

β -expansion に関連した Fine 距離と Walsh 関数系

赤間 陽二* 竹内 大輔

東北大学大学院理学研究科数学専攻

〒 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉

(TEL)022(217)7708 (FAX)022(217)7713

平成 14 年 4 月 29 日

概要

β 進法の冗長度を β -expansion のエントロピーを用いて定義し, 符号つき 2 進表現と Gray code のそれを計算した. また, 実数表現の冗長度と実数演算の Type-2 Turing 機械による計算可能性との関係を認識した. Walsh 解析における Fine 距離と Walsh 完備直交関数系は 2-expansion に沿った定義だが, それを一般の β -expansion に沿った定義に拡張した.

1 序論

実数の表現法として 10 進法, 2 進法などが用いられるが, 基数 β を一般化することの重要性として, 次の 2 点を考える.

1. β 進法 ($1 < \beta \notin \mathbb{N}$) は, 実数の表現法として, n 進法 ($1 < n \in \mathbb{N}$) より, 実数計算のある自然な理論では優れている.

その実数計算の理論は, Weihrauch が Type-2 Turing 機械という計算モデルを用いて定式化したものであり, その計算モデルは数値解析・実際のプログラミング言語の基準からは自然なものである.

Type-2 Turing 機械では, 実数は記号の無限列として入出力されるのだが, その出力無限列の有限部分は入力無限列の有限部分にしか依存しない¹. この性質のため, 10 進法で実数を表現すると実数の 3 倍が計算できない.

しかし β 進法を用いると, 実数 x の表現が複数あることになる

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\beta^{-i} \text{ with } f(i) \in \mathbb{Z} \cap [0, \beta) \quad (1)$$

*akama@math.tohoku.ac.jp

¹これは, 丁度, 入力ストリームからの情報を処理して出力ストリームに書き出す C 言語のプログラムに対応する.

そのような冗長性などにより, β 進法では実数の加減乗除が Type-2 Turing 機械により計算可能になるのである.

2. 実数の β -expansion [8] は, 解析数論・エルゴード理論の初等的例を与えるため重要である.

実数 x の β -expansion は, 式 (1) に条件

$$|x - \sum_{i=0}^N f(i)\beta^{-i}| < \beta^{-N} \text{ for all } N \geq 0$$

を要請して得られる文字列 $a_0 a_1 \dots$ である. x に対して一意に決まる.

例えば β として

$$l(\beta^{-1} + \beta^{-2} + \beta^{-3} + \dots + \beta^{-t}) = 1 \quad l \leq \beta \leq l+1$$

を満たす唯一の正根 $\lambda_l^{(t)}$ を考える ($l = 1, 2, \dots, t = 1, 2, 3, \dots, \infty$). これらは全て Pisot 数であり, $\lambda_1^{(2)}$ が普通の黄金比であり $\lambda_l^{(1)} = l, \lambda_l^{(\infty)} = l+1$ である. β -expansion では 記号 $0, 1, \dots$ または $l-1$ の後に長さ t の記号 l の連が現れない.

各 β に対して, β -expansion 全体の文字列としての複雑さは, 位相的エントロピー [3] として定式化され, その値は $\log_2 \beta$ である.

β 進法の一つの非冗長化が β -expansion であり, β -expansion のエントロピーから β 進法の冗長度が $1 - \log_2 \beta / \log_2(|\beta|)$ と定義できる (ここで $|\beta|$ は β 以上の最小の整数である). $\lambda_l^{(t)}$ -expansion をノイズのある通信路で伝達した場合ビット誤りを検出できるわけだが, その検出力の目安が冗長度であると思われる²

冗長な表現法と実数演算が計算可能になる表現法に関係があるのかが興味深い. もしそうならば, 冗長度が計算論的にどのような意味をもつのかを考えたい. 本論文では実数の加減乗除が計算可能である符号つき 2 進記法 [10] の符号つき 2 進記法の冗長度をはかる. 付録において, Gray code による実数表現法のエントロピーも計算する.

また, 各 β に対して, β -expansion 間の距離として, Walsh 解析における Fine 距離を一般化する. こうして得られた距離たちは互いに同値でないが, 同様の性質を満たす. Walsh 解析 [9] とは Wavelet 解析の最も基本・単純なものであり, 2-expansion に基づくものであり, Walsh の完備正規直交関数系を伴う. Walsh の完備正規直交関数系を用いると, 離散フーリエ変換により実数演算が高速に計算でき, 一方, 組合せ論的最適化問題の近似率のより厳密な値を導ける [2]. 本論文では, Walsh の完備正規直交関数系を $\beta = 2$ の場合から β が一般の場合に拡張できることを指摘する.

²この誤り検出機構は実用化は無理であろう. 注 2.9 参照のこと

本論文の記法. 正整数全体を $\mathbb{N}$ で表し, $l, m, n, \dots$ は正整数を動き, $i, j, k, \dots$ は非負整数を動くものとする. $d, d', \dots$ は有限のアルファベット上の要素を表す変数とする. 有限のアルファベット上の有限または無限列を $w, v, \dots$ で表し, 有限のアルファベット上の無限列を特に $f, g, \dots$ で表し, $f = f(1)f(2)\dots$ とする. $(\sigma f)(n) = f(n+1)$ とする. 有限列 w に対し, 列 v の接続を wv で表し, w の i 回繰り返し $\overbrace{w \cdots w}^i$ を w^i で表し, 無限繰り返し $ww \cdots$ を w^∞ で表す. 無限列の無限繰り返しは未定義とする. なお, 列 u が列 v に現われるとき $u \in v$ と記す.

定義 1.1 $\beta > 1$ を基数とする実数の表現法とは, β 未満の非負整数たちの無限列全体 $\mathcal{N}$ から $[0, \frac{1}{\beta-1}]$ への関数

$$\rho_\beta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\beta^{-n}.$$

である.

2 非冗長化された実数表現のエントロピー

定理 2.1 ([3]) $\mathcal{N}_\beta := \{f \mid f \text{ は適当な } x \in [0, 1) \text{ の } \beta\text{-expansion}\}$ は G_δ 集合で, ρ_β はその上では単射である.

定義 2.2 $l = 1, 2, \dots, t = 1, 2, 3, \dots, \infty$ に対して以下の方程式の根で $[l, l+1]$ に属する実数 b が一意に存在するが, その逆数を $\lambda_l^{(t)}$ で表す.

$$1 = l(b + b^2 + \cdots + b^t) \quad (2)$$

$\lambda_1^{(2)}$ は普通の黄金比 $(\sqrt{5} + 1)/2 = 1.6 \cdots$ であり, $\lambda_l^{(1)} = l, \lambda_l^{(\infty)} = l + 1$ である.

定義 2.3 $t = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\varphi_l^{(t)}(x) = x^t - l \sum_{i=0}^{t-1} x^i$$

と定義する. このとき, $\varphi_l^{(0)}(x) = 1, \varphi_l^{(t+1)}(x) = x\varphi_l^{(t)}(x) - l$ である.

事実 2.4 t が有限のときは $\lambda_l^{(t)}$ は $\varphi_l^{(t)} = 0$ の唯一の正根である. また, $\lambda_l^{(t)}$ は Pisot 数である. すなわち, $\lambda_l^{(t)}$ の任意の代数的共役数の絶対値は 1 未満である.

$$l = \lambda_l^{(1)} < \lambda_l^{(2)} < \lambda_l^{(3)} < \cdots < \lambda_l^{(\infty)} = l + 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_l^{(t)}.$$

また, 任意の正整数 $e < t$ に対して $\varphi_l^{(e)}(\lambda_l^{(t)}) > 0$.

まず $b = (\lambda_l^{(t)})^{-1}$ に対して

$$\begin{aligned} 1 &= l(b + b^2 + \cdots + b^{t-1}) + (l-1)b^t \\ &\quad + lb^t(b + b^2 + \cdots + b^{t-1}) + (l-1)b^{2t} \\ &\quad + lb^{2t}(b + b^2 + \cdots + b^{t-1}) + \cdots \end{aligned} \quad (3)$$

に注意する. 二つの式 (2,3) に見るように, $\lambda_l^{(t)}$ を基数とし $\{0, 1, \dots, l\}$ をアルファベットとする実数の記数法 $\rho_{\lambda_l^{(t)}}$ は冗長な (すなわち単射でない) 記数法である. そこで, $\rho_{\lambda_l^{(t)}}$ を非冗長化, すなわち, その値域 $\text{range}(\rho_{\lambda_l^{(t)}})$ への全射性を保ったまま定義域を制限して単射にする.

注 2.5 ($\mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}}$ のビットエラー検出機械としてのキュー) $\mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}}$ に属する無限列 f には列 kl^t ($k < l$) が現われない. その無限列をノイズのある serial 回線で伝送した場合, 途中で kl^t を受信したら伝送に誤りがあったと検出できる. そのために必要なのは, 長さ t のキューである.

一般に正整数の有限集合 $C = \{0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$ に対して

$$1 = \psi_C(\lambda^{-1}) := \lambda^{-n_1} + \lambda^{-n_2} + \cdots + \lambda^{-n_k} \quad 1/2 < \lambda_C^{-1} \leq 1 \quad (4)$$

は, 唯一の正根 λ_C^{-1} を持つことが中間値の定理からいえるが, そのような λ_C を基数とする実数の 0,1 表現にはビットエラーパターン

$$0d_1 \dots d_{n_1-1}1d_{n_1+1} \dots d_{n_2-1}1 \dots d_{n_k+1} \dots d_{n_k-1}1 \quad (\text{each } d_i \text{ is } 0 \text{ or } 1)$$

が現われないと仮定しても一般性を失わないから, 受信列にそれが現われたら伝送に誤りがあったことが検出できる. C に特有な他の有限ビットエラーパターンが存在するだろうか?

また, どのような基数 λ_C では, 誤り検査を有界なメモリで行なえるだろうか? すなわち, どのような基数 λ_C では, 適当な t と適当な N が存在して任意の $x \in [0, \frac{1}{\lambda_C-1}]$ に対して $1 \leq \# \rho_C^{-1}(x) \leq t$ であるか? ここで ρ_C は $\rho_{\lambda_C} \upharpoonright \mathcal{N}$ である.

その一つの解として [3] の定理がある

定理 2.6 $\beta > 1$ とする. 次の 3 つは同値である.

1. Subshift $((\mathcal{N}_\beta), \sigma)$ の閉包, σ は p 次のマルコフである. すなわち適当な有限集合 W が存在して

$$\mathcal{N}_\beta = \{f \mid \langle f(n), f(n+1), \dots, f(n+p) \rangle \in W \text{ for any } n\}$$

2. 適当な整数 a_i , $i = 0, \dots, p$, $0 \leq a_i < \beta$ が存在して

$$1 - \beta^{-p-1} = \sum_{j=0}^p a_j \beta^{-j-1}$$

$$1 - \beta^{-p-1} > \sum_{j=0}^p a_{j+k} \beta^{-j-1} \quad (k = 1, \dots, p)$$

ここで $a_{n+p+1} = a_n$ ($n \geq 0$) とした.

3. 1 の β -展開 ω_β は周期が $p+1$ である周期列である. すなわち,

$$\sigma^{p+1} \omega_\beta = \omega_\beta$$

$$\sigma^q \omega_\beta < \omega_\beta \quad (q = 1, \dots, p).$$

一方, $\beta > 2$ ならばどんな C に対しても (4) を満たさないから, β 進法は有
限的な冗長性はない. しかし, ρ_β は全射とは限らない. たとえば, $\rho_3(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$
は Cantor の 3 進集合のような物になる.

非冗長化 $\lambda_l^{(t)}$ 進記法における誤り検査可能性の程度を t に関して解析す
るために, 我々は記数法のエントロピーを定義する. 我々が参考にしたのは,
記号力学系である shift space の位相的エントロピーである.

定義 2.7 記数法のエントロピーを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \# \{w \mid w \text{ の長さは } n \text{ であり適当な } f \in \mathcal{N} \text{ の接頭辞}\}$$

と定義する. ただし, $\mathcal{N}$ はその記数法で許されている列の集合である. 文脈に
より明らかなきは $\mathcal{N}$ と記数法を同一視し, エントロピーを $h(\mathcal{N})$ と書く.

記号の有限集合 Σ に対して shift space $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ のエントロピーは $f \in X$
に現われる一つの記号が持つ情報量 (ビット) と解釈され, 特に $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ のエント
ロピーは $\log_2 \# \Sigma$ であることが知られている.

また,

定理 2.8 ([8, 3]) $h(\mathcal{N}_\beta) = \log_2 \beta$

が知られている.

注 2.9 次のグラフは, $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の場合を, 横軸に $t = 2, 3, 4, \dots$ をと
り, 縦軸に $h(\mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}})$ をとった折線グラフである. 記号の個数 $l+1$ と エラー
ビットパターンの長さ t が増大するに従って誤り検査能力が減っているのだ
が, 全ての l に対して $t \geq 4$ では誤り検査能力がほぼないことがわかる.

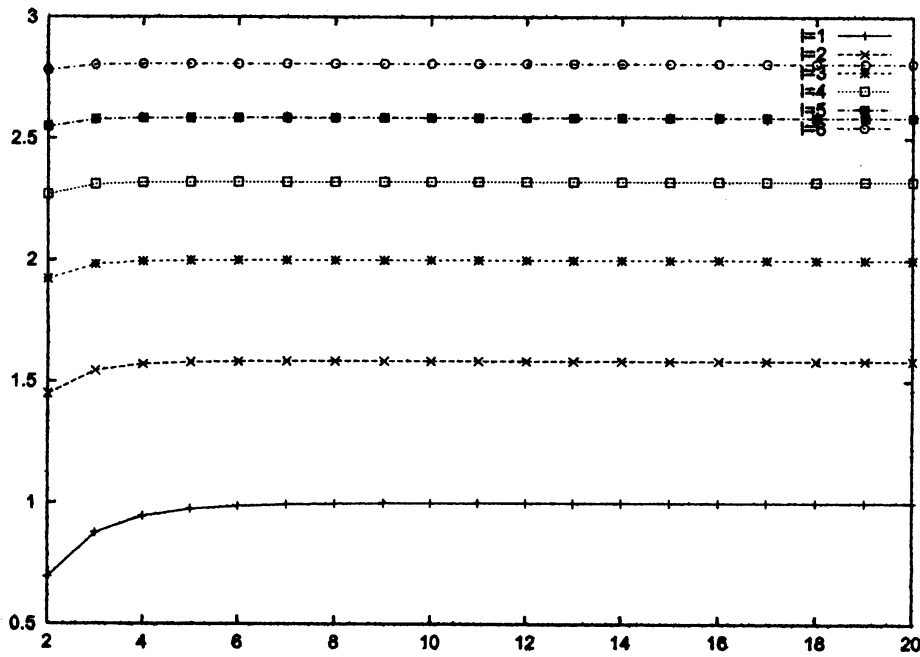


図 1: $\lambda_i^{(t)}$ -expansion のエントロピー $h(\mathcal{N}_{\lambda_i^{(t)}})$. 横軸は t .

2.1 符号付き 2 進表記の冗長度

符号付きの 2 進記法とは

$$\mathcal{N}_{\pm} = \{f \mid f \text{ は } -1, 0, 1 \text{ の無限列}\}$$

に自然に拡張した関数 ρ_2 である. さて, $-1, 0, 1$ の列 w の中の $-1, 1$ をそれぞれ $1, -1$ に置き換えたものを $\bar{w}$ で表す. Section 1 で見たように ρ_2 は冗長である (単射でない). 基数が 2 であるため,

$$\rho_2(\cdots 10^\infty) = \rho_2(\cdots 01^\infty). \quad (5)$$

$$\rho_2(\cdots \bar{1}0^\infty) = \rho_2(\cdots 0\bar{1}^\infty). \quad (6)$$

であるが, 記号として -1 が使えるため,

$$\rho_2(\cdots 10^i \bar{1} \cdots) = \rho_2(\cdots 01^{i+1} \cdots) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

$$\rho_2(\cdots \bar{1}0^i 1 \cdots) = \rho_2(\cdots 0\bar{1}^{i+1} \cdots) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

である. そこで, 上の 4 式 (5, 6, 7, 8) の右辺の形でない $0, 1$ 無限列全体を $\mathcal{N}'_{\pm}$ とする. すなわち,

$$\{f \in \mathcal{N}_{\pm} \mid \text{任意の } i \text{ に対して } f \text{ は } \\ 01^\infty, 0\bar{1}^\infty, 10^i \bar{1}, \bar{1}0^i 1 \text{ のいずれも含まない}\}$$

とする. このの任意の要素 f を先頭文字から $f(1), f(2), \dots$ と走査すると符号が反転しないから, その符号で分類すると

$$\mathcal{N}'_{\pm} = (\mathcal{N}_{\lambda_1^{(\infty)}} \setminus \{0^\infty\}) \uplus \{0^\infty\} \uplus (\overline{\mathcal{N}_{\lambda_1^{(\infty)}} \setminus \{0^\infty\}})$$

と書ける. ただし

$$\overline{\mathcal{N}_1^{(\infty)}} := \{\bar{f} \mid f \in \mathcal{N}_1^{(\infty)}\}$$

定理 2.10 (非冗長化符号付き 2 進記法) $\rho_{\pm} := \rho_2 \upharpoonright \mathcal{N}'_{\pm}$ は $\mathcal{N}'_{\pm}$ から $[-1, 1]$ への全単射である.

したがって, $\mathcal{N}'$ に属する無限列 f をノイズのある serial 回線で伝送した場合, 符号が変わったら伝送に誤りがあったと検査できる. その検査に必要なメモリは 1bit である.

さて, $(\mathcal{N}'_{\pm}, \rho_2 \upharpoonright \mathcal{N}'_{\pm})$ のエントロピーは定義から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \#\{w \mid w \text{ の長さは } n \text{ であり適当な } f \in \mathcal{N}'_{\pm} \text{ の接頭辞}\}$$

であるが, 対数の引数の部分を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & \#\{w \mid w \text{ の長さは } n \text{ であり適当な } f \in \mathcal{N}_{\lambda_1^{(\infty)}} \text{ の接頭辞}\} \\ & + \#\{w \mid w \text{ の長さは } n \text{ であり適当な } f \in \overline{\mathcal{N}_{\lambda_1^{(\infty)}} \setminus \{0^\infty\}} \text{ の接頭辞}\} \\ & = 2^n + (2^n - 1). \end{aligned}$$

定理 2.11 $(\mathcal{N}'_{\pm}, \rho_2 \upharpoonright \mathcal{N}'_{\pm})$ のエントロピー $h(\mathcal{N}'_{\pm})$ は 1 である. したがって, 符号付き 2 進表記の冗長度は $1 - \log_2 2 / \log_2 3$ である.

β -expansion が傾き β の区分的線形関数により生成され, 2 進 Gray code がテント関数により生成されるように, $[0, 1]$ の区分的線形関数で傾きの絶対値が 1 より大きい任意の関数により実数の表現法が得られる. その例として, 付録において, $l+1$ 進 Gray code ($l = 1, 2, \dots$) を導入しそのエントロピーを計算している³.

3 Walsh 解析にむけて

Fine 距離を通じた Fourier-Walsh 解析における計算可能性については, 既に森 [7] らと Brattka [1] とにより考えられているが, そこに現れる Walsh 直交関数系は 2 進法に沿って定義されていた. 我々はそれを拡張し $\lambda_1^{(t)}$ 進法に沿った Walsh 直交関数系を与える.

³有限 1 進数を用いるレジスタ機械で多項式時間計算可能な言語全体は Linear Space であり, このように基数 1 と 2 の間に大きなギャップがある. エントロピーは 2 進数への変換効率を表すことと理解すれば, これは 1 進数のエントロピーが 0 であることに原因があると思われる.

$l = 1, 2, \dots, t = 2, 3, \dots, \infty$ に対して $\rho_{\lambda_l^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}} : \mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}} \rightarrow [0, 1]$ は全単射であったから逆射 $(\rho_{\lambda_l^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}})^{-1}$ が存在する.

$[0, 1]$ 上の距離である Fine 距離の一般化として, $[0, 1]$ 上の距離である, 基数 $\lambda_1^{(t)}$ による Fine 距離 d_t を定義する. 2 点 x, y がともに内点であれば, $d_t(x, y)$ は x, y のそれぞれの $\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}}$ に関する名前の Cantor 距離のようなものである.

定義 3.1 (基数 $\lambda_1^{(t)}$ による Fine 距離) $t = 2, 3, \dots, \infty$ とする

1. 基数 $\lambda_1^{(t)}$ による Fine 距離 $d_t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ とは次のように定義される.

$$\begin{aligned} d_t(x, y) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |(\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(x)(n) - (\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(y)(n)| (\lambda_1^{(t)})^{-n}, \\ &\text{if } x, y \text{ がともに 1 未満.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_t(x, y) &= 2 && \text{if } x, y \text{ のいずれかが 1.} \\ d_t(x, y) &= 0 && \text{o.w. (このとき } x, y \text{ がともに 1).} \end{aligned}$$

普通の Fine 距離は d_∞ となる.

2. Fine 距離 d_t で誘導される $[0, 1]$ 上の位相を 基数 $\lambda_1^{(t)}$ の Fine 位相 $T^{(t)}$ と定義する.

普通の Fine 位相は $T^{(\infty)}$ となる.

3. $f \in \mathcal{N}_1^{(t)}$ が $\lim_n f(n) = 0$ である場合, $q = \rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}}(f) \in \mathbb{Q}^{(t)}$ と書く. 2 進有理数全体は $\mathbb{Q}^{(\infty)}$ となる.

$d_t(x, (\lambda_1^{(t)})^{-1})$ のグラフの直線の傾きの絶対値を 1 とするために d_t の定義において巾の底を $(\lambda_1^{(t)})^{-1}$ とした.

定理 3.2 異なる $s, t = 2, 3, \dots, \infty$ に対して

1. $\mathbb{Q}^{(s)} \cap \mathbb{Q}^{(t)} \neq \emptyset$.
2. d_s, d_t は同値でない.

証明. (1) $\lambda_1^{(t)}$ の最小多項式 $\varphi_1^{(t)}$ の性質からでる. (2) 正数 ϵ を十分小さいとする. 任意の $x \in \mathbb{Q}^{(s)}$ に対して $1/\lambda_1^{(t)} - x < \epsilon$ ならば, $d_t(x, \lambda_1^{(t)}) \approx 2/\lambda_1^{(t)}$ であるが $d_s(x, \lambda_1^{(t)}) \approx 0$ である. 従って, 任意の x, y に対して $d_s(x, y) \leq \alpha d_t(x, y)$ となる正定数 α は存在しない. (証明終り)

定理 3.3 $t = 2, 3, \dots, \infty$ に対して $T^{(t)}$ では 开区間のみならず半开区間 $[q, r)$ も開集合である. ただし, $q \in \mathbb{Q}^{(t)}$.

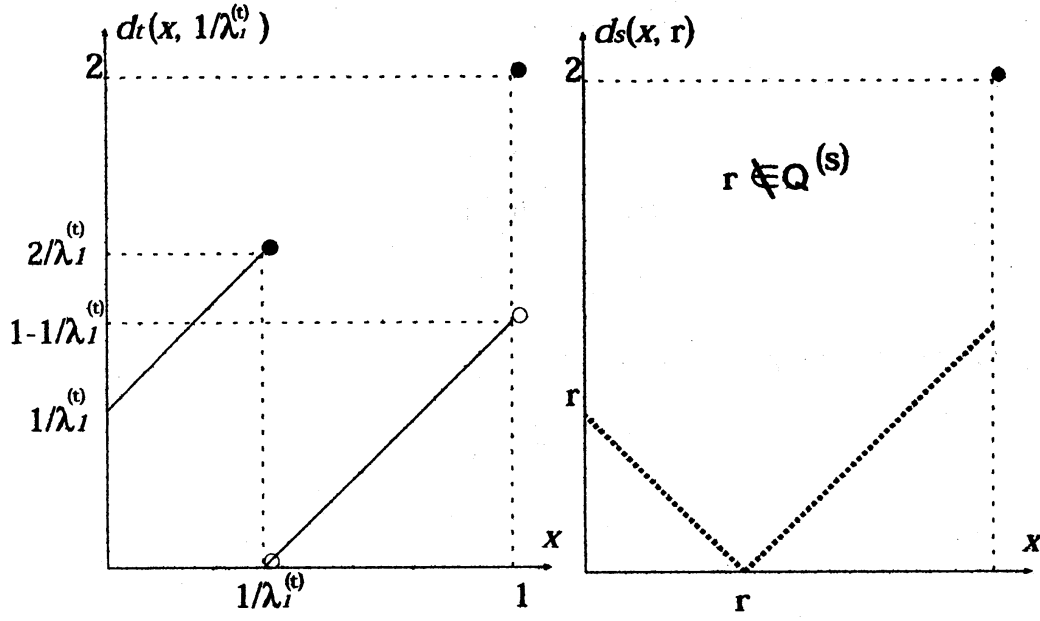


図 2: 右の d_s のグラフでは $x \in Q^{(s)}$ なる点で不連続である

証明. $q \in Q^{(t)}$ より

$$\forall n > n_0. (\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(q)(n) = 0 \quad (9)$$

となる n_0 が存在する. このとき q の開球が半開区間になること

$$\{y \mid d_t(q, y) < (\lambda_1^{(t)})^{-n_0}\} = [q, q + (\lambda_1^{(t)})^{-n_0}) \quad (10)$$

を示す. その開球の要素 y に対して

$$\exists m \leq n_0. (\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(q)(m) \neq (\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(y)(m)$$

とすると $\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}}$ の定義から $d_t(x, y) \geq (\lambda_1^{(t)})^{-m} \geq (\lambda_1^{(t)})^{-n_0}$. 矛盾. 従って, n_0 以下の任意の m に対して

$$(\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(q)(m) = (\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(y)(m).$$

$q \neq y$ の場合は, n_0 より大きな適当な m に対して $(\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(q)(m) \neq (\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(y)(m)$ となり, (9) より $(\rho_{\lambda_1^{(t)}} \upharpoonright \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}})^{-1}(y)(m) = 1$ である. 従って, $y > q$. y の上限は無限列 $\dots \underbrace{1 \dots 1}_{t-1} (01^{t-1})^\infty$ の値だが, それを

実際に実現する $f \in \mathcal{N}_{\lambda_1^{(t)}}$ はない. 従って, y が $q + (\lambda_1^{(t)})^{-n_0}$ 未満である. 故に (10) が言えた.

すると, 半開区間 $[q, r)$ も開集合であることが直ちに言える. (証明終り)

3.1 Walsh 直交関数系の拡張

まず, いくつかの区間を記号で表す.

$$\begin{aligned} U &:= [0, 1]. \\ U_0 &:= [0, \frac{1}{\beta}). \\ U_1 &:= [\frac{1}{\beta}, 1]. \end{aligned}$$

それぞれの長さを対応する小文字で表す.

$$\begin{aligned} u_0 &:= |U_0| := \frac{1}{\beta}. \\ u_1 &:= |U_1| := \frac{\beta - 1}{\beta}. \end{aligned}$$

また

$$M := \text{上2つの相乗平均}$$

とする. 基数が一般の記数法にそった Rademacher 直交関数系 $\{\phi_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ として新たに次のように定義する.

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &:= 1. \\ \phi_1(x) &:= \begin{cases} u_1/M & x \in U_0; \\ -u_0/M & x \in U_1. \end{cases} \\ \phi_{n+1}(x) &:= \begin{cases} \phi_n(x/u_0) & x \in U_0; \\ \phi_n((x - u_0)/u_1) & x \in U_1. \end{cases} \end{aligned}$$

上の関数系は, $\beta = 2$ のときは, 2進数にそった Rademacher 直交関数系に一致する.

上の Rademacher 直交関数系 $\{\phi_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ から基数が一般である記数法にそった Walsh 直交関数系 $\{\psi_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ を従来のとおりにつくる.

非負整数 n に対して, その 2 進表記 $(h_k \dots h_0)$ に関して,

$$\psi_n(x) := \prod_i \phi_i^{h_i}(x)$$

と定義する. 上の関数系は, $\beta = 2$ のときは, 2進数にそった Walsh 直交関数系に一致することに注意する.

定理 3.4 $\{\psi_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ は実際に直交関数系である. すなわち, 任意の非負整数 i, j に対して

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{L^2(U)} = \delta_{ij}.$$

証明. $k_1 > \dots > k_l > 1, n_1, \dots, n_l, m \in \{0, 1, 2\}$ に対して

$$\begin{aligned} I &= \int_U \phi_{k_1}^{n_1}(x) \dots \phi_{k_l}^{n_l}(x) \phi_1^m(x) dx \\ &= \int_{U_0} \phi_{k_1}^{n_1}(x) \dots \phi_{k_l}^{n_l}(x) \phi_1^m(x) dx \\ &\quad + \int_{U_1} \phi_{k_1}^{n_1}(x) \dots \phi_{k_l}^{n_l}(x) \phi_1^m(x) dx \end{aligned}$$

Rademacher 直交関数系 $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ の定義から

$$\begin{aligned} I &= \int_{U_0} \phi_{k_1-1}^{n_1}(x/u_0) \dots \phi_{k_l-1}^{n_l}(x/u_0) (M^{-1}u_1)^m dx \\ &\quad + \int_{U_1} \phi_{k_1-1}^{n_1}\left(\frac{x-u_0}{u_1}\right) \dots \phi_{k_l-1}^{n_l}\left(\frac{x-u_0}{u_1}\right) (-M^{-1}u_0)^m dx \end{aligned}$$

第一の積分を $s = x/u_0$ とおき置換積分し, 第二の積分を $v = \frac{x-u_0}{u_1}$ とおき置換積分すると,

$$\begin{aligned} I &= u_0 (M^{-1}u_1)^m \int_U \phi_{k_1-1}^{n_1}(s) \dots \phi_{k_l-1}^{n_l}(s) ds \\ &\quad + u_1 (-M^{-1}u_0)^m \int_U \phi_{k_1-1}^{n_1}(v) \dots \phi_{k_l-1}^{n_l}(v) dv \\ &= \left(\int_U \phi_{k_1-1}^{n_1}(x) \dots \phi_{k_l-1}^{n_l}(x) dx \right) (u_0 u_1^m + u_1 (-u_0)^m) M^{-m} \end{aligned}$$

である. ここで, $u_0 + u_1 = 1$ より

$$(u_0 u_1^m + u_1 (-u_0)^m) M^{-m} = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 1; \\ 1 & \text{if } m = 0, 2. \end{cases}$$

となるため, 中 $n_1, \dots, n_l, m$ に 1 があれば, $I = 0$ となる. したがって, $\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{L^2(U)} = \delta_{ij}$. (証明おわり)

$\mathbb{R}$ において定義されていた β -expansion は, 高次元にも拡張され ([5, 4]), 特に 2 次元ではタイリングとなる. β -expansion が $\mathbb{R}$ の表現法として計算論的に重要であったように, タイリングが $\mathbb{R}^2$ の表現法として計算論的に重要であるかを調べられればと思う. 論文 [5] は, タイリングの上の Haar-type wavelet (Walsh function と密接な関係がある) を一つの動機としているのだが, そのような流れを踏まえ, 高次元空間での計算論と結びつけばと希望している.

謝辞

新潟大学の秋山 茂樹 先生, 熊本県立大学の貞広 泰造 先生, 京都産業大学の森 隆一 先生には文献を紹介してもらい, 多くを教わった. 九州大学の吉川 敦 先生には, この論文の初期の内容を発表する機会を与えて下さった. これらの先生方のみならず, 内容にたいしてコメントを下された識者に感謝する.

参考文献

- [1] Vasco Brattka. Some notes on fine computability. *Journal of Universal Computer Science*, 8(3):382-395, 2002.
- [2] J. Håstad. Some optimal inapproximability results. *Journal of ACM*, Vol. 48, pp. 798-859, 2001.
- [3] Shunji Ito and Yoichiro Takahashi, Markov subshifts and realization of β -expansions, *J. Math. Soc. Japan* 26 (1974) no. 1, 33-55
- [4] Richard Kenyon and Anatoly Vershik. Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, Vol. 18, No. 2, pp. 357-372, 1998.
- [5] Jeffrey C. Lagarias and Yang Wang. Integral self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. I. Standard and nonstandard digit sets. *J. London Math. Soc. (2)*, Vol. 54, No. 1, pp. 161-179, 1996.
- [6] Douglas Lind and Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [7] Takakazu Mori. On the computability of Walsh functions. *Theoretical Computer Science*(to appear), 2002.
- [8] W. Parry. On the β -expansions of real numbers. *Acta Mathematica, Acad. Sci. Hung.*, 11:401-416, 1960.
- [9] F. Schipp, W. R. Wade, and P. Simon. *Walsh series*. Adam Hilger Ltd., Bristol, 1990. An introduction to dyadic harmonic analysis, With the collaboration of J. Pál.
- [10] K. Weihrauch. *Computable Analysis: An introduction*. Springer, 2000.

付録

A. n 進グレイコードの非冗長化について

実数 x の $l+1$ 進 Gray code 展開 ($l = 1, 2, \dots$) は次の区分的線形関数のグラフで生成される:

$j = 0, 1, \dots, l$ に対し, $\xi_j^{(l)}$ は $[0, 1]$ から $\left[\frac{j}{l+1}, \frac{j+1}{l+1}\right]$ への関数で,

$$x = \xi_j^{(l)}(y) := \frac{2 \left\lceil \frac{j+1}{2} \right\rceil}{l+1} + \frac{(-1)^j y}{l+1}$$

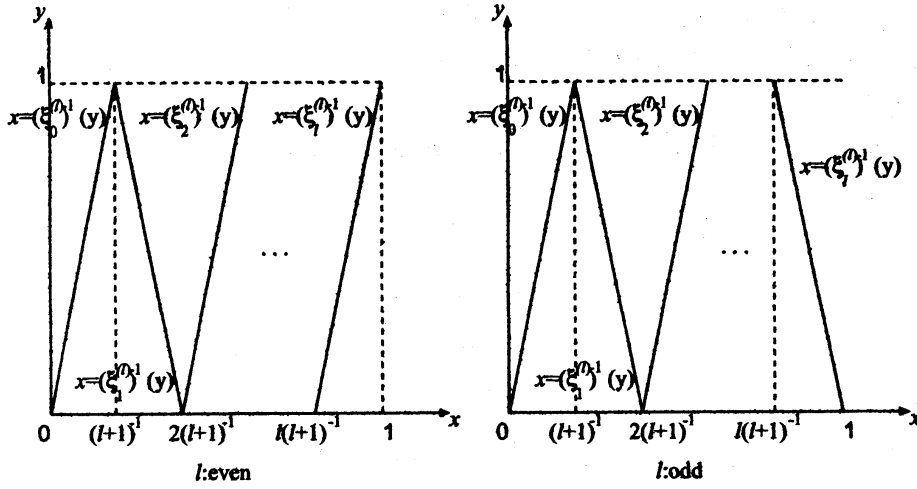


図 3: $l+1$ 進 Gray code を生成するグラフ $\{x = \xi_i^{(l)}(y)\}_{0 \leq i \leq l}$ のグラフ.

である.

全ての

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, l\}$$

に対してその Gray code 展開における値 (意味) $\pi_l(g)$ に関して

$$\pi_l(g) = \xi_{g(1)}^{(l)}(\pi_l(\sigma g)) \quad (11)$$

が成立する. ここで σ はシフト $\sigma(g)(n) = g(n+1)$ である.

従って, v の後に有限列 w の無限繰り返しが続く列 $v(w)^\infty$ に対して

$$\pi_l(v(w)^\infty) = \xi_v^{(l)}(\pi_l(w^\infty)) \quad (12)$$

$$\pi_l(w^\infty) = \xi_w^{(l)}(\pi_l(w^\infty)) \quad (13)$$

と書ける. ここで, $v = v(1)v(2)\dots v(n)$ に対して

$$\xi_v^{(l)} = \xi_{v(1)}^{(l)} \circ \dots \circ \xi_{v(n)}^{(l)}$$

と書いた. 式 (13) から, $\pi_l(w^\infty)$ が, コンパクト集合 $[0, 1]$ 上の縮小写像 $\xi_w^{(l)}$ の不動点として一意に決まる ($\xi_w^{(l)}$ が一次関数だから一意性は明らか). 従って, 周期列 $v(w)^\infty$ の値 $\pi_l(v(w)^\infty)$ は $[0, 1]$ に属する有理数である. 特に 0 の無限列の値は 0 である.

そこで, $\pi_l(g) = \lim_n (\pi_l(g(1)g(2)\dots g(n)0^\infty))$ と定める.

定義 1 $l \geq 1$ に対して, $\pi_l: \{0, 1, \dots, l\}^\infty \rightarrow [0, 1]$ を

$$\pi_l(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{g(1)}^{(l)} \circ \xi_{g(2)}^{(l)} \circ \dots \circ \xi_{g(n)}^{(l)}(0)$$

により定める.

$\pi_l(g)$ は $[0, 1]$ の要素になることをいう. $\xi_{g(1)g(2)\dots g(n)}^{(l)}$ は縮小一次関数であり, $\xi_{g(n+1)}^{(l)}(0), \xi_{g(n+1)}^{(l)}(1)$ は $[0, 1]$ に属するから, それら 2 つを端点とする閉区間は n に関する縮小閉区間列を作る. $\lim_n \xi_{g(1)g(2)\dots g(n)}^{(l)}(0)$ は $[0, 1]$ の要素に収束する.

$\pi_l(g)$ が (11) を満たすことは $\xi_{g(1)}^{(l)}$ の連続性による:

$$\begin{aligned}\xi_{g(1)}^{(l)}(\pi_l(\sigma g)) &= \lim_n \xi_{g(1)g(2)\dots g(n+1)}^{(l)}(0) \\ &= \lim_n \xi_{g(1)g(2)\dots g(n)}^{(l)}(0) \\ &= \pi_l(g).\end{aligned}$$

特に,

$$\begin{aligned}\pi_l(g) = 0 &\Rightarrow g(1) = 0 \\ \pi_l(g) = 1 &\Rightarrow g(1) = l.\end{aligned}$$

定理 2 $k \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned}G_{2k-1} := & \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 2k-1\} \mid \\ & \text{すべての } i \leq k \text{ に対して } (2i-1)(2k-1)0^\infty \notin f \\ & \text{かつすべての } i \leq k-1 \text{ に対して } (2i)0^\infty \notin f\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{2k} := & \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 2k\} \mid \\ & \text{すべての } i \leq k \text{ に対して } (2i-1)(2k)^\infty \notin f \\ & \text{かつすべての } i \leq k \text{ に対して } (2i)0^\infty \notin f\}\end{aligned}$$

と定める. このとき, $l \geq 1$ に対して

$$\varpi_l := \pi_l \upharpoonright G_l$$

は G_l から $[0, 1]$ への全単射である. したがって, G_l のエントロピーは $\log_2(l+1)$ である.

証明. $\varpi(f) = \varpi(g)$ かつ $f \neq g$ と仮定し, $i := \min\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq g(i)\}$ とする. 一般性を失わず $f(i) > g(i)$ としてよいが, $\pi_l(\sigma^{i-1}f) \in \left[\frac{f(i)}{l+1}, \frac{f(i)+1}{l+1}\right]$, $\pi_l(\sigma^{i-1}g) \in \left[\frac{g(i)}{l+1}, \frac{g(i)+1}{l+1}\right]$, $\pi_l(\sigma^{i-1}f) = \pi_l(\sigma^{i-1}g)$ であるから, 特に $f(i) = j+1$, $g(i) = j$, $\pi_l(\sigma^{i-1}f) = \pi_l(\sigma^{i-1}g) = \frac{j+1}{l+1}$ としてよい.

j が奇数のとき. $\pi_l(\sigma^{i-1}f) = \frac{j+1}{l+1} + \frac{\pi_l(\sigma^i f)}{l+1}$, $\pi_l(\sigma^{i-1}g) = \frac{j+1}{l+1} - \frac{\pi_l(\sigma^i g)}{l+1}$ であるから, $\pi_l(\sigma^i f) = \pi_l(\sigma^i g) = 0$ である. したがって, $f(i+1) = g(i+1) = 0$ であり, $\pi_l(\sigma^{i+1}f) = \pi_l(\sigma^{i+1}g) = 0$ である. 以下同様にして, $f = f(1)f(2)\dots f(i-1)(j+1)0^\infty$ であるから, $f \notin G_l$ である.

l が奇数, j が偶数のとき. $\pi_l(\sigma^{i-1}f) = \frac{j+2}{l+1} - \frac{\pi_l(\sigma^i f)}{l+1}$, $\pi_l(\sigma^{i-1}g) = \frac{j}{l+1} + \frac{\pi_l(\sigma^i g)}{l+1}$ であるから, $\pi_l(\sigma^i f) = \pi_l(\sigma^i g) = 1$ である. したがって, $f(i+1) = g(i+1) = l$ であり, $\pi_l(\sigma^{i+1}f) = \pi_l(\sigma^{i+1}g) = 1$ である. 以下同様にして, $f = f(1)f(2)\dots f(i-1)(j+1)l^\infty$, $g = f(1)f(2)\dots f(i-1)jl^\infty$ であるが, $(j+1)l^\infty \in f$ であるから $f \notin G_l$ である.

l, j ともに偶数のとき. $\pi_l(\sigma^{i-1}f) = \frac{j+2}{l+1} - \frac{\pi_l(\sigma^i f)}{l+1}$, $\pi_l(\sigma^{i-1}g) = \frac{j}{l+1} + \frac{\pi_l(\sigma^i g)}{l+1}$ であるから, $\pi_l(\sigma^i f) = \pi_l(\sigma^i g) = 1$ である. したがって, $f(i+1) = g(i+1) = l$ であり, $\pi_l(\sigma^{i+1}f) = \pi_l(\sigma^{i+1}g) = 0$ である. よって, $f(i+1) = g(i+1) = 0$ であり, $\pi_l(\sigma^{i+2}f) = \pi_l(\sigma^{i+2}g) = 0$ である. 以下同様にして, $f = f(1)f(2)\dots f(i-1)(j+1)l0^\infty$, $g = f(1)f(2)\dots f(i-1)jl0^\infty$ であるが, $(j+1)l0^\infty \in f$ であるから $f \notin G_l$ である.(証明おわり)

B. $\lambda_l^{(t)}$ -expansion のエントロピーについての一考察

この部分は論文 [3] の定理から特殊系として出る次の定理を, 論文 [3] の定理を知る前に, 証明したときのものである. $\lambda_l^{(t)}$ -expansion に関連する推移行列として, 単純な行列が現れ, その固有値・固有ベクトルとしてきれいなものが現れたので以下に報告しておく.

定理 3 $t = 2, 3, \dots, \infty$ に対して, 記数法 $\mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}}$ のエントロピーは $\log_2 \lambda_l^{(t)}$ である.

証明の方針をまず説明する. $\mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}}$ のビットエラー検出機械は長さ t のキューであったが, その状態遷移図を表す接続行列 $A^{(l,t)} = (A_{k,m}^{(l,t)})$ を考えると, $\sum_{k,m} ((A^{(l,t)})^n)_{k,m}$ は異なる n 回遷移の個数である. すなわち,

$$\#\{w \mid w \text{ の長さは } n \text{ であり適当な } f \in \mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}} \text{ の接頭辞}\}$$

である. 上式を n に対して漸近的に評価するために, 以下の命題を用いる.

命題 4 ([6]) 実正方行列 A の各成分は非負であり, A は零行列でないとする. A の適当な固有ベクトルの各成分が正ならば, 対応する固有値 λ は正であり, しかも, 任意の正整数 n に対して

$$\left(\sum_k e_k / \max_k(e_k)\right) \lambda^n \leq \sum_{k,m} (A^n)_{k,m} \leq \left(\sum_k e_k / \min_k(e_k)\right) \lambda^n.$$

$\mathcal{N}_{\lambda_l^{(t)}}$ のビットエラー検出機械は長さ t のキューである. 各状態はキューの内容だから, 桁数 t の $(l+1)$ 進数 $i = (a_1 a_2 \dots a_t)_{l+1}$ で表され, 状態数は $(l+1)^t$ である. 状態 $i = (a_1 a_2 \dots a_t)_{l+1}$ が入力 d により 状態 $j = (b_1 b_2 \dots b_t)_{l+1}$ に遷移するのは

$$a_2 = b_1, \text{ かつ } \dots \text{ かつ } a_t = b_{t-1} \quad (14)$$

かつ $b_t = d$ かつ $a_1 b_1 \dots b_t$ は $N_1^{(t)}$ のビットエラーパターンではない, すなわち

$$\text{任意の } d < l \text{ に対して } a_1 b_1 \dots b_t \neq dl^t. \quad (15)$$

さて, 状態遷移図はラベル付き有限グラフであり, ある状態 q において入力記号 s によりある状態 q' への遷移がひきおこされる場合は, q を表す頂点から q' を表す頂点へラベルが s である辺が存在する. しかし, $N_{\lambda_l^{(t)}}$ のビットエラー検出機械の状態を上のように $(l+1)$ 進数で表せば, 遷移後の状態からその遷移をひきおこす入力記号がわかるから, $N_{\lambda_l^{(t)}}$ の状態遷移図は, 0 または 1 を成分とする $(l+1)^t$ 次正方行列 $A^{(l,t)}$ で表される.

定義 5 $2 \leq t < \infty$ に対し, $N_{\lambda_l^{(t)}}$ のビットエラー検出機械の状態遷移図は, 0, または 1 を成分とする $(l+1)^t$ 次正方行列 $A^{(l,t)}$ で表され, その ij 成分 $A_{ij}^{(l,t)}$ は次の通りである.

```

if  $((i-1) \bmod (l+1)^{t-1}) = \lfloor (j-1)/(l+1) \rfloor$  then
/* 式 (14) が成立する */
  if  $\lfloor (i-1)/(l+1)^{t-1} \rfloor < l$  and  $j-1 = (l+1)^t - 1$  then
/* 式 (15) が成立しない */
    0 else 1 fi
else 0 fi

```

ここで, $A^{(2,2)}$ を図示すると次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし空白になっている成分は 0}$$

補題 6 $2 \leq t < \infty$ に対し, ベクトル $e = (e_1, \dots, e_{(l+1)^t})$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} e_k &= (\lambda_l^{(t)} - 1) \varphi_l^{(\max\{t : (l+1)^t | k\})} (\lambda_l^{(t)}) \quad (1 \leq k \leq (l+1)^t - 1) \\ e_{(l+1)^t} &= l. \end{aligned}$$

すると, e は $A^{(l,t)}$ の $\lambda_l^{(t)}$ に属する固有ベクトルである.

証明. $(\lambda I - A^{(l,t)})e = 0$, すなわち, 任意の i に対して $1 \leq i \leq l$ ならば

$$\lambda e_{(i-1)(l+1)^{t-1}+j} = \sum_{k=1}^{l+1} e_{(l+1)(j-1)+k} \quad (1 \leq j \leq (l+1)^{t-1} - 1) \quad (16)$$

$$\lambda e_{i(l+1)^{t-1}} = \sum_{k=1}^l e_{l(l+1)^{t-1}+k} \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{l+1} e_{(l+1)(j-1)+k} = \lambda e_{l(l+1)^{t-1}+j} \quad (1 \leq j \leq (l+1)^{t-1}) \quad (18)$$

を示せばよい.

まず, (16) についてだが, $1 \leq j \leq (l+1)^{t-1} - 1$ なる任意の整数 j に対し, $p := \max\{q : (l+1)^q | j\}$ とおく. このとき, (16) の左辺は

$$\lambda e_{(i-1)(l+1)^{t-1}+j} = \lambda(\lambda - 1)\varphi_l^{(p)}$$

である. (16) の右辺は, $k = l+1$ のとき $(l+1)^{p+1} = (l+1)(j-1)+k = (l+1)j$ だから, 定義 2.2 より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} e_{(l+1)(j-1)+k} &= l(\lambda - 1)\varphi_l^{(0)}(\lambda) + (\lambda - 1)\varphi_l^{(p+1)}(\lambda) \\ &= l(\lambda - 1) + (\lambda - 1)(\lambda\varphi_l^{(p)}(\lambda) - l) \\ &= \lambda(\lambda - 1)\varphi_l^{(p)}(\lambda) \end{aligned}$$

である. したがって (16) は成り立つ.

また, $1 \leq i \leq l$ なる任意の整数 i に対し, (17) の左辺は,

$$\lambda e_{i(l+1)^{t-1}} = \lambda(\lambda - 1)\varphi_l^{(t-1)}(\lambda)$$

であり, (17) の右辺は (16) と同様の論法により

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l e_{l(l+1)^{t-1}+k} &= l(\lambda - 1)\varphi_l^{(0)}(\lambda) \\ &= l(\lambda - 1) \end{aligned}$$

である. ここで, 定義 2.2 より,

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - 1)\varphi_l^{(t-1)}(\lambda) - l(\lambda - 1) &= (\lambda - 1)(\lambda\varphi_l^{(t-1)}(\lambda) - l) \\ &= (\lambda - 1)\varphi_l^{(t)}(\lambda) \end{aligned}$$

である. $\varphi_l^{(t)}(\lambda_l^{(t)}) = 0$ より, (17) は成り立つ.

最後に, (18) を示す. $j = (l+1)^{t-1}$ のとき, $k = l+1$ ならば $(l+1)(j-1)+k = (l+1)((l+1)^{t-1}-1)+(l+1) = (l+1)^t$ だから, (18) の左辺は,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} e_{(l+1)((l+1)^{t-1}-1)+k} &= l(\lambda - 1)\varphi_l^{(0)}(\lambda) + l \\ &= l\lambda \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}\lambda e_{l(l+1)^{t-1}+(l+1)^{t-1}} &= \lambda e_{(l+1)^t} \\ &= l\lambda \\ &= \sum_{k=1}^{l+1} e_{(l+1)((l+1)^{t-1}-1)+k}\end{aligned}$$

である。一方, $1 \leq i \leq l$ なる任意の整数 i と $1 \leq j \leq (l+1)^{t-1} - 1$ なる任意の整数 j に対し, $p := \max\{q : (l+1)^q | j\}$ とおけば, $e_{(i-1)(l+1)^{t-1}+j} = (\lambda-1)\varphi_l^{(p)}(\lambda) = e_{l(l+1)^{t-1}+j}$ であるから, (16) より (18) は成り立つ。(命題 6 の証明おわり)

事実 2.4 とあわせることにより次が導かれる。

補題 7 $A^{(l,t)}$ の $\lambda_l^{(t)}$ に属する固有ベクトルで各成分が正のものがある。

定理 3 が, 上と命題 4 とから直ちに導かれる。

なお, 参考のために, 以下が成立することを指摘する。

補題 8 $l = 1, 2, 3, \dots$, $t = 2, 3, 4, \dots$ に対し, 接続行列 $A^{(l,t)}$ の特性方程式は

$$\det(xI - A^{(l,t)}) = x^{(l+1)^t - t - 1} (x-1) \varphi_l^{(t)}(x) = 0$$

である。