

特異点の higher conductor module について *

京大・数理解析 泊 昌孝 (Masataka TOMARI)

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 次元正則特異点 (V, p) とその特異点解消 $\pi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を使って定まる $\mathcal{O}_{V,p}$ -module $R'_* \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ を考えよう。このノートでは、 $R'_* \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の m -adic filtration (m は $\mathcal{O}_{V,p}$ の極大イデアル) と特異点の numerical invariants との関係について論ずる。まず、一般次元にも通じる話をして、1 次元特異点について述べる。そして、2 次元特異点独特の話をしたい。

筆者にとって、この研究の出発点は、命題 (2.5) であった。2 次元正則 Gorenstein 特異点について、特異点の幾何種数 p_g と算術種数 p_a にはある制限が存在する事は、以前より経験的に知られており、また、種数が小さい時には、いくつか命題が知られていた (用語については §2 を見よ)。それを、 $R'_* \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の m -adic filtration を考えることにより、具体的な命題として明らかにすることができた。だが、この研究対象が、特異点論に決定的な命題を与えてくれるかどうかは、

* このノートは、[11] Part I と密接な関係があります。

まだまだこれから問題である。

2次元正規特異点についての基礎的な事柄についての詳細などは, [4], [12], [10], [11] 等を参照して下さい。

§1. 単項化定理, 一次元特異点について

(1.1) (V, p) を n 次元被約特異点とする時, 次の data を (V, p) の partial resolution と呼びます: $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$, ただし $\psi: \tilde{V} \rightarrow V$ は 固有正則双有理写像で, $\tilde{V}$ は (局所) 正規であり, そして 解析集合 $|\psi^{-1}(p)|$ を A と書くことにします。(一次元の場合は, これは正規化であり, 勿論本当の resolution です。) 我々は, ideal $J \subset \mathcal{O}_V$ に対して, 元 $f \in J_p$ であって $J \cdot R^{n-1/2}_{\tilde{V}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} = f \cdot R^{n-1/2}_{\tilde{V}} \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ となるものが存在することを示します。その為の準備を以下このパラグラフで述べましょう。

ψ の critical locus を E と書く。すると, $\dim E \leq n-1$ であるから, 集合 $\{q \in V \mid \dim |\psi^{-1}(q)| \geq n-1\}$ は離散的であり, 以下 $\{p\}$ であると仮定する。 $R^{n-1/2}_{\tilde{V}} \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の support は $\{p\}$ に含まれる。 $R^{n-1/2}_{\tilde{V}} \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ を higher conductor module と呼びます ($n \geq 2$)。

さて, A を $A = \left(\bigcup_{j=1}^m A_j \right) \cup A'$; A_j は (大

域的) 既約成分で $\text{codim } 1$ のもの, $\text{ord } A' \geq 2$, というふうに分解します。ideal $I \subseteq \mathcal{O}_V$ に対して 記号 $D(I, \psi)$ を次のように定める。

$$D(I, \psi) := \sum_{j=1}^m \left[\inf_{f \in I_p} v_{A_j}(\psi f) \right] \cdot A_j,$$

ただし, v_{A_j} は ψf が恒等的に消える $\tilde{V}$ の連結成分に属する A_j に対しては $v_{A_j}(\psi f) = +\infty$ と定め, 他の場合, A_j の generic point に於ける ψf の vanishing order であるとする。

各 A_j に対して, 元 $f_j \in \mathcal{I}_p$ であって, 条件

$$v_{A_j}(\psi f) = \inf_{f \in \mathcal{I}_p} v_{A_j}(\psi f) \quad (\star)_j$$

を満たすものにとります。その一次結合 $f_{\alpha} = \sum_{j=1}^m a_j f_j$,

$\alpha = (a_j) \in \mathbb{C}^m$, が, generic な α に対して, すべての j について 条件 $(\star)_j$ を満たすことは, 容易に確かめることができます。上で導入した記号を使うと, $D(I, \psi) = D(f_{\alpha}, \psi)$ for generic $\alpha \in \mathbb{C}^m$ ということです。

記号 $D(I, \psi)$ に対して $\mathcal{O}_V$ -ideal sheaf $\mathcal{L}_{D(I, \psi)}$ を,

$$\mathcal{L}_{D(I, \psi)} = \begin{cases} 0; & v_{A_j}(\psi f) = +\infty \quad \forall f \in \mathcal{I}_p, \text{ とする } A_j \text{ が存在する } \tilde{V} \text{ の連結成分上,} \\ \mathcal{O}_V(-D(I, \psi)), & \text{上記以外の } \tilde{V} \text{ 上.} \end{cases}$$

と定めて, $\mathcal{O}_{D(I, \psi)} := \mathcal{O}_V / \mathcal{L}_{D(I, \psi)}$ と書くことにします。

定理 (1.2) (単項化定理)(V, p) を n 次元被約特異

点, $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を partial resolution, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_V$ を ideal sheaf, そして 元 $f \in \mathcal{I}_p$ が $D(\mathcal{I}, \psi) = D(f, \psi)$ を満たすものとする。すると, 次の関係が成立する。

$$(1) \quad \mathcal{I} \cdot R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = f \cdot R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$$

$$(2) \quad R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I} \cdot R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \cong R^{n-1}\psi_* (\mathcal{O}_{D(\mathcal{I}, \psi)}) \cong R^{n-1}\psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{V}}),$$

ただし, $\psi^*\mathcal{I}$ は $\psi^*\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_{\tilde{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の image である。

証明 (1) 次の可換図式を見よ。

$$\begin{array}{ccccc} R^{n-1}\psi_* (\psi^* f) & \longrightarrow & R^{n-1}\psi_* (\mathcal{I}_{D(\mathcal{I}, \psi)}) & \longrightarrow & R^{n-1}\psi_* (\mathcal{I}_{D(\mathcal{I}, \psi)} / \psi^* f) \\ & \searrow a & \downarrow b & & \parallel \\ & & R^{n-1}\psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}) & & 0 \end{array}$$

ここで, 消滅 c は, $n=1$ の時は $\mathcal{I}_{D(\mathcal{I}, \psi)} = (\psi^* f)$ であることにより, $n \geq 2$ の時は $\mathcal{I}_{D(\mathcal{I}, \psi)} / \psi^* f$ の ψ に対する相対次元が $n-2$ 以下であることによる。ゆえに $\text{Im } a = \text{Im } b$ である。そして, $\psi^* f$ を掛けることにより $\psi^* f \cdot \mathcal{O}_{\tilde{V}} \cong (\psi^* f)_{\mathcal{O}_{\tilde{V}}}$ が導く図式

$$\begin{array}{ccc} R^{n-1}\psi_* (\psi^* f) & \xrightarrow{a} & R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \\ \uparrow \eta_S & \nearrow f \text{ の 積, } & \\ R^{n-1}\psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}) & & \end{array}$$

を見て, $\text{Im } a = f \cdot R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ がわかる。更に, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 R^{n-1}_*(\psi^*(\mathcal{O})) & \xrightarrow{\quad} & R^{n-1}_*(\mathcal{O}_D(\mathcal{L}_t)) \\
 \uparrow & \searrow \scriptstyle d & \downarrow \scriptstyle b \\
 \mathcal{O} \otimes R^{n-1}_*(\mathcal{O}_V) & \xrightarrow[\text{積}]{\quad e \quad} & R^{n-1}_*(\mathcal{O}_V)
 \end{array}$$

を見て、関係

$\text{Im } b = \text{Im } a = f_* R^{n-1}_*(\mathcal{O}_V) \subseteq j_* R^{n-1}_*(\mathcal{O}_V) = \text{Im } e \subseteq \text{Im } d \subseteq \text{Im } b$
 が得られ、これらが一致することがわかった。

(2) は $\text{coker } e = \text{coker } b = \text{coker } d$ であるから明らか。

証明終。

以後、この節では一次元特異点について考察する。

命題 (1.3) 一次元被約特異点 (V, p) について、次の等式が成立する。 $\dim (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V)_{\mathfrak{m}} (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) = e(m, \mathcal{O}_{V,p}) - 1$ 。
 ただし、 $e(m, \mathcal{O}_V)$ は $\mathcal{O}_V$ の $\mathfrak{m}$ に関する重複度である。

証明 degree $D(m, \psi) = e(m, \mathcal{O}_{V,p})$ であることは良く知られている。そして、定理 (1.2) により、これは $\dim (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V)_{\mathfrak{m}} (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V)$ と一致する。与式の左辺 = $\dim (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathfrak{m} \cdot \psi_* \mathcal{O}_V + \mathcal{O}_V) = \dim (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathfrak{m} \cdot \psi_* \mathcal{O}_V) - \dim (\mathfrak{m} \cdot \psi_* \mathcal{O}_V + \mathcal{O}_V / \mathfrak{m} \cdot \psi_* \mathcal{O}_V)$
 $= e(m, \mathcal{O}_{V,p}) - \dim \mathcal{O}_V / \mathfrak{m} \cdot \psi_* \mathcal{O}_V \cap \mathcal{O}_V$ である。 $\mathfrak{m} \cdot \psi_* \mathcal{O}_V \cap \mathcal{O}_V = \mathfrak{m}$ であることは容易にわかり、求める結果が従う。証明終

(1.4) $\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V$ の m -adic filtration について考えよう。
 数 $L(V, p) \in \mathbb{Z}$ $L(V, p) = \min \{ d \in \mathbb{Z} \mid d \geq 0, m^d (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) = 0 \}$
 として定める。中山の補題により, $m^i (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) \neq 0$ ならば $m^{i+1} (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) \neq m^i (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V)$ である。ゆえに数 $L(V, p)$ は filtration
 $\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V \supseteq m (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) \supseteq \cdots \supseteq m^{L(V, p)} (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) = 0$
 の長さである。

$D(m, \gamma) = D(f, \gamma)$ となる元 $f \in M$ をとると, 明らかに,
 $D(m^d, \gamma) = D((f^d), \gamma)$ for $d \geq 0$, であるから,
 等号 $m^d (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) = f^d (\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V)$ $d \geq 0$ が成立する。
 上記 filtration は f による ψ zero endomorphism

$$f \cdot : \psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V \longrightarrow \psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V$$

によりきまる。 $f \cdot$ の固有空間の次元は $e(m, \mathcal{O}_{V, p}) - 1$ であり (1.3), nilpotency order は $L(V, p)$ である。ゆえに,

命題 (1.5) 一次元被約特異点 (V, p) について, 次の不等式が成立する。
 $\dim(\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) \leq L(V, p) (e(m, \mathcal{O}_{V, p}) - 1)$
 $L(V, p) + e(m, \mathcal{O}_{V, p}) - 2 \leq \dim(\psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V)$.

(1.6). 上の filtration に関する 2つの特別な場合について, その言い換えに注意しておく。

$$(1) \quad L(V, p) = \dim(\Psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) \Leftrightarrow e(m, \mathcal{O}_{V, p}) = 2.$$

$$(2) \quad L(V, p) = 1 \Leftrightarrow (V, p) \text{ は Cohen-Macaulay of maximal} \\ \text{emb. dim であり, かつ 1 回 } m \text{ で blow up} \\ \text{して normal になる。}$$

証明についてひとこと. (1) は命題 (1.3) に含まれている. (2) については, 等式 $m \cdot (\Psi_* \mathcal{O}_V / \mathcal{O}_V) \cong m \cdot \Psi_* \mathcal{O}_V / m \cdot \mathcal{O}_V$ に気を付ければ, 伊藤 [5] に含まれている。

§2. 2次元正規特異点の numerical invariants について

(2.1) 2次元正規特異点 $(V, p) / \mathbb{C}$ とある resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を考えよう. $R^i \Psi_* \mathcal{O}_V$ は resolution のとり方に依らない $\mathcal{O}_V$ -module であることが Leray の spectral sequence によって確かめることができる. そのことを念頭に置いて, 数 $L(V, p)$ を
$$L(V, p) = \min \{ d \in \mathbb{Z} \mid d \geq 0, m^d \cdot R^i \Psi_* \mathcal{O}_V = 0 \}$$
 と置く. (1.4) で言ったのと同様に, この数

$L(V, p)$ は m -adic filtration

$$R^i \Psi_* \mathcal{O}_V \supseteq m \cdot R^i \Psi_* \mathcal{O}_V \supseteq \cdots \supseteq m^{L(V, p)} R^i \Psi_* \mathcal{O}_V = 0$$

の長さである。

$D(m, \psi) = D(f, \psi)$ とする元 $f \in m$ をとり, $m^d \cdot R^i \Psi_* \mathcal{O}_V = f^d \cdot R^i \Psi_* \mathcal{O}_V \quad d \geq 0$ が成立し, 上記

filtration は積による π zero endomorphism

$$f: R'_{\pi} \mathcal{O}_{\pi} \longrightarrow R'_{\pi} \mathcal{O}_{\pi}$$

によりきままる。 f の固有空間の次元は $\dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,t)})$ であり (1.3), したがって, nilpotency order は $L(V,p)$ である。

ゆえに,

命題 (2.2) 2次元正則特異点 (V,p) の resolution ψ :

$(\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ について, 次の不等式が成立する。

$$\dim R'_{\pi} \mathcal{O}_{\pi} \leq L(V,p) \cdot \dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,t)}).$$

$$L(V,p) + \dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,t)}) - 1 \leq \dim R'_{\pi} \mathcal{O}_{\pi} \quad \parallel$$

$\dim R'_{\pi} \mathcal{O}_{\pi} \in$ 幾何種数 (geometric genus) と呼んで $p_g(V,p)$ と書く。この節では, もうひとつ2次元独特の numerical invariant p_a をも加えて, $R'_{\pi} \mathcal{O}_{\pi}$ の情報との関係を論じたい。 resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ に対して 数 $\sup \{ p_a(D) \mid \text{non-zero effective divisor } D \text{ on } \tilde{V}, \text{ s.t., } |D| \subset A \}$ を考えよう。ただし, $p_a(D) := 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$ とする。これは有限値であり, resolution のとり方に依るはいことがわっている [12]。この数も特異点 (V,p) の 算術種数 (arithmetic genus) と呼んで $p_a(V,p)$ と書く。この数の“感じ”をわかっていただく為に, 次の補題を見て下さい。

補題 (2.3) 上の状況において, non-zero effective divisor D on $\tilde{V}$, a.t. $|D| \subset A$, に対して次の等式が成立する。

$$p_a(D) = \dim R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} - \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) - \dim \mathcal{O}_{\tilde{V}}/\psi_*(\mathcal{O}_D).$$

証明 $0 \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{V}} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$ により, 完全列 $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{V}}/\psi_*(\mathcal{O}_D) \rightarrow \psi_*(\mathcal{O}_D) \rightarrow R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) \rightarrow R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \rightarrow R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) \rightarrow 0$ が従う。この完全列により, 等式, $p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D) = 1 - \dim \psi_*(\mathcal{O}_D) + \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) = 1 + \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) - \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) - \dim \mathcal{O}_{\tilde{V}}/\psi_*(\mathcal{O}_D)$ がわかる。 $1 = \dim \mathcal{O}_{\tilde{V}}/\psi_*(\mathcal{O}_D)$ に気を付けてやれば, 主張が従う。 証終

これより, 特に $p_a(D) \leq p_g(V, p)$ であり, $p_a(V, p) \leq p_g(V, p)$ なのだが, 更に次の事が成立する。

命題 (2.4) 2次元正規特異点 (V, p) について, 次の不等式が成立する。

$$L(V, p) + p_a(V, p) - 1 \leq p_g(V, p).$$

証明 resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を考え, non-zero effective divisor D on $\tilde{V}$ であって $|D| \subset A$ かつ $p_a(D) = p_a(V, p)$ となるものをとる。補題 (2.3) により,

$\dim R'_k(\mathcal{O}_v) - p_v(v, p) = \dim R'_k(\mathcal{O}_v) + \dim \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v)$ である。中山の補題を使て、 $\mathcal{M}^{\dim R'_k(\mathcal{O}_v)} R'_k(\mathcal{O}_v) = 0$ と $\mathcal{M}^{\dim(\mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v))} (\mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v)) = 0$ (すなわち $\mathcal{M}^{\dim(\mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v))+1} \subseteq \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v)$) がわかる。可換図式

$$\begin{array}{ccc} R'_k(\mathcal{O}_v) & \xrightarrow{g} & R'_k(\mathcal{O}_v) \\ \uparrow & \searrow & \nearrow \text{特.} \\ \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v) \otimes R'_k(\mathcal{O}_v) & & \end{array}$$

を見て、次の関係が従う。 $\mathcal{M}^{\dim R'_k(\mathcal{O}_v) + \dim(\mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v)) + 1} R'_k(\mathcal{O}_v) \subseteq \mathcal{M}^{\dim R'_k(\mathcal{O}_v)} \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v) \cdot R'_k(\mathcal{O}_v) \subseteq g(\mathcal{M}^{\dim R'_k(\mathcal{O}_v)} R'_k(\mathcal{O}_v)) = 0$. ゆえに、 $1 + p_g(v, p) - p_v(v, p) = \dim R'_k(\mathcal{O}_v) + \dim \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_v) + 1 \geq L(v, p)$ である。 証終.

命題 (2.5) 2次元正規特異点 (V, p) について、 $p_g(v, p) = p_v(v, p)$ ならば、 $p_g(v, p) \leq \text{Cohen-Macaulay type}$ である。

証明. $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ は resolution, $\omega_v \subset \omega_{\tilde{v}}$ をそれぞれ、 V と $\tilde{V}$ の dualizing sheaf とする。non-degenerate $\mathbb{C}$ -bilinear pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle: R'_k(\mathcal{O}_v) \times \omega_{\tilde{v}}/\psi_*\omega_{\tilde{v}} \rightarrow \mathbb{C}$ を、関係式 $\langle \alpha, \psi\beta \rangle = \langle \psi\alpha, \beta \rangle$ for $(\alpha, \beta, \psi) \in R'_k(\mathcal{O}_v) \times \omega_{\tilde{v}}/\psi_*\omega_{\tilde{v}} \times \mathcal{O}_v$ が成立するように、構成できる (Serre [9], Laufer [6])。ゆえに任意の ideal $I \subseteq \mathcal{O}_v$

に対して, 次の duality が容易に確かめられる。

$$\{d \in R^! \mathcal{O}_v \mid d \cdot d = 0\} \xleftrightarrow{\text{dual}/d} (W_v / \mathcal{O}_v(W_v)) / d \cdot (W_v / \mathcal{O}_v(W_v)).$$

さて, $p_g(W_p) = p_a(V_p)$ ならば $m \cdot R^! \mathcal{O}_v = 0$ である (2.4)。上の duality により, $p_g(V_p) = \dim R^! \mathcal{O}_v(\mathcal{O}_v) = \dim (W_v / \mathcal{O}_v(W_v)) / m \cdot (W_v / \mathcal{O}_v(W_v)) = \dim W_v / m W_v + \mathcal{O}_v(W_v) \leq \dim W_v / m W_v = \text{Cohen-Macaulay type}.$ 証明

これは、命題 (1.3) [3], 定理 (2.16) [15], 定理 B [16], [7] などの研究の延長線上にある命題である。

例 (2.6) (渡辺敬一先生による) $p_g - p_a = \text{Cohen-Macaulay type}$ となるような例をあげておく。genus g の curve X 上の line bundle $[-d \cdot P] \rightarrow X$; P は X 上の一点, d は自然数, の zero-section をつづいて得られる特異点 (V, p) は $\text{Spec } R = V$, $R = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(kdP)) T^k$ と書くことができる ([8], [1], 参)。 R の canonical module K_R は [2], [13] により

$$K_R = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^0(X, K_X \otimes \mathcal{O}_X(kdP)) T^k \text{ と書け,}$$

$$p_g(V, p) \text{ は } p_g(V, p) = \sum_{k \geq 0} \dim H^1(\mathcal{O}_X(kdP)) \text{ と書ける [8].}$$

$$d \geq 2g+1 \text{ ならば, } H^1(X, \mathcal{O}_X(ndP)) = 0 \quad n \geq 1,$$

$$H^0(X, K_X \otimes \mathcal{O}_X(mdP)) = 0 \quad m \leq -1, \text{ として,}$$

$H^0(X, K_X) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(m\alpha P)) \longrightarrow H^0(X, K_X \otimes \mathcal{O}_X(m\alpha P))$ は 上射
for $n \geq 1$ である。ゆえに, この時, $p_g = p_a = \text{Cohen-Macaulay type} = \text{genus of } X$ である。

p_a はその定義により, resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ における例外集合 $A = \bigcup_{j=1}^m A_j$ の intersection matrix $(A_i \cdot A_j)$ によって決定できる数である。一方 p_g は $(A_i \cdot A_j)$ では決まらない。だが, 特異点が good $\mathbb{C}^*$ -action を持つ場合には, $R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の m -adic filtration が, 次の形で制限されることがわかる。

定理 (2.7) (V, p) を 2次元正規特異点であって good $\mathbb{C}^*$ -action を持つとする。この時, 任意の resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ に対して, 次の不等式が成立する。

$$\dim \left(R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / m R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \right) \leq p_a(V, p).$$

証明を述べる前に, すでに得られているこのノートの中の結果と組みあわせて, 次の事が得られることに注意する。

good $\mathbb{C}^*$ -action を持つ特異点について,

$$(1) \quad m R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0 \iff p_a(V, p) = p_g(V, p)$$

$$(2) \quad p_a(V, p) = 0 \iff p_g(V, p) = 0.$$

$$(3) \quad p_a(V, p) = 1 \Leftrightarrow \dim R'_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / m \cdot R'_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 1$$

$$\Leftrightarrow L(V, p) = p_g(V, p) \text{ かつ } p_g \neq 0.$$

ただし, (2) は $\mathbb{C}^*$ -action の条件なして, すでに M. Artin によって証明されている。

筆者には, "上の m -adic filtration と p_a の直接対応" は興味深い事に思える。そして, $\mathbb{C}^*$ -action の存在の仮定しない場合に 定理が成立するかどうかは, 次に解くべき本質的な問題である。

定理 (2.7) の証明の概略. 次の命題を証明抜きで使おう。

命題 (2.8) 2次元正規特異点 (V, p) と 非自明な partial resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ であって, $\tilde{V}$ が高々有理特異点しか持たないものを考えよ。この時,

$$(1) \quad p_a(V, p) = \max \left\{ 1 - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/I) \mid \begin{array}{l} I: \text{coherent ideal sheaf of } \mathcal{O}_{\tilde{V}} \\ \text{s.t. } I \neq \mathcal{O}_{\tilde{V}}, \text{supp}(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/I) \subseteq A \end{array} \right\}$$

(2) 更に, 右辺の I として divisorial なものに制限しても等号が成立する。

さて, 我々は $\mathbb{C}^*$ -action を特異点の一般論 ([1], [8], [13] [14]) により, curve X とその上の $\mathbb{Q}$ -Weil divisor D を

用いて, $R = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(L^k D)) T^k$, $\text{Spec } R = V$,

とあらわす。更に, partial resolution $\psi \in$

$$\tilde{V} = \text{Spec} \left(\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}_X(L^k D) T^k \right) \xrightarrow{\psi} \text{Spec } R$$

$\bigcup$
 X

として構成する。ここで, $|\psi(p)| = X$ であり, $\tilde{V}$ は cyclic quotient singularity (特に rational singularity) を持つのみである。 $D(m, \psi) = r_m \cdot X$, $r_m \in \mathbb{N}$ と書くと,

$$\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X) = \bigoplus_{k \geq r_m} \mathcal{O}_X(L^k D) T^k \text{ が成立する (}$$

Remark (1.5) (ii) [14])。そこで, 次の完全列を見よ。

$$0 \rightarrow \psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X)) \rightarrow \psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \rightarrow \psi_* (\mathcal{O}_{D(m, \psi)})$$

$\parallel$ $\parallel$
 m $\mathcal{O}_V$

$$\rightarrow R^1 \psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X)) \xrightarrow{h} R^1 \psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \rightarrow R^1 \psi_* (\mathcal{O}_{D(m, \psi)}) \rightarrow 0$$

$$\bigoplus_{k \geq r_m} H^1(X, \mathcal{O}_X(L^k D)) \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0} H^1(X, \mathcal{O}_X(L^k D))$$

これより, h は単射であり, $\psi_* (\mathcal{O}_{D(m, \psi)}) \cong \mathbb{C}$ である。

$$\text{ゆえに, } p_a(V, p) \geq 1 - \chi(\mathcal{O}_{D(m, \psi)}) = \dim H^1(\mathcal{O}_{D(m, \psi)})$$

$$= R^1 \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / m \cdot R^1 \psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \text{ である。 } \psi': (V', A') \rightarrow (V, p)$$

を任意の resolution とすると, $R^1 \psi'_* (\mathcal{O}_{V'}) = R^1 \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$

であることは標準的な議論で従う。

証明終

参考文献.

- [1] M. Demazure : Anneaux gradués normaux, preprint.
- [2] S. Goto, Kei-i. Watanabe : On graded rings I, J. Math. Soc. Japan vol. 30., 179 — 213 (1978).
- [3] F. Hidaka, Kei-i. Watanabe : Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor, Tokyo J. Math. 4., 319 — 330 (1981).
- [4] 樋口, 吉永, 渡辺 (公) : 多変数複素解析入門, 森北出版株式会社, 1980.
- [5] S. Itho : Analytically unramified local ring について, 可換環論シンポジウム報告集(第5回) 71-76 (1984).
- [6] H. B. Laufer : On rational singularities. Amer.-J. Math. 94. (1972) 597 — 608.
- [7] S. Ohyanagi, E. Yoshinaga : A criterion for 2-dimensional normal singularities to be weakly elliptic. Science rep. of Yokohama National Univ. ser II, vol 26, 5-7 (1979).
- [8] H. Pinkham : Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$ -action. Math. Ann. 227, 183 — 193 (1977).
- [9] J. P. Serre : Un théorème de dualité. Comm.

Math. Helv. 29, 9-26 (1955).

[10] M. Tomari : A p_3 -formula and elliptic singularities.
preprint. R.I.M.S. No 458.

[11] _____ : 幾何種数の計算公式と楕円型特異点について (総合報告, その他), 1984年3月. 数理研シンポジウム "多様体の特異点の最近の成果" 講究録.

[12] P. Waegerich : Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math. 92., 419-454 (1970).

[13] Kei-ichi Watanabe : Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya. Math. J vol 83 (1981) 203-211.

[14] _____ : Rational singularities with k^* -action in "Commutative algebra" Proc. Trento Conf. edited by S. Greco and G. Valla. 339-351. Lecture Note. Pure and applied Math. No 84 (1983). Marcel Dekker.

[15] Kimio Watanabe : On plurigenere of normal isolated singularities I. Math. Ann. 250, 65-94 (1980).

[16] S.-S.-T. Yau : On maximally elliptic singularities Trans. A.M.S. 257, 269-329 (1980).