

保型形式の p 進 L 関数と K_2 COLEMAN 巾級数

東大数理 深谷 太香子 (TAKAKO FUKAYA)

(学術振興会特別研究員 PD)

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

UNIVERSITY OF TOKYO

(JSPS RESEARCH FELLOW PD)

CONTENTS

1. 序	1
2. 保型形式の p 進ゼータ関数の復習	2
3. p 進 Riemann ゼータ関数と Coleman 巾級数の理論について (復習)	5
4. 保型形式の p 進ゼータ関数と K_2 Coleman 巾級数 (主結果)	7
References	14

1. 序

p を素数とする. Riemann ゼータ関数には, その負の整数での値を補間して得られる p 進解析関数が存在する. これを p 進 Riemann ゼータ関数という. 一般に p 進ゼータ (L) 関数とは, 対応する複素ゼータ関数の特殊値を補間する p 進解析関数であり, p 進ゼータ関数が存在する事は, もとの複素ゼータ関数の特殊値が p 進的な強いつながりを持つ事を意味する. そしていくつかのゼータ関数に対し p 進ゼータ関数の存在が知られている.

本稿の目的は, その p 進ゼータ関数の一つであり, modular symbol 等の方法により既に構成されている保型形式の p 進ゼータ関数 (1 変数のものと ordinary な保型形式の族に対応する 2 変数のものの両方) の新たな構成法を「 K_2 版 Coleman 巾級数の理論」を用いて与える事である. この方法は p 進 Riemann ゼータ関数の場合に, 「Coleman 巾級数の理論」に「円単数の系」を適用する事で p 進 Riemann ゼータ関数を得る, という岩澤健吉氏

著者は日本学術振興会に援助をしていただいております (特別研究員 PD).

等の方法を高次元化する方法である。特長は、保型形式のゼータ関数の特殊値の有理性などの考察をする必要無しに保型形式の p 進ゼータ関数が得られる事である。

この研究について発表の機会を下さった事に感謝申し上げます。

2. 保型形式の p 進ゼータ関数の復習

重み $k \geq 2$ の normalized eigen cusp form $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n$ に対し, f の p 進ゼータ関数とは, $L(f, \psi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\psi(n)n^{-s}$ とする時, $L(f, \psi, r)$, ψ はある $m \geq 0$ について conductor p^m の Dirichlet 指標, $1 \leq r \leq k-1$, らを補間する p 進解析関数である。これら保型形式の p 進ゼータ関数はこれまで modular symbol 等の方法で構成されている。

この章では保型形式の p 進ゼータ関数の理論について簡単に復習をする。詳しくは Amice-Vélu [AV], Vishik [Vi] 等を参照されたい。

2.1. 以下では $N \geq 1$ を p と素な整数とする。 k, t を $k \geq 2, t \geq 0$ を満たす整数と各々し,

$$\epsilon : (\mathbb{Z}/Np^t\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

を指標とする。 normalized eigen cusp form

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k(X_0(Np^t); \epsilon)$$

に対し, $L(f, s)$ をそのゼータ (L) 関数

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)n^{-s} = \prod_{l:\text{prime}} (1 - a_l(f)l^{-s} + \epsilon(l)l^{k-1-2s})^{-1}$$

とする。

$K = \mathbb{Q}(a_n(f); n \geq 1)$ とおき, λ を K の素点で p の上にあるものとして, これを固定する。更に K_λ を K の λ での完備化とする。

2.2. 次の条件 (*) が成立する時, f の p 進ゼータ関数が存在する。

(*) 元

$$\alpha \in \overline{K_\lambda}^\times$$

で, 次の (i)(ii) の条件を満たすものが存在する.

(i) $v_p(p) = 1$ と正規化された付値 $v_p : \overline{K_\lambda}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,

$$v_p(\alpha) < k - 1.$$

(ii)

$$1 - \alpha p^{-s} \mid (p\text{-factor of } L(f, s))^{-1} \quad \text{in } \overline{\mathbb{Q}_p}[p^{-s}].$$

この時各 α に対し, f の p 進ゼータ関数

$$L_{p\text{-adic}}(f)_\alpha \in H_{K_\lambda(\alpha), k-1}$$

が存在する事が知られている.

2.3. f の p 進ゼータ関数の属する空間について復習する.

2.3.1.

$$G_\infty = \text{Gal}\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) / \mathbb{Q}_p\right)$$

とおく. ここに ζ_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根である. G_∞ は標準的に $\mathbb{Z}_p^\times$ に同型であるが, 元 $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対応する G_∞ の元を g_a と書く. また Δ を G_∞ の torsion part とする. 更に u という $p \neq 2$ の時 (resp. $p = 2$ の時), $1 + p\mathbb{Z}_p$ (resp. $1 + 4\mathbb{Z}_2$) の位相的生成元を一つ取り, 固定する.

2.3.2. $F = K_\lambda(\alpha)$ とおき, O_F をその整数環とする. $i \in \mathbb{Z}, i \geq 1$ に対し, 空間 $H_{F,i}$ が次のように定義される.

$$H_{F,i} = \left\{ \sum_{\substack{n \geq 0 \\ a \in \Delta}} c_{n,a} \cdot g_a \cdot (g_u - 1)^n \in F[\Delta][[g_u - 1]] \right. \\ \left. ; \lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n,a}|_p n^{-i} = 0 \text{ for all } a \in \Delta \right\}.$$

この空間 $H_{F,i}$ は u の取り方によらない.

$$O_F[[G_\infty^{(2)}]] \otimes_{O_F} F \subset H_{F,1} \subset H_{F,2} \subset H_{F,3} \subset \dots$$

が成立する.

2.3.3. 空間 $H_{F,i}$ の元の特徴付けを述べる.

$j \in \mathbb{Z}$ に対し, 指標 χ_{cyclo}^j を

$$\chi_{\text{cyclo}}^j : G_\infty \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times ; g_a \mapsto a^j \quad (a \in \mathbb{Z}_p^\times)$$

と定義する.

ψ を, ある $m \geq 0$ に対し, conductor が p^m の Dirichlet 指標とする.

$\mu = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ a \in \Delta}} c_{n,a} \cdot g_a \cdot (g_a - 1)^n \in H_{F,i}$ について,

$$\mu(\chi_{\text{cyclo}}^j \psi) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ a \in \Delta}} c_{n,a} \cdot a^j \psi(a) \cdot (a^j \psi(a) - 1)^n$$

と定義する時, μ は互いに相異なる i 個の整数 j と有限個を除いたすべての conductor が p^m ($m \geq 0$) の Dirichlet 指標 ψ について, $\mu(\chi_{\text{cyclo}}^j \psi)$ らにより特徴付けられる.

2.4. $L_{p\text{-adic}, \alpha}(f)$ の性質について述べる.

2.4.1. 2.2 の設定において, $h \in \mathbb{Z}$, $1 \leq h \leq k-1$ に対して, $v_p(\alpha) < h$, が成り立つ時,

$$L_{p\text{-adic}, \alpha} \in H_{F,h}$$

となる事が知られている.

更に $v_p(\alpha) = 0$ の場合は,

$$L_{p\text{-adic}, \alpha} \in O_F[[G_\infty]] \otimes_{O_F} F$$

が知られている.

因みに p 進 Riemann ゼータ関数 $\zeta_{p\text{-adic}}$ については

$$\zeta_{p\text{-adic}} \in Q(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]),$$

ここに $Q(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$ は $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ の全商環, が成り立つ.

2.4.2. 2.3.3 に述べた意味で, $L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$ は次のように特徴付けられる.

(i) $\psi : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ の conductor が p^m ($m \geq 1$) の時.

$\pm = (-1)^{k-r-1}\psi(-1)$ とおく. この時, $1 \leq r \leq k-1$, に対し,

$$\begin{aligned} & L_{p\text{-adic},\alpha}(f)(\chi_{\text{cyclo}}^r \psi^{-1}) \\ &= (r-1)! \cdot p^{mr} \alpha^{-m} \cdot G(\psi, \zeta_{p^m})^{-1} \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \\ & \quad \cdot \frac{1}{\Omega(f)_\pm} \cdot L(f, \psi, r), \end{aligned}$$

となる. ここに $G(\psi, \zeta_{p^n})^{-1}$ は Gauss 和 $\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \psi(x) \zeta_{p^n}^x$ であり, $L(f, \psi, r)$ は関数 $L(f, \psi, s) = \sum_{i=1}^\infty a_i(f) \psi(i) i^{-s}$ の $s = r$ での値である. また $\Omega(f)_+$, $\Omega(f)_- \in \mathbb{C}^\times$ は period である.

(ii) $\pm = (-1)^{k-r-1}$ とおく. $1 \leq r \leq k-1$ に対し,

$$\begin{aligned} & L_{p\text{-adic},\alpha}(f)(\chi_{\text{cyclo}}^r) \\ &= (r-1)! \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \cdot \frac{1}{\Omega(f)_\pm} \\ & \quad \cdot (1 - p^{r-1} \alpha^{-1})(1 - \epsilon(p) p^{k-r-1} \alpha^{-1}) \cdot L(f, r) \end{aligned}$$

となる.

3. p 進 RIEMANN ゼータ関数と COLEMAN 巾級数の理論について (復習)

この章では, 実質的に岩澤健吉氏によって与えられた, Coleman 巾級数の理論を用いた p 進 Riemann ゼータ関数の構成法について簡単に復習する. 本稿の主結果はこの方法を応用して保型形式の p 進ゼータ関数を得る事である.

3.1. 久保田, Leopoldt 両氏により得られた p 進 Riemann ゼータ関数 $\zeta_{p\text{-adic}}$ とは, $\zeta(r)$, $r < 0$ を補間する p 進解析関数で, 2章で触れたように $Q(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$ の元である.

この $\zeta_{p\text{-adic}}$ の Coleman 巾級数を用いた構成について振り返る. まず Coleman 巾級数について復習する.

Coleman 巾級数の理論とは Coleman 氏 [Co] により与えられた理論で, *norm* 写像による乗法群の逆系を巾級数 $\mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]$ で捉える以下の結果である.

定理 3.2 ([Co]). 1 の原始 p^n 乗根の *norm* 系 $(\zeta_{p^n})_n$ を取り固定する. この時乗法群の間の群同型が次のように存在する.

$$(\mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]^\times)^{N=1} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]^\times ;$$

$$f(\varepsilon) \mapsto (f(\zeta_{p^n}))_n.$$

ここに右辺の逆極限は乗法群の *norm* 写像によるものである. 左辺の $(\mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]^\times)^{N=1}$ は φ の *norm* N が 1 で作用する $\mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]^\times$ の部分群である. ここで

$$N : \mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]^\times$$

は環準同型

$$\varphi : \mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]] ; f(\varepsilon) \mapsto f(\varepsilon^p)$$

に伴って乗法群にもたらされる *norm* 写像である.

3.3. Coleman 巾級数の理論を用いて p 進 Riemann ゼータ関数を得る方法について簡単に述べる.

Coleman 巾級数の理論を用いて定義されるある合成写像

$$(3.1) \quad \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]^\times \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]^\times)^{N=1} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$$

を考察する事が鍵となる. ここで最初の同型射が Coleman 巾級数の理論により与えられるものであり, 次の写像はある自然な写像である. ([Fu3] 等を参照.) ここにその定義は述べないが, この写像の類似を辿り得られる, 保型形式の p 進ゼータ関数の場合に用いられる写像の方は次の章でその定義を述べる.

ここで整数 c で $(c, p) = 1$ を満たすものを取り, 円単数の系を

$$\left(\frac{1 - \zeta_{p^n}^c}{1 - \zeta_{p^n}} \right)_n \in \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]^\times$$

と定義する.

合成 (3.1) により, 円単数の系は

$$\left(\frac{1 - \zeta_{p^n}^c}{1 - \zeta_{p^n}}\right)_n \mapsto (1 - g_c)\zeta_{p\text{-adic}}$$

と, p 進 Riemann ゼータ関数を導く.

こうして Coleman 巾級数の理論を用いて自然に定義された写像に, 円単数の系という zeta element を適用する事で, p 進 Riemann ゼータ関数 $\zeta_{p\text{-adic}}$ が得られた.

4. 保型形式の p 進ゼータ関数と K_2 COLEMAN 巾級数 (主結果)

3章で復習した理論の類似を辿り保型形式の p 進ゼータ関数を得る. 鍵となるのは後に述べる K_2 Coleman 巾級数の理論である.

4.1.

$$O_H = \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[[q]][1/q])$$

とおく. ここに q は変数である. O_H は混標数 $(0, p)$ をもつ完備離散付値体 $H = O_H[1/p]$ の整数環である. この完備離散付値環は p を素元とし, 剰余体 $k = \mathbb{F}_p((q))$ が $[k : k^p] = p$ を満たす非完全体となる.

各 $n \geq 1$ に対し, q の p^n 乗根 q^{1/p^n} をある H の代数閉包 $\bar{H}$ の中に $(q^{1/p^{n+1}})^p = q^{1/p^n}$ を満たすように取り固定する. 1 の原始 p^n 乗根の norm 系 $(\zeta_{p^n})_n$ も取り固定する. 更に $H_n = H(\zeta_{p^n}, q^{1/p^n})$ とおく. O_{H_n} をその整数環とする.

4.2. 環 A と 0 以上の整数 i に対し代数的 K 群と呼ばれるアーベル群 $K_i(A)$ (Quillen [Qu]) が定義される.

$A = \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]$ や $A = \mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]$ の場合 $K_1(A) = A^\times$ となる事から, 定理 3.2 は K_1 版の Coleman 巾級数の理論とみなす事ができる.

つまり混標数 $(0, p)$ をもつ完備離散付値体の剰余体 k が $[k : k^p] = p^i$ ($i \geq 0$) を満たせば, K_{i+1} 群が適している, という思想である.

4.3. K_2 Coleman 巾級数について結果を述べるための準備をする.

O_H 上の形式巾級数環 $O_H[[\varepsilon - 1]]$ に対し, 準同型

$$\sigma : O_H \longrightarrow O_H$$

を次の (i)(ii) で特徴付けられるものとして定義する.

(i) modulo (p) をする事で導かれる準同型

$$\sigma : k \longrightarrow k$$

は p 乗写像に一致する.

(ii)

$$\sigma(q) = q^p.$$

更に連続準同型

$$\varphi : O_H[[\varepsilon - 1]] \longrightarrow O_H[[\varepsilon - 1]],$$

を次のように特徴付けられるものとして定義する: φ の O_H への制限は σ に一致する. 更に

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^p$$

を満たす.

この環準同型 φ によって K_2 群の間に norm 写像

$$N : K_2(O_H[[\varepsilon - 1]]) \longrightarrow K_2(O_H[[\varepsilon - 1]])$$

が導かれる.

定理 4.4 ([Fu1]). 標準群同型が次の様に存在する.

$$\hat{K}_2(O_H[[\varepsilon - 1]])^{N=1} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \hat{K}_2(O_{H_n}).$$

各 K_2 群に対し, $\hat{K}_2$ はある種の完備化をあらわす. (この完備化については [Fu1] を参照されたい.) 右辺の逆極限 $\varprojlim_n \hat{K}_2(O_{H_n})$ は K_2 群の norm 写像

によって与えられる. 左辺の $\hat{K}_2(O_H[[\varepsilon - 1]])^{N=1}$ は φ の *norm* N が 1 で作用する $\hat{K}_2(O_H[[\varepsilon - 1]])$ の部分群である. 更に群同型は, 環準同型 ($n \geq 1$)

$$(4.1) \quad O_H[[\varepsilon - 1]] \longrightarrow O_{H_n}; f(\varepsilon) \mapsto (\sigma^{-n}f)(\zeta_{p^n})$$

($f(\varepsilon) \in O_H[[\varepsilon - 1]]$) より導かれる K_2 群の準同型によって与えられる. ここに σ^{-n} は次によって特徴付けられる環準同型 $O_H \rightarrow O_{H(q^{1/p^n})}$ である: $\sigma^{-n}(q) = q^{1/p^n}$, また導かれる準同型 $\sigma^{-n}: k \rightarrow k(q^{1/p^n} \bmod (p))$ は p^n 乗写像 $\sigma^n: k(q^{1/p^n} \bmod (p)) \xrightarrow{\cong} k$ の逆写像である.

定理 4.4 は定理 3.2 の K_2 版, になっている事が写像 (4.1) を定理 3.2 の写像と比較する事によってわかる.

4.5. 保型形式の p 進ゼータ関数の構成について述べる. 簡単のため 2 章の記号で, $N = 1$ の場合についてのみ述べる. 以下では $N = 1$ とする.

整数 $c, d \geq 1$ で $(c, 6p) = (d, 6p) = 1$ を満たすものを取る. 加藤和也氏により Beilinson elements の *norm* 系と言う重要な元

$$(c, dZ_{p^n, p^n})_n \in \varprojlim_n K_2(Y(p^n, p^n))$$

([Ka]) ([Sc] にも定義が掲載されている) が定義されている. この元が今回, 3 章での cyclotomic elements に代わる役割を果たす.

ここで $G_\infty = \mathbb{Z}_p^\times$ とおく. そしてアーベル群 A に対し $A[[G_\infty]]$ を $\varprojlim_n A \otimes_{\mathbb{Z}[(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times]} \mathbb{Z}[(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times]$ とする. また便宜上 $a \in \mathbb{Z}_p$ に対し, 対応する G_∞ の元を g_a と表す.

ある自然な写像

$$\varprojlim_n \hat{K}_2(Y(p^n, p^n)) \longrightarrow \varprojlim_n \hat{K}_2(H_n)[[G_\infty]]$$

が存在し ([Fu1] 参照), そして Beilinson elements の *norm* 系 $(c, dZ_{p^n, p^n})_n$ の像は $\varprojlim_n \hat{K}_2(O_{H_n})[[G_\infty]]$ に含まれる事が示される. この像を同じく $(c, dZ_{p^n, p^n})_n$ と書いて, これを我々の場合の重要な元とし, (3.1) の類似を辿り定義される合成写像によるこの元の像を考察する.

4.6. (3.1) の類似を辿り, K_2 版 Coleman 巾級数を用いて次のように合成写像を与える.

$S = O_H[\varepsilon - 1]$ とおく.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} : \varprojlim_n \hat{K}_2(O_{H_n})[[G_\infty]] &\xrightarrow{\cong} \hat{K}_2(S)^{N=1}[[G_\infty]] \\ &\xrightarrow{d\log} \Omega_S^2[[G_\infty]] = S \cdot d\log(q) \wedge d\log(\varepsilon)[[G_\infty]] \\ &\xrightarrow{\cong} S[[G_\infty]] \\ &\longrightarrow O_H[[G_\infty]][[G_\infty]] \end{aligned}$$

最初の同型は定理 4.4 によるものである. また Ω_S^2 は, 絶対微分形式の加群 $\Omega_{S/\mathbb{Z}}^1$ と $\Omega_{S/\mathbb{Z}}^2 = \bigwedge_S^2 \Omega_{S/\mathbb{Z}}^1$ に対し,

$$\Omega_S^2 = \varprojlim_n \Omega_{S/\mathbb{Z}}^2 / p^n \Omega_{S/\mathbb{Z}}^2$$

である. 写像 $d\log$ は

$$\{a, b\} \mapsto \frac{da}{a} \wedge \frac{db}{b}$$

$(a, b \in S^\times)$, $\{a, b\}$ は symbol, で特徴付けられる写像である. 最後の写像は

$$\varepsilon^a \mapsto \begin{cases} a^{-1} g_a & \text{if } (a, p) = 1 \\ 0 & \text{if } (a, p) \neq 1 \end{cases}$$

に伴う O_H -加群の準同型である.

4.7. 像 $\mathfrak{L}((c, dz_{p^n, p^n})_n)$ はおよそ次のような形になる.

$$\begin{aligned} &(1 - g_{c,2})(1 - g_{d,1}) \\ &\cdot \left(\sum_{\substack{i \geq 1 \\ (i,p)=1}} \sum_{j \geq 1} q^{ij} g_{i,1} + \zeta_{p\text{-adic},1} \right) \left(\sum_{\substack{l \geq 1 \\ (l,p)=1}} \sum_{m \geq 1} q^{lm} g_{l,2} + \zeta_{p\text{-adic},2} \right). \end{aligned}$$

ここで, $a, b \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し, $g_{a,1}$ (resp. $g_{b,2}$) は対応する第 1 (resp. 2) の G_∞ の元であり, $\zeta_{p\text{-adic},1}$ (resp. $\zeta_{p\text{-adic},2}$) は第 1 の (resp. 第 2 の) G_∞ に対する p 進 Riemann ゼータ関数である.

この像の詳しい形については [Fu2] に述べたい。

この様に, $\mathfrak{L}((c,dz_{p^n,p^n})_n)$ は $(\Lambda$ 進 Eisenstein 級数) $\times$ $(\Lambda$ 進 Eisenstein 級数) の形になっている. ([Hi3] 参照.)

この様に像自体は p 進ゼータ関数ではないが, これは保型形式の p 進ゼータ関数を生み出す保型形式になっている.

4.8. $G_\infty^{(1)} = G_\infty^{(2)} = G_\infty = \mathbb{Z}_p^\times$ とする. 像 $\mathfrak{L}((c,dz_{p^n,p^n})_n)$ より下の様にして導かれる元を universal zeta modular form

$$z_{p^\infty}^{\text{univ}} \in O_H[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right]$$

と呼ぶ. ここに $g \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty^{(1)}]]$ はある非零因子である. universal zeta modular form は次のように特徴付けられる:

写像

$$O_H[[G_\infty \times G_\infty]] \xrightarrow{\cong} O_H[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]] ;$$

$$xg_{a,1}g_{b,2} \mapsto xg_b^{(1)}g_{ab^{-1}}^{(2)}$$

$(x \in O_H, g_a^{(1)} \in G_\infty^{(1)}, g_b^{(2)} \in G_\infty^{(2)})$, による $\mathfrak{L}((c,dz_{p^n,p^n})_n)$ の像が

$$(1 - g_c^{(1)})(1 - g_{c^{-1}d}^{(2)})z_{p^\infty}^{\text{univ}}$$

となる.

主結果は, この universal zeta modular form $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ が保型形式の p 進ゼータ関数を生むという定理 4.11 である. この定理を述べるための準備をする.

4.9. $\overline{M}_{p^\infty}$ を level p^∞ の p 進保型形式の空間とする ([Hi1]). この空間は重みによらない空間である. そして q 展開により $\mathbb{Z}_p[[q]]$, 従って O_H に埋め込まれる.

H_{p^∞} を $\overline{M}_{p^\infty}$ に作用する Hecke 作用素のなす環とする. これも重みによらないものとなる. また $H_{p^\infty}^{\text{ord}}$ を H_{p^∞} の ordinary part とする. (ordinary については [Hi1] 参照.)

ここで $G_\infty^{(1)}$ を $\overline{M}_{p^\infty}$ に作用する diamond 作用素のなす群, $G_\infty^{(2)} = \text{Gal}(\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)$ と定義する.

命題 4.10 .

$$z_{p^\infty}^{\text{univ}} \in \overline{M}_{p^\infty}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right],$$

ここに $g \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty^{(2)}]]$ は 4.8 の非零因子である.

定理 4.11 ([Fu2]). *universal zeta modular form* $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ は, *universal ordinary p -adic L function*

$$L_{p\text{-adic}}^{\text{ord,univ}} \in H_{p^\infty}^{\text{ord}}\left[\frac{1}{h}\right][[G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right]$$

という次の性質 (P) を満たすものを生み出す. ここに $h \in H_{p^\infty}^{\text{ord}}$, $g \in \mathbb{Z}[[G_\infty^{(1)}]]$ $[[G_\infty^{(2)}]]$ はある非零因子である.

(P) ある $t \geq 0$ についてレベル p^t の *eigen cusp form* $f = \sum_{n \geq 1} a_n(f) q^n$ で下に述べる条件 (*) を満たすものに対し, 準同型

$$(4.2) \quad H_{p^\infty}^{\text{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}_p}; T(n) \mapsto a_n$$

による $L_{p\text{-adic}}^{\text{ord,univ}}$ の像が f の p 進ゼータ関数 $L_{p\text{-adic}}(f) \in (O_M[[G_\infty^{(2)}]]) \otimes_{O_M} M$ (Amice-Vélu [AV], Vishik [Vi]) になる. ここに M は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 $M = \mathbb{Q}_p(a_n; n \geq 1)$ である.

上述の条件 (*) について述べる.

群 $G_\infty^{(1)}$ が $\overline{M}_{p^\infty}$ に作用する *diamond operator* の群である事から $G_\infty^{(1)} \subset H_{p^\infty}$ がいえる.

上述の条件 (*) とは

(*) f に対応する準同型 (4.2) が上の g, h を消さない事.

詳細は [Fu2] に述べたい.

この $L_{p\text{-adic}}^{\text{ord,univ}}$ は, 肥田氏による ordinary Λ 進保型形式 ([Hi1], [Hi2] 参照) に対応する 2 変数 p 進ゼータ関数である. Greenberg-Stevens 両氏 ([GS]), 北川氏 ([Ki]) によって既に 2 変数 p 進ゼータ関数は与えられているが, この $L_{p\text{-adic}}^{\text{ord,univ}}$ は係数が Hecke 環となっているところが, universal な点である.

また加藤氏の zeta element から 2 変数 p 進ゼータ関数を得る結果には, 落合氏 ([Oc]) による別の方法によるものもある.

注 4.12 . *ordinary* とは限らない *eigen cusp form* f の p 進ゼータ関数 $L_{p\text{-adic}}(f)$ も *universal zeta modular form* $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ から得られるが, この詳細についてはここでは述べない. [Fu2] に述べる.

4.13. 最後に定理 4.11 に述べた $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ による $L_{p\text{-adic}}^{\text{ord,univ}}$ の与え方を記す.

4.13.1. 肥田氏 ([Hi1]) により写像

$$\overline{M}_{p^\infty} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p)$$

が pairing

$$\overline{M}_{p^\infty} \times H_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_p; (f = \sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n, T) \mapsto a_1(Tf),$$

によって与えられている.

従って, 写像

$$(4.3) \quad \overline{M}_{p^\infty}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right] \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p)[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right]$$

が与えられる. *universal zeta modular form* $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ はこの (4.3) の左辺に含まれるが, その (4.3) による像について次の事がいえる.

この像も同じ記号を用いて $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ と書く.

命題 4.13.2 . $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[G_\infty^{(1)}]]$ とおく. この時次が成立する.

$$\begin{aligned} z_{p^\infty}^{\text{univ}} &\in \text{Hom}_\Lambda(H_{p^\infty}, \Lambda)[[G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right] \\ &(\subset \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p)[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right]). \end{aligned}$$

ここで, $\text{Hom}_\Lambda(,)$ は Λ 加群としての準同型である.

4.13.3. universal ordinary p -adic L function $L_{p\text{-adic}}^{\text{ord,univ}}$ は次の合成写像による $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ の像である.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\Lambda(H_{p^\infty}, \Lambda)[[G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right] &\longrightarrow \text{Hom}_\Lambda(H_{p^\infty}^{\text{ord}}, \Lambda)[[G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right] \\ &\longrightarrow H_{p^\infty}^{\text{ord}}\left[\frac{1}{h}\right][[G_\infty^{(2)}]]\left[\frac{1}{g}\right]. \end{aligned}$$

最初の写像は自然な写像である. ふたつめの写像は次のようにして与えられる:

$$\text{Hom}_\Lambda(H_{p^\infty}^{\text{ord}}, \Lambda) \longrightarrow H_{p^\infty}^{\text{ord}} \otimes_\Lambda Q(\Lambda); \psi \mapsto a.$$

ここに $Q(\Lambda)$ は Λ の全商環であり, $a \in H_{p^\infty}^{\text{ord}} \otimes_\Lambda Q(\Lambda)$ は次を満たす元である:

$$\psi(x) = T(ax) \in Q(\Lambda) \quad (x \in H_{p^\infty}^{\text{ord}}).$$

写像 T は, Trace 写像

$$T : H_{p^\infty}^{\text{ord}} \otimes_\Lambda Q(\Lambda) \longrightarrow Q(\Lambda)$$

である.

こうして $z_{p^\infty}^{\text{univ}}$ により $L_{p\text{-adic}}^{\text{ord,univ}}$ が得られた.

REFERENCES

- [AV] AMICE, Y., and VÉLU, J., *Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke*, Astérisque **24-25**(1975) 119–131.
- [Co] COLEMAN, R., *Division values in local fields*, Invent. Math. **53** (1979) 91–116.
- [Fu1] FUKAYA, T., *The theory of Coleman power series for K_2* , to appear in the Journal of Algebraic Geometry.
- [Fu2] FUKAYA, T., *K_2 -version of Coleman power series and p -adic zeta functions of modular forms*, in preparation.
- [Fu3] FUKAYA, T., *K_2 -version of Coleman power series and p -adic zeta functions of modular forms*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1200** 48–59 (2001).
- [GS] GREENBERG, R. and STEVENS, G., *p -adic L functions and p -adic periods of modular forms*, Invent. Math. **111** (1993) 407–447.
- [Hi1] HIDA, H., *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986) 231–273.

- [Hi2] HIDA, H., *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. **85** (1986) 545–613. 1
- [Hi3] HIDA, H., *Elementary theory of L -functions and Eisenstein series*, London Math. Soc. Student Texts **26** (1993).
- [Ka] KATO, K., *p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, to appear in Astérisque.
- [Ki] KITAGAWA, K., *On standard p -adic L -functions of families of elliptic cusp forms*, Contemp. Math., **165** (1991) 81–110.
- [Oc] OCHIAI, T., , Doctoral Thesis, University of Tokyo (2001).
- [Qu] QUILLEN, D., *Higher algebraic K -theory I*, Lecture Notes in Math. **342**, Springer (1973) 179–198.
- [Sc] SCHOLL, J., *An introduction to Kato's Euler systems*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254**, Cambridge Univ. Press (1998) 379–460.
- [Vi] VISHIK, M., M., *Non-archimedean measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR, Sbornik **28** (1976) 216–228.

153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

E-mail address: takako@ms357.ms.u-tokyo.ac.jp