

時間的に非斉次な発展方程式の積分について

東大 理 吉田 耕作

X を Banach 空間とし

$$(1) \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad x(0) = y \in X, \quad x(t) \in X \quad (0 \leq t \leq 1)$$

の形の方程式を " 発展方程式 (evolution equation) " という。ここに d/dt は X の強位相での微分とし, 線形作用素 $A(t)$ の定義域 $D(A(t))$, 値域 $R(A(t))$ はともに X に属するものとするが, $D(A(t)) = X$ であるとか $A(t)$ が (t を固定したとき) 連続な作用素であることは仮定しないものとする。

熱伝導方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Delta x(t)$$

や, 行列的に書いた波動方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

のみならず Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} x(t) = H x(t), \quad (H \text{ は量子力学的ハミルトニアン})$$

などはいずれも発展方程式の例になっている。

$A(t)$ が t に依存しないときは、半群理論 (E. Hille - K. Yosida, 1948) によって (1) の積分が試みられたが、これを $A(t)$ が t に依存する場合に拡張することは、1953 年の T. Kato [1] により創められた。熱方程式の場合のように $A(t)$ が elliptic の場合には、 $A(t)$ が解析的半群の生成作用素 (infinitesimal generator) であることを利用して T. Kato [1] と異なる (1) の積分法を、H. Tanabe, P. E. Sobolevski, T. Kato などによって発展させられたし、また J. L. Lions, O. A. Ladyženskaya - I. M. Vishik などの展開した積分法もある。しかし、一般の Banach 空間で、かつ $A(t)$ が単に半群の生成作用素であるという条件のもとには、今のところ T. Kato [1] による「Cauchy の折線法」を超えた方法はないようである (J. Kisynski [2] 参照)。

Kato の折線法のアイデアは簡明で、(1) の解 $x(t)$ の近似として、区間 $[0, t]$, $0 \leq t \leq 1$, を細分して

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = t \leq 1$$

のような分点 t_i をとり,

$$(2) \quad U_k(t, 0)y = \exp((t-t_{n-1})A(t_{n-1})) \cdot \exp((t_{n-1}-t_{n-2})A(t_{n-2})) \cdot \dots \cdot \exp((t_{j+1}-t_j)A(t_j)) \cdot \dots \cdot \exp((t_1-t_0)A(t_0))y$$

を作ると, $y \in D(A(0))$ なるとき

$$(3) \quad \max_j |t_{j+1} - t_j| \rightarrow 0 \quad \text{なるごとく } k \uparrow \infty \quad \text{ならしめる}$$

$$\text{とき} \quad \rho - \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, 0)y = x(t)$$

となるように $A(t)$ についての条件を与えようというのである。Kato の条件は, つぎの (4) - (7) であった:

(4) $D(A(t))$ は t に依存せず, かつ X で稠密である。

(5) $\lambda > 0$ ならば $A(t)$ の resolvent $(\lambda I - A(t))^{-1}$ が X から X のなかへの連続作用素として存在し¹⁾, かつ

$$\|(\lambda I - A(t))^{-1}\| \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

(6) $A(\omega)^{-1} \in L(X, X)$ したがって (4) と用グラフ定理を用いてわかるように $A(t)A(\omega)^{-1} \in L(X, X)$ ($0 \leq \omega, t \leq 1$).

1) このことを $(\lambda I - A(t))^{-1} \in L(X, X)$ とかく。

(7) 任意の $x \in X$ に対して, $(t-s)^{-1}C(t,s)x =$
 $= (t-s)^{-1}(A(t)A(s)^{-1} - I)x$ は $t \neq s$ なるところで
 有界かつ t, s について一様連続, かつ
 $s - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} C(t, t - \frac{1}{k})x = C(t)x$ が t に関し
 て一様に成立つ.

Kato のアイデアは簡明であるが, $y \in D(A(0))$ ならば
 $s - \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, 0)y$ が (1) の解になることの証明は
 必ずしも簡単ではない。以下には Kato のように $[0, t]$ を
 分割するのでなく, $[0, 1]$ を k 等分して, $U_k(t, 0)$ を
 $(2)' \quad U_k(t, s) = \exp((t-s)A(\frac{i-1}{k})) \quad (\frac{i-1}{k} \leq s \leq t \leq \frac{i}{k}; 1 \leq i \leq k)$
 $U_k(t, r) = U_k(t, s)U_k(s, r) \quad (0 \leq r \leq s \leq t \leq 1)$

から作れば,

(3)' $s - \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, 0)y, \quad y \in D(A(0)),$

が, 初期条件 $x(0) = y$ に応ずる (1) の解であることを
 Kato の証明に沿いながら相当短かくできることを示そう.

(K. Yosida [3])²⁾

²⁾ K. Yosida [3]では, 局所空間に適用して述べてある。

また半群理論や Tanabe, Sobolevski などの研究について
 は, 例えば K. Yosida [4] を見られたい。

証明のすじ道

まず (5) と (2)' とから

$$(8) \quad \|U_k(t, s)\| \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq s \leq t \leq 1)$$

つきに

$$(9) \quad W_k(t, 0) = A(t) U_k(t, 0) A(0)^{-1}$$

とおくと

$$(10) \quad \|W_k(t, 0)\| \leq (1 + k^{-1}N) \exp(tN), \quad N = \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \|(t-s)^{-1}C(t-s)\|$$

が成り立つ。これは

$$\begin{aligned} W_k(t, 0) &= A(t) A\left(\frac{[kt]}{k}\right)^{-1} U_k\left(t, \frac{[kt]}{k}\right) A\left(\frac{[kt]}{k}\right) A\left(\frac{[kt]-1}{k}\right)^{-1} U_k\left(\frac{[kt]}{k}, \frac{[kt]-1}{k}\right) \\ &\quad \dots \dots A\left(\frac{2}{k}\right) A\left(\frac{1}{k}\right)^{-1} U_k\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right) A\left(\frac{1}{k}\right) A(0)^{-1} U_k\left(\frac{1}{k}, 0\right) \end{aligned}$$

を, (7) を用いて展開して,

$$(11) \quad W_k(t, 0) = \left(I + C\left(t, \frac{[kt]}{k}\right)\right) \{U_k(t, 0) + W_k^{(1)}(t, 0) + W_k^{(2)}(t, 0) + \dots\},$$

$$W_k^{(1)}(t, 0) = \sum_{k, s=1}^{[kt]-1} U_k(t, s) C(s, s - \frac{1}{k}) U_k(s, 0)$$

$$W_k^{(m+1)}(t, 0) = \sum_{k, s=1}^{[kt]-1} U_k(t, s) C(s, s - \frac{1}{k}) W_k^{(m)}(s, 0) \quad (m=1, 2, \dots,$$

$$[kt]-1)$$

を得ることからわかる。

(11) からとくに, $y \in D(A(0))$ ならば $U_k(t, 0)y \in D(A(t))$.

同じようにして $y \in D(A(0))$ ならば $U_k(t, s)y \in D(A(t))$ である。

したがって,

$$U_k(t, s)y = \exp((t - \frac{[kt]}{k})A(\frac{[kt]}{k}))U_k(\frac{[kt]}{k}, s)y$$

は, $t \neq \frac{i}{k}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) において微分可能で

$$(12) \quad \frac{dU_k(t, s)y}{dt} = A\left(\frac{[kt]}{k}\right)U_k(t, s)y, \quad y \in D(A(0)).$$

同じく $s \neq \frac{i}{k}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) ならば

$$(13) \quad \frac{dU_k(t, s)y}{ds} = -U_k(t, s)A\left(\frac{[ks]}{k}\right), \quad y \in D(A(0)).$$

これらの微分は有界で, かつ $t = \frac{i}{k}$, $s = \frac{i}{k}$ 以外では, t と s について連続である。だから (12) - (13) により

$$\begin{aligned} (U_k(t, 0) - U_n(t, 0))A(0)^{-1}x &= \int_0^t \frac{d}{ds} U_n(t, s)U_k(s, 0)A(0)^{-1}x ds \\ &= - \int_0^t U_n(t, s)C\left(\frac{[ns]}{n}, \frac{[ks]}{k}\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)A(s)^{-1}W_k(s, 0)x ds \end{aligned}$$

を得る, (7)-(8)-(9)-(10)によって, 任意の $x \in X$ に対して

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, 0)A(0)^{-1}x \quad \text{が } t \text{ に関して一様に存在}$$

することがわかる。ゆえに $D(A(0))$ が X で稠密なごとと, (8)を用い,

$$(14) \quad s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, s)x = U(t, s)x, \quad x \in X, \quad \text{が } t \text{ に関して一様に存在することがわかる。同様にして}$$

$$(14)' \quad s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, s)x = U(t, s)x, \quad x \in X \quad \text{が } t, s \quad (t \geq s)$$

に關して一樣に存在する。

こともいえる。よって (11) から $W_k(t, 0)x$ の $k \rightarrow \infty$ における有界収束がいえて

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(t, 0)x = W(t, 0)x = U(t, 0)x + W^{(1)}(t, 0)x + W^{(2)}(t, 0)x + \dots$$

$$W^{(1)}(t, 0)x = \int_0^t U(t, s) C(s) U(s, 0)x ds$$

$$W^{(m+1)}(t, 0)x = \int_0^t U(t, s) C(s) W^{(m)}(s, 0)x ds \quad (m=1, 2, \dots)$$

を得る。だから $y \in D(A(0))$ ならば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, 0)y = U(t, 0)y,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(t) U_k(t, 0)y = W(t, 0) A(0)y$$

がともに有界かつ t について一樣収束し, $W(t, 0)A(0)y$ は t について強連続である。これから

$$U_k(t, 0)y - y = \int_0^t \frac{d}{ds} U_k(s, 0)y ds = \int_0^t A\left(\frac{[ks]}{k}\right) U_k(s, 0)y ds$$

において $k \rightarrow \infty$ ならしめて

$$U(t, 0)y - y = \int_0^t A(s) U(s, 0)y ds, \quad y \in D(A(0))$$

を得て, $x(t) = U(t, 0)y$ が (1) の解であることがわかる。

Reference

1. T.Kato: Integration of the equation of evolution in a Banach space, J.Math.Soc.Japan, 5, 208 - 234 (1953).
2. J.Kysinski: Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits, Stud.Math. 23, 285 - 328 (1964).
3. K.Yosida: Time dependent evolution equations in a locally convex space, Math.Ann. 162, 83 - 86 (1965).
4. K.Yosida: Functional Analysis, Springer (1965).