

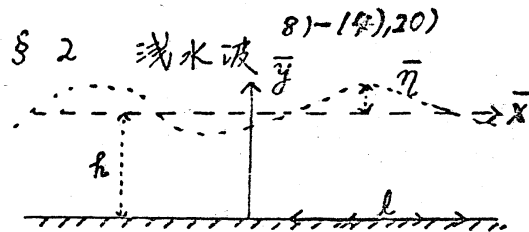
流体力学とソリトン

東大 宇宙研 橋本典典

§ 1 はしがき

流体力学でソリトンあるいは K.d.V 方程式のあらわれる
 ばあいは必ずしも多くはない。通常対象とする空気や水な
 どでは均一な媒質をとる限り、有限振幅波の非線型作用
 によるつつ立ちを止めるものが分散効果よりも散逸効果であ
 るからである。たゞ線型波が分散性をもつばあいは、すなわち
 1) 廻転(遠心力²⁾³⁾、成層(浮力⁴⁾⁷⁾、稠度(マグネティシム¹¹⁾⁴⁾⁻⁷⁾)
 などの非保存力のあらわれる系 2) 浅水波、表面張力波⁸⁾⁻¹⁴⁾
 (高木氏の項参照) などの界面現象 3) 泡を含む流体¹⁵⁾、プ
 ラズマなどの混相流ではその存在が導かれている。均一なプ
 ラズマなどについては Taniuti¹⁷⁾¹⁸⁾, Wei¹⁸⁾, Kakutani¹⁸⁾, Ono¹⁸⁾, Su
 Gardner¹⁹⁾ を見ていたいくことにして、こゝでは界面あるいは
 非均質のばあいをとらえ、K.d.V 方程式のもととなった浅水
 波^{8)-14), 20)}の理論の概観と、最近の例として Benney-Luke¹⁴⁾ による浅水波

ソリトンの2次元の相互作用(1964)と Benney⁵⁾ による
成層流中の有限振幅波のとりあつかい(1965)を述べて責
を果したい。



一様な深さ h の乱されない水面内の位置ベクトルを $\bar{x}$ とし、
それに鉛直に y 軸をとれば縮まない流体の渦なし運動は、3
次元ポテンシャル $\bar{\Phi}$ を導入すれば

$$\bar{\Phi} = \bar{\nabla}_3 \bar{\Phi}, \quad \Delta_3 \bar{\Phi} = 0 \quad (1)$$

によって支配される。ただし $\bar{\nabla}_3, \Delta_3$ はそれぞれ3次元の
Gradient, Laplacian をあらわす。 $\bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t})$ を水面の波動
によるもりよりとすれば $\bar{\Phi}$ は次の境界条件によって定まる。

$$\bar{y} = \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t}) \text{ で } \begin{cases} \bar{\Phi}_{\bar{y}} = \bar{\eta}_{\bar{t}} + \bar{\Phi}_{\bar{x}} \cdot \bar{\eta}_{\bar{x}} \text{ (運動学的 B.C.)} \\ \bar{\Phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_3 \bar{\Phi})^2 + g \bar{\eta} = 0 \text{ (圧力一定の条件)} \end{cases} \quad (2)$$

$$\bar{y} = -h \text{ で } \bar{\Phi}_{\bar{y}} = 0 \quad (\text{固体底面}) \quad (4)$$

代表的な長さとして水平方向に l , 高さ方向に h , 代表速
度を $c = \sqrt{gh}$ (線型浅水波の速度) とし無次元変数

$$x = \bar{x}/l, \quad y = \bar{y}/h, \quad t = (cl)\bar{t}, \quad \Phi = \bar{\Phi}/(cl)$$

を導入すれば(1) — (4)は

$$\epsilon \Delta \Phi + \Phi_{yy} = 0 \quad \therefore \nabla = \partial/\partial x, \Delta = \partial^2/\partial x^2 \quad (1')$$

$$y = \eta \quad \begin{cases} \Phi_y = \epsilon [\eta_t + \nabla \Phi \cdot \nabla \eta] \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} \Phi_t = -\frac{1}{2} [(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\epsilon} \Phi_y^2] \end{cases} \quad (3')$$

$$y = -1 \quad \Phi_y = 0 \quad (4')$$

に帰着する。

(1'), (4') を満足する解は水底 $y = -1$ の Φ の値 $\phi(x, t)$ を用い
れば演算子

$$C = \cos(Y\sqrt{\epsilon\Delta}) \quad \text{ただし } Y = y + 1 \quad (5)$$

$$S_1 = \sin(Y\sqrt{\epsilon\Delta})\sqrt{\epsilon\Delta}$$

を用いて形式的に

$$\Phi = C\phi(x, t), \quad \nabla \Phi = C\nabla \phi, \quad \Phi_t = C\phi_t, \quad \Phi_y = -S_1\phi$$

と書き、(2') (3') から ϕ と η に対する方程式

$$\left. \begin{aligned} S_1\phi + \epsilon [\eta_t + (C\nabla \phi) \cdot \nabla \eta] &= 0 \\ C\phi_t + \frac{1}{2} [(C\nabla \phi)^2 + (S_1\phi)^2] + \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ただし } y = \eta(x, t) \quad \begin{matrix} (6) \\ (7) \end{matrix}$$

が得られる。

§ 2.1 非常に浅い波の理論 $\epsilon = (h/l)^2 \ll 1$.

$$(6)(7) \text{ で } \epsilon \rightarrow 0 \text{ とすれば } C = 1 + O(\epsilon), S_1 = Y\epsilon\Delta + O(\epsilon^2)$$

となるので、 $\nabla \phi = V$, $Y = \eta + 1$ とおけば

$$\epsilon [Y\Delta \phi + \eta_t + \nabla \phi \cdot \nabla \eta] = O(\epsilon^2) \rightarrow \boxed{Y_t + \nabla \cdot (YV) = 0 \dots (8)}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \eta = O(\epsilon) \xrightarrow{\nabla \epsilon \epsilon^2} \boxed{V_t + (V \cdot \nabla)V = -\frac{1}{Y} \nabla \left(\frac{1}{2} Y^2 \right) \dots (9)}$$

(8)(9) は通常の浅水波の基礎式で、また密度が Y , 圧力が $\frac{1}{2} Y^2$ である。

与わす断熱指数 γ の圧縮性流体の運動を支配する方程式に一致する。振中 η は有限であつてもかまわない。こゝで、波の速さは $(dp/d\rho)Y = 1 + \eta$ で η と共に増加し、その高い部分の低い部分に就いて波のつつ立ちをおこし、Hydraulic jump (水面衝撃波)を形成する。

§ 2.2 微小振中の理論 $\phi \sim \eta \sim O(\delta)$

逆に η が小さくすれば(6),(7)は $\phi \sim \eta \sim O(\delta) \ll 1$

$Y = 1 + O(\delta)$ 故に $C = \cos(\sqrt{E}\Delta) + O(\delta)$, $S_s = \sqrt{E}\Delta \sin \sqrt{E}\Delta + O(\delta)$ とするこゝを示す。 $\delta \rightarrow 0$ として(6),(7)から得られる

$$\left. \begin{aligned} S_s \phi + E \eta_t &= 0 \\ C \phi_t + \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{すなわち } S_s \phi = E C \phi_{tt} \quad (10)$$

で $\phi \propto \exp i(Kx - \omega t)$ とおけば

$$C \phi = \cos k(\sqrt{E}k) \phi, \quad S_s \phi = -k\sqrt{E} \sin k(\sqrt{E}k) \phi$$

の関係があるから、 ω と k の間には分散関係

$$\omega^2 = \frac{1}{\sqrt{E}} k \tan k(\sqrt{E}k) \quad (11)$$

が成り立つ。さらに $E \rightarrow 0$ とすれば $\omega = k$ となり速度 $1(\sqrt{g}k)$ の非分散波を與えるがこれは § 2.1 で $\eta \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$ とおいた結果と一致する。

§ 2.3 分散性浅水波-Boussinesq⁹⁾ の方程式

§ 2.1 では $E = h^2/l^2 \ll 1$, § 2.2 では $\delta = a/h \ll 1$ (a は波の振中)としたが E, δ が共に小さくして

$$(\gamma \Delta - \frac{\epsilon}{6} \gamma^3 \Delta^2) \phi + \eta_t + \nabla \phi \nabla \eta = O(\epsilon^2 \delta, \epsilon \delta^2) \quad (12)$$

$$(1 - \frac{\epsilon}{2} \gamma^2 \Delta) \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \eta = O(\epsilon^2 \delta, \epsilon \delta^2) \quad (13)$$

と得る。これと ϵ, δ を小として

i) $\epsilon \ll \delta$ すなわち $\ell^3 \ll a \ell^2$ が通常の浅水波と

ii) $\epsilon \gg \delta$ すなわち $\ell^3 \gg a \ell^2$ が線型分散波を與えるという

2重極限が問題になることを示す。

$\epsilon \sim \delta$ のばあいには ℓ を適当に選べば $\epsilon = \delta$ とかくことがで

き $O(\epsilon^3)$ と無視すれば

iii) $\epsilon = \delta$

$$\gamma_t + \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) = \frac{\epsilon}{6} \Delta^2 \phi \quad (14)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \eta = \frac{\epsilon}{2} \Delta \phi_t \quad (15)$$

$\gamma = 1 + \eta$ を消去し $O(\epsilon^3)$ の項を無視すれば

$$L[\phi] \equiv (\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = [\frac{1}{2} \phi_t^2 + (\nabla \phi)^2]_t - \frac{\epsilon}{3} \Delta^2 \phi \quad (16)$$

これは Boussinesq の方程式を一般化したものである。一次

元伝播波として $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$, 右辺で $\partial / \partial t = \pm \partial / \partial x + O(\epsilon)$ とおけば
 右方程式は容易に解ける。

§ 2.4 K. d. V. 方程式

たとえば $x = 0$ で $u = \phi_x = -f'(t)$, $t = 0$ で $\phi = \phi_t = 0$ の

条件の下に $x > 0$ の方向に伝播する一次元波に対して ϵ の中

級数 $\phi = \epsilon \phi_0 + \epsilon^2 \phi_1 + \dots$ の形の解を求めようとする

(16) から次の逐次近似方式を得る。

$$L[\phi_0] = 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (17)$$

$$L[\phi_1] = \left(-\frac{1}{2} \phi_0^2 + \phi_0^2 \right)_t - \frac{1}{3} \phi_{0xxx} \quad (18)$$

$$\text{よって (17) の解 } \phi_0 = \begin{cases} f(t-x) & x < t \\ 0 & x > t \end{cases}$$

を (18) の右辺に代入して ϕ_1 を求めると境界条件を考慮すれば

$$\phi_1 = \frac{1}{6} (f''' - \frac{9}{2} f'^2) x + \frac{1}{6} \left(f'' - \frac{9}{2} \int_0^{t-x} f'(\xi) d\xi \right) \quad (19)$$

となり x の大きい所で発散する解に導く。これは (18) の右辺に生ずる secular term によるものであり。Front の近く $x \sim t$ でこれをさけるためには時間座標を縮小する特性座標変換

$$\begin{cases} \xi = x - t \\ \tau = \epsilon t \end{cases} \quad (20)$$

$$(21)$$

を行ない (x, t) のかわりに (ξ, τ) を独立変数としてえらぶ。

このとき (17)(18) の代りに

$$\phi_{0\xi\xi} - \phi_{0\tau\tau} = 0 \quad (22)$$

$$\phi_{1\xi\xi} - \phi_{1\tau\tau} - 2\phi_{0\xi\tau} = \left(\frac{3}{2} \phi_0^2 \right)_\tau - \frac{1}{3} \phi_{0\xi\xi\xi}$$

を得る。第一式は恒等式となるが第二式は ϕ_0 に対する方程式

を與え。 $\phi_{0x} = u$ とおけば K.d.V 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \quad (23)$$

に帰着し。第一 C でだけに依存する解は一定速度で伝播する連なり波乃至孤立波を与える (29)。このように深さと波長に応じて伝播の模様が変ることは、たとえば沖から岸に押しよせる波

などに複雑な変化がありうることを予想させる。

§ 2.4 2つの二次元浅水孤立波⁴⁾

(1.6) 式に独立変数として

$$\psi_l = \psi_{l0} + k_l \cdot X - c_l t \quad (l=1, 2) \quad \psi_{l0}, k_l, c_l \text{ は定数} \quad (24)$$

$$\text{ただし} \quad c_l = 1 + \varepsilon \lambda_l + \varepsilon^2 \mu_l + \dots \quad (25)$$

を導入し $\phi = \varepsilon f^{(0)} + \varepsilon^2 f^{(1)} + \dots$ と展開すれば, 第0近似として

$$L[f^{(0)}] = 0, \quad L = 2[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 1] \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \psi_2}, \quad d_l = \text{diag}(k_l) \quad (26)$$

$$\text{を得る。}(26) \text{ の解 } f^{(0)} = f_1^{(0)}(\psi_1) + f_2^{(0)}(\psi_2) \quad (27)$$

を用いれば $f^{(1)}$ に対する方程式は

$$L[f^{(1)}] = -\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{3} f_i^{(0)''''} + 3 f_i^{(0)'} f_i^{(0)''} - 2 \lambda_i f_i^{(0)'} \right) \\ - [1 + 2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] (f_1^{(0)''} f_2^{(0)'} + f_1^{(0)'} f_2^{(0)''}) \quad (28)$$

に帰する。右辺第1項は secular term であるので、これが0

となることを要請し積分すれば

$$\frac{1}{3} f^{(0)''''} + \frac{3}{2} (f_i^{(0)'})^2 - 2 \lambda_i f_i^{(0)'} = d_i \quad (29)$$

これは $i=1, 2$ に対して違つた方向 (k_1, k_2) に伝播するつら

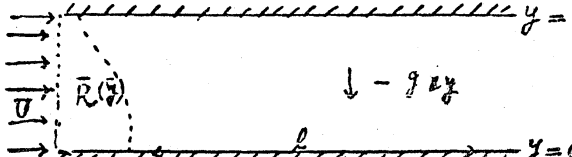
なり波 ($d_i \neq 0$) 乃至は孤立波 ($d_i = 0$) を与える。このとき (28)

は解

$$f^{(1)} = \frac{1 + 2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{2 [1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]} [f_1^{(0)} f_2^{(0)'}]' + f_1^{(1)}(\psi_1) + f_2^{(1)}(\psi_2) \quad (30)$$

を持つが第1項は2つの波の相互作用交角 $\frac{2}{3}\pi$ のときは消失する。また孤立波のときは、その交点に局在する。 $(\alpha_1 = \alpha_2$ ときは近似が悪い)。第2, 3項および μ_i は(6)(7)近似の^{の高い}secular termから決定され、⁽¹⁴⁾連なり波の速度が単独のときより変化するが、 $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2}{3}\pi$ のとき、あるいは孤立波同士の場合は影響のないことを示す。

§3 成層流体中の有限振幅波

 重力 $-g\bar{e}_y$ の下に水平固体壁 $y=0, h$ の間を一樣な速度 U で流れる2次元成層流(密度 $\bar{\rho}(y)$)を考える。流体の圧縮性、散逸効果も無視すれば、流れは

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} \right] \bar{\rho} = 0 \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (32) \quad \left. \vphantom{\frac{D\bar{\rho}}{Dt}} \right\} \text{(非圧縮性)}$$

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = -\nabla p - \bar{\rho} g \bar{e}_y \quad (33) \quad \text{(運動方程式)}$$

によって支配される。ただし $\bar{\rho}$ は密度、 p は圧力とする。流れの方向の長さ x 、深さ z 、流速を $(U, hU/h)$ で無次元化し、一のない量であらわれる。(32)は $\bar{\mathbf{v}} = (u, v)$ が流れの

$$\text{関数} \quad u = 1 + \delta^2 \phi / \partial y, \quad (34)$$

$$v = -\delta^2 \phi / \partial x, \quad (35)$$

によって導かれることを示す。密度の $\bar{\rho}(y)$ からのずれを $\delta \rho$ とすれば(31), (33)は

$$\rho_t - R_y \psi_x + \delta (\rho_x \psi_y - \rho_y \psi_x) = 0 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & (R \psi_{yt})_y - \rho_x + \delta \{ \rho \psi_{yt} + R (\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy}) \}_y + \varepsilon R \psi_{xxt} \\ & + \delta^2 \{ R (\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy}) \}_y + \varepsilon \delta \{ \rho \psi_{xt} + R (\psi_y \psi_{xx} - \psi_x \psi_{xy}) \}_x \\ & + \varepsilon \delta^2 \{ \rho (\psi_y \psi_{xx} - \psi_x \psi_{xy}) \}_x = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

を与える。境界条件は壁で $\psi = 0$ となるから

$$y = 0, 1 \text{ で } \psi_x = 0 \quad (38)$$

となる。

(36), (37) で $\varepsilon, \delta \in 0$ とおいた ψ, ρ に対する線型方程式は

$$\psi = A(x, t) \phi(y), \quad \rho = A(x, t) \varphi(y) \quad (39)$$

の形の解を持ち

$$\frac{A_t}{A_x} = \frac{R_y \phi}{\varphi} = \frac{\varphi}{(R \phi)_y} (= -C) \quad (40)$$

を与える。x, t の関係と y の関係が等しいためにはそれが一定値 -C に等しいことが要求される。その値 C は

$$A_t = -C A_x \quad (41)$$

が示すように x 方向に進む線型波の速度を与えるが (40) から

φ を消去して得られる

$$L[\phi] = (R\phi)' - \frac{1}{C^2} R\phi = 0 \quad (42)$$

の境界条件 ((39), (40) による)

$$\phi(0) = \phi(1) = 0 \quad (43)$$

に対する固有値 C_n (対応する固有関数を $\phi_n(y)$ としよう) に等しい。密度分布が安定のときは C_n は実数なので以下これを假

定する。 C_n に相当する(簡単のため C とする)有限振中の分散波を求めるために(39)を拡張して ψ, ρ を

$$\psi = A\phi(y) + \delta A^2\phi^{(1)}(y) + \epsilon A_{xx}\phi^{(2)}(y) + \dots \quad (44)$$

$$\rho = A\varphi(y) + \delta A^2\varphi^{(1)}(y) + \epsilon A_{xx}\varphi^{(2)}(y) + \dots \quad (45)$$

の形に假定すれば A を

$$At = -CA_x + 2\delta\kappa AA_x + \epsilon\delta A_{xxx} + \dots \quad (46)$$

の形に選べばよいことがわかる。(定数 κ, δ は以下で定まる)

$\delta = \epsilon$ としても一般性を失わないので (δ を適当にえらぶ)

(44)-(46)を(36)-(38)に代入 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ を消去すれば

$$L[\phi^{(1)}] = 2\kappa\frac{R}{C^3}\phi + \frac{1}{2C}(R'\phi\phi') + \frac{1}{2C}[R(\phi'^2 - \phi\phi'')] - \frac{1}{2C\delta}R''\phi^2$$

$$L[\phi^{(2)}] = -R\phi + \frac{2\delta}{C^3}R'\phi$$

$$\phi^{(1)}(0) = \phi^{(1)}(1) = 0, \quad \phi^{(2)}(0) = \phi^{(2)}(1) = 0 \quad (47)$$

を得る。右辺が secular term を持たぬようにするためには ϕ と直交しなくてはならない。これから κ と δ が一義的に決定し

、 $C = C_n$ に対して

$$\kappa_n = -\frac{3}{4} \frac{\langle R\phi_n'^3 \rangle}{\langle R\phi_n'^2 \rangle}, \quad \delta_n = -\frac{C_n}{2} \frac{\langle R\phi_n^2 \rangle}{\langle R\phi_n'^2 \rangle} \quad (48)$$

となる。ただし、 $\langle \rangle$ は $y=0$ と 1 の間の積分をあらわす。

変数変換

$$\xi = x - C_n t, \quad \tau = \epsilon t \quad (49)$$

を行なうと(46)は K.d.V 方程式

$$A_\tau = 2\kappa_n A A_\xi + \delta_n A_{\xi\xi\xi}$$

に他ならない。たゞこのときは近似的に $\phi_n(y)$ で支配される
 y 分布を持つ色々の *mode* の波が可能であることは採筆すべ
 きであらう。

References

- 1) D.J. Benney: J. Math. & Phys. 45 (1966) 52.
- 2) T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. 28 (1967) 65.
- 3) S. Leibovich: Phys of Fluids 12 (1969) 1124.
- 4) R.R. Long: Tellus 8 (1956) 460.
- 5) R.R. Long: J. of the Atmospheric Sciences 21 (1964) 197.
- 6) T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. 1, 97 (1962) 12.
- 7) T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. 26 (1966) 241.
- 8) J. Scott Russell: "Report on Waves", British Association Report, (1844)
- 9) J. Boussinesq: Comptes Rendus 79 (1871)
- 10) Lord Rayleigh: Phil. Mag. 5, 1. (1876) 257.
- 11) D.J. Korteweg and G. De Vries: Phil. Mag. 5, 39 (1895) 422.
- 12) F. Ursell: Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 (1953) 684.
- 13) T.B. Benjamin & M.J. Lighthill: Proc. Roy. Soc. 224 (1954) 448.
- 14) D.J. Benney & J.C. Luke: J. Math. & Phys. 43 (1964) 4, 309
- 15) R. Takaki: J. Phys. Soc. Japan 27 (1969) 1648.
- 16) L.V. Wijngaarden: J. Fluid Mech. 33 (1968) 465.

- 17) T.Taniuti & C.C. Wei: J. Phys. Soc. Japan 24 (1968) 941.
- 18) T.Kakutani, H. Ono, T.Taniuti & C.C. Wei: J. Phys. Soc. Japan 24 (1968) 1159.
- 19) C.H. Su & C.S. Gardner: J. Math. Phys. 10 (1969) 536.
- 20) J.D. Cole: Perturbation Methods in Applied Mathematics (Blaisdell, Waltham, 1968) 248.