{\tilde{E}}(dt, dz_i) = 0$$

$$\tilde{I}_{\tilde{E}}(d\tau, d\tau) = 0, \quad \tilde{I}_{\tilde{E}}(dt, dt) = \tilde{I}_{\tilde{E}}(d\tau, d\tau) = 0$$

$$\tilde{I}_{\tilde{E}}(dz_i, dz_j) = \delta_{ij} \quad \text{となる。}$$

引き戻し

$$\begin{array}{ccc} \pi^* : \Omega_S' & \longrightarrow & \Omega_{\tilde{E}}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ df & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \end{array}$$

を用いて、 $\tilde{I}_{\tilde{E}}$ の induce する S 上の bilinear form $\tilde{I}_S$ を計算する。

map π の Jacobian を J とすると、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial \tau} & \frac{\partial \tau}{\partial t} & \frac{\partial \tau}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau}{\partial z_l} \\ \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \tau} & \frac{\partial \Lambda_0}{\partial t} & \frac{\partial \Lambda_0}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \Lambda_0}{\partial z_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda_l}{\partial \tau} & \frac{\partial \Lambda_l}{\partial t} & \frac{\partial \Lambda_l}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \Lambda_l}{\partial z_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \tau} & \frac{\partial \Lambda_0}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial \Lambda_0}{\partial z_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda_l}{\partial \tau} & \frac{\partial \Lambda_l}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial \Lambda_l}{\partial z_l} \end{bmatrix}$$

但し、 $\frac{A_{\Delta_i+p}}{A_p}$ を Λ_i を略記した。

これを用いて、 $S = \mathbb{H} \times \mathbb{C}^{l+1}$ 上の dual metric $\tilde{I}_S$ は、

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_S(d\tau, d\tau) & \tilde{I}_S(d\tau, dx_i) \\ \tilde{I}_S(dx_i, d\tau) & \tilde{I}_S(dx_i, dx_j) \end{bmatrix} = J \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & \ddots & 1 \end{array} \right] J^t$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \Delta_0}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial \Delta_\ell}{\partial t} \\ \frac{\partial \Delta_0}{\partial t} & & & \\ \vdots & & F(\Delta_i, \Delta_j) & \\ \frac{\partial \Delta_\ell}{\partial t} & & & \end{bmatrix}$$

但し、

$$F(\Delta_i, \Delta_j) = \frac{\partial \Delta_i}{\partial t} \frac{\partial \Delta_j}{\partial t} + \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tau} \frac{\partial \Delta_j}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial \Delta_i}{\partial z_k} \frac{\partial \Delta_j}{\partial z_k}$$

($i, j = 0, \dots, \ell$)

となる。

Def

$$D := \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2$$

を Laplacian と呼ぶ。

これを用いると、

$$F(\Delta_i, \Delta_j) = D(\Delta_i \cdot \Delta_j) - D(\Delta_i) \Delta_j - D(\Delta_j) \Delta_i$$

string function の理論より、実は

$$\frac{A_{\Delta_i + \rho}}{A_\rho} = \eta^{-\ell}(\tau) \Theta_{\omega_i, 1}^M$$

$$(\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) \quad q = e^{2\pi i \tau})$$

と書けることがわかり、さらに

$$D(\Theta_{\mu, m}^M) = 0 \quad \text{が簡単にわかる。}$$

2° $\mathbb{H} \times f_c^* \times \mathbb{C}$ 上の自己同型を定義する。

$\mathbb{H} \times f_c^* \times \mathbb{C} \ni (\tau, z, t)$ として、

$$\textcircled{1} (\tau, z, t) \mapsto (\tau, z - w_i, t)$$

$$\textcircled{2} (\tau, z, t) \mapsto (\tau, z + \tau w_i, t - \langle w_i, z \rangle - \frac{\tau}{2} \langle w_i, w_i \rangle)$$

$$\textcircled{3} (\tau, z, t) \mapsto \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}, t + \frac{c}{2} \frac{\langle z, z \rangle}{c\tau + d} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \right)$$

これらは $\mathbb{H} \times f_c^* \times \mathbb{C}$ の解析的自己同型群の元であって、 $\tilde{W}_R$ の normalizer の元である。従って、 $\mathbb{H} \times f_c^* \times \mathbb{C} / \tilde{W}_R$ 上の変換群を $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ は生成する。

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ のうち、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ で $(C_{l+1})^2$ をなし、
(C_{l+1} は $l+1$ 次巡回群)、 $\textcircled{3}$ の変換と合せて、
 $(C_{l+1})^2 \rtimes SL(2, \mathbb{Z})$ となってゐる。この群を $\tilde{G}$ としよう。

Prop dual metric tensor $\tilde{I}_S$ は、 $\tilde{G}$ に対して、($O(\mathbb{H})$ factor を除いて) 不変。
さらに、 $\mathbb{H}$ 上の function に対して、 D の作用と $\tilde{G}$ の作用は ($O(\mathbb{H})$ factor をのぞいて) 可換である。

Cor 1° で述べた D の性質と string function の理論, 及び logarithmic vector field の性質と上記 proposition を合わせ用いる事により, metric $\tilde{I}_S^*$, dual metric $\tilde{I}_S$, さうには connection を explicit に計算することができる。

参考文献

- [1] Bernstein, J.N. and Schwarzman, O.V. :
Chevalley's Theorem for complex crystallographic
Coxeter groups, *Funct. Anal. Appl.* 12 N4 (1978)
- [2] Bernstein, J.N. and Schwarzman, O.V. :
Chevalley's Theorem for Complex Crystallographic
Coxeter groups and Affine Root systems,
Seminar on Supermanifolds 2, edited by Leites,
1986 No. 22, *Matem. Inst.*, Stockholm Univ.
- [3] Kac, V. and Peterson, D. : *Infinite -Dimensional
Lie Algebras, Theta-Functions and Modular Forms*,
Advances in Mathematics, Vol. 53, 1984
- [4] Looijenga, E. : *Root systems and elliptic
curves. Inventiones Math.*, 38 (1976)

- [5] Saito, K. : On a linear structure of a quotient variety by a finite reflexion group, pre-print RIMS-288 (1979)
- [6] Saito, K. : Extended affine root systems I (Coxeter transformation), Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 75-179
- [7] Saito, K. : Extended affine root system II (Flat invariants) preprint RIMS-633 (1988)
- [8] Yamada, H.K. : Extended affine Lie algebras and their vertex representations, preprint RIMS 578 (1987)
- [9] Satake, I. : Gauss Manin connection for the extended affine root system of type $A_2^{(1,1)}$ 京都大学修士論文 (1989)