

多自由度量子系の安定性

東京大学大学院総合文化研究科 清水 明¹, 浮穴学尚²
 東京理科大学理工学部情報科学科 宮寺隆之³

マクロだが有限な自由度をもつ量子系の安定性に関する、我々の最近の研究結果を報告する。

1 なぜ有限マクロ系なのか？

マクロ系の理論は、無限体積の系についてはかなり整備されているが、現実のマクロ系は必ず有限体積であるし、メゾスコピック系の物理も近年盛んである。そういう系では、無限系の理論では扱えない問題が出てくる。例えば、量子計算機では、入力ビット数 N ($\propto$ 体積 V) が大きいときの漸近的振る舞いを問題にするが、無限系の理論では、 $1/V$ も $1/e^V$ も全てゼロになってしまうので、無力である。また、無限体積極限で相転移を起こすような系では、オーダーパラメータとハミルトニアンが交換しない場合、有限体積での厳密な基底状態は、(実験や無限系の理論に対応する) 対称性が破れた「真空」状態 (pure-phase vacuum, 以下 PPV) ではなく、対称な基底状態 (symmetric ground state, 以下 SGS) であることが知られている [1]。この状態は、無限系では純粋状態にはなりえず [2]、有限系においてだけ純粋状態として許される特異な状態である。これに限らず、有限マクロ量子系には、無限量子系でも古典マクロ系でも許されない、特異な状態が存在する。例えば、古典マクロ系は熱力学に従うが、熱力学はどんな相加的物理量 [3] の揺らぎも $O(V)$ 以下になることを基本的に仮定している。この仮定を満たす状態を (古典、量子を問わず) normally-fluctuating state (NFS) と呼ぶと、無限量子系の純粋状態や熱平衡状態はすべて NFS である [4]。ところが、有限マクロ量子系には、一部の相加的物理量の揺らぎが $O(V^2)$ になるような、揺らぎが異常に大きい純粋状態が存在する。この異常な状態を、我々は anomalously-fluctuating state (AFS) と呼んだ。SGS も AFS のひとつである。このような異常な状態の性質の解明が、様々な分野で重要になってくると我々は考える。

2 エネルギー差と時間不変性

我々は、まず、SGS と PPV のエネルギー差 ΔE を解析した [5]。反転対称性の破れる系では、 ΔE は非常に小さい ($\Delta E \leq O(1/V)$) ことが示されていたが [6]、連続的な対称性が破れる場合については、量子論の知識だけから ΔE の大きさを一般的に評価することは難しく、 $\Delta E \leq O(\sqrt{V})$

¹ E-mail: shmz@ASone.c.u-tokyo.ac.jp

² E-mail: ukena@ASone.c.u-tokyo.ac.jp

³ E-mail: miyadera@is.noda.tus.ac.jp

という、 $V \rightarrow \infty$ で発散する粗い不等式が得られていただけであった [7]。そこで我々は、熱・統計力学的な知識（示量性仮説と熱力学的安定性）を併用することにより、 $U(1)$ 対称性が破れる場合について、 $\Delta E \geq O(V^0)$ という、厳しい不等式を初めて得た。これは V を大きくしても減らず [8]、PPV と最低励起状態のエネルギー差よりも大きい。従って、例えば数値的に低エネルギーの状態を求めると、SGS とその直上の励起状態が求まる事になるわけで、本来求めたい PPV との関係を慎重に分析する必要があることが判る。さらに、我々は、PPV の時間不変性が非自明な形で実現されることも示した。無限体積では、PPV が時間不変であることを最初に仮定するが、有限体積では、PPV がハミルトニアン固有状態でない場合には、有限時間内に別の状態に変わってしまう。特に、 $U(1)$ 対称性が破れる場合には、状態ベクトルは、 $O(1/\sqrt{V})$ という短い時間で変化する。この速い変化は、 $\mu' \equiv \partial\mu/\partial(N/V) = 0$ である自由ボーズ系では、オーダーパラメータの位相変化 [9] に全て吸収できて波動関数の形は崩れないことは知られていたが、 $\mu' > 0$ である現実の系では、 $O(V^0)$ の時間スケールの変化が残ってしまい、無限系の理論にうまく繋がらなかった。我々は、波動関数の形はこのスケールで崩れてしまっても、局所オブザーバブル [10] の期待値は、 $O(\sqrt{V})$ という長い時間スケールの間変化しないことを示した。無限系では局所オブザーバブルの期待値だけに意味があるので、この意味で有限系から無限系に繋がるのである。

3 マクロ量子系の量子状態の安定性

次に我々は、マクロ量子系が開いているときの、量子状態の安定性に注目した。開いた量子系の安定性は、様々な分野で議論されており、少数自由度系についてはかなりのことが解明された。一方、マクロ系については、ほとんどの解析が、少数の集団座標だけで記述するモデルを用いている。しかし、そのようなモデルの正当性は疑問であるし、結果も、少数自由度系の結論と同じになってしまい、例えば環境からの擾乱に対して安定か否かは、系と環境との相互作用の詳細に依存して変わると結論されていた。我々は、マクロ物理学（熱力学など）との整合性を考えると、相互作用の詳細には依らない普遍的な結果が出ないとおかしいと考え、まず、相互作用するボゾン系に対して、どんな状態がボゾンの漏れに対して安定 [11] であるかを分析し [12]、その状態の性質を詳しく調べた [13, 14]。そして、それを一般化して、きちんとマクロな自由度 N を持つモデルを採り、局所性 [15] を積極的に利用し、マクロ系なのだから N または V に関する漸近的振る舞いを評価する、という定式化を行うことによって、普遍的な結論を得た [16]。

まず、ノイズや環境からの弱い擾乱に対する安定性について、decoherence rate（純粋状態が、ノイズや環境からの弱い擾乱によって、混合状態へと変わってゆく速さ）が V のどんなベキに依存するかに注目して、ベキが 1 より大きい、異常に速く decohere する状態を“fragile”な状態と定義し、次の結果を導いた：(i) NFS は、どんなノイズや環境からの弱い擾乱を受けても、決して fragile にはならない。(ii) AFS は、ノイズの性質によって、fragile になることもあればならないこともある。結果 (i) については、多くの人々が素朴に想像しつつも誰も示せてはいなかった事を示したことであり、(ii) については、大方の予想を裏切る結果である。

そこで、マクロ物理学との整合性を普遍的に保証する、別の安定性の基準があるに違いないと

考え、「局所測定に対する安定性」という概念を提出した。これは、簡単に言えば、「マクロ系であれば、その一部分を測定したぐらいで、状態が大きく変わることはないだろう」という素朴な直感に合致する状態が、“局所測定に対して安定な”状態である。この安定性について、我々は次の定理を証明した：(iii) クラスタ性 [17] を持つ量子状態であれば、局所測定に対して安定であり、逆も言える。例えば、AFS はクラスタ性をもたないことが言えるので、この定理により局所測定をすると状態が大きく変わり、何回か局所測定を繰り返すと、やがてはクラスタ性を持つ状態（たとえば、NFS）に変わってしまうことが判る。

4 応用

我々の結果は様々に応用できる。例えば、有限系の相転移で SGS が実現されない理由はよく判っていなかったが [18]、(iii) が根本的な説明を与えると考えられる [19]。また、量子計算機が古典計算機よりも本質的に速い [20] 理由は、AFS を利用していることにあるのではないかと筆者は予想した [21]。なぜなら、AFS は、古典計算機の速さを決めているチューリングの計算理論では決して記述できない状態だからである [22]。そこで我々は、Shor の量子計算アルゴリズムを古典計算機上でシミュレートし、次のことを示した：(a) AFS が、計算途上の何力所かで現れる。(b) それらは、[16] の理論通りに、ノイズで異常に速く decohere する。(c) しかし、計算後半で現れる AFS が decohere しても、計算結果にはほとんど影響しない。(d) 他方、計算の途中で現れる AFS が decohere すると、計算結果が狂う。従って、計算の途中で現れる AFS を利用していることが、Shor の量子計算アルゴリズムが古典計算よりも速い本質であり、それは非常に不安定な状態であることが判った [23]。

謝辞

本研究の一部は、科学研究費補助金により助成されたものである。

参考文献

- [1] これは、ハミルトニアン全ての対称性を有する状態なので、domain wall もない並進不変な状態である。
- [2] 例えば、GNS-construction をやろうとしても、既約表現が得られない。
- [3] 例えば粒子数のように、全系における値が、各部分系における値の総和になるような物理量。
- [4] 無限系の場合は、相加的物理量を V で割った示強性物理量の揺らぎを見れば、NFS かどうか判別できる。
- [5] A. Shimizu and T. Miyadera, Phys. Rev. E **64**, 056121-1–056121-4 (2001).
- [6] P. Horsh and W. von der Linden, Z. Phys. **B72**, 181 (1988).

- [7] T. Koma and H. Tasaki, J. Stat. Phys. **76**, 745 (1994)
- [8] エネルギー差の密度 $\Delta E/V$ は減少するので、無限系の一般論と矛盾しない。
- [9] たとえば超伝導体では、これが交流ジョセフソン効果をもたらす。
- [10] 時間的・空間的に、有限の領域内の自由度だけが関与するオブザーバブル。一般に、物理的なオブザーバブルは、すべて局所オブザーバブルであると考えられている。
- [11] ここで議論している安定性は、よく教科書に書いてある所謂 “rigidity” とは別の安定性である。
- [12] A. Shimizu and T. Miyadera, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 688-691. (Erratum: **86**, 4422 (2001))
- [13] A. Shimizu and T. Miyadera, J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 56-59.
- [14] A. Shimizu and T. Miyadera, cond-mat/0102429
- [15] 相加的物理量が局所演算子の和になっていること、相互作用が局所相互作用であること、測定も局所的であること、を全て用いた。
- [16] A. Shimizu and T. Miyadera, quant-ph/0203106. (to appear in Phys. Rev. Lett.)
- [17] 無限系の場の理論でしばしば登場するクラスター性という概念を、有限系に拡張したもの。簡単に言えば、2つの局所演算子の揺らぎの相関が、空間的に充分離れれば消える、という性質。これは、揺らぎの相関なので、long-range order の有無とは無関係であるし、domain wall があってもクラスター性は失われない。
- [18] Symmetry-breaking field が存在すれば、PPV のエネルギーが SGS よりも下がるが、強磁性体のような単純な場合以外には、現実の実験室にそのような場は存在しない。(例えば、反強磁性体を考えてみてください。) 従って、一般の系で、SGS が排除されて PPV が実現される理由は解っていなかった。
- [19] 「相転移の真の理解には測定理論が必要であろう」という予想は、我々より早く、P.W. Anderson や A.J. Leggett も書いているが、彼らは、具体的にそれを示すことには成功していなかった。
- [20] 一般に、計算の「難しさ」や本質的な「速さ」のクラス分け (P とか NP 等) は、計算に必要な時間 T が、大きな入力ビット数 N に対してどう振る舞うかの、漸近的な関数形だけで決まる。従って、並列化などの単純な改良では、クラスは変わらない。実際、 $T = 10^N$ の計算機を、マクロな数 10^{24} 個も並列動作させても、 $T \rightarrow 10^N / 10^{24} = 10^{N-24}$ となるだけなので、 $T = N$ なる計算機に、たった $N > 26$ で負けてしまう。これに対して、量子計算機は、 T の関数形そのものが変わる (つまり本質的に速くなる)、今のところ唯一の例である。

- [21] 清水明, 科学技術振興事業団 第4回「量子効果等の物理現象」シンポジウム(2000年12月20-21日、津田ホール、東京)口頭発表。
- [22] それに対して、NFSのような通常の状態が持つ性質は、古典力学+古典電磁気学という狭い意味の古典論では記述できなくても、それらを論理的に含む、チューリングの計算理論のようなもっと広い古典論(一般に、“local objective theory”と呼ばれる)では記述できてしまう。
- [23] (a)の部分の計算は、昨年の夏までにすませていたが、口頭発表しかしていなかったため、今年の3月になって、ほぼ同じ内容の論文がプレプリントサーバーに載り、残念ながらこの部分のpriorityは失ってしまった。(b)-(d)の部分は、まだpriorityを保っているので、日本語の速報[24]に続き、論文(A. Ukena and A. Shimizu)を執筆中である。
- [24] 浮穴学尚、清水明, 「Shorのアルゴリズムに現れる異常な量子状態とその安定性」, 第6回量子情報技術研究会資料(電子情報通信学会, 2002) 211-214.