

京都大学数理解析研究所講究録

水の波偏差分方程式の固有値問題

電気通信大学大学院情報工学専攻

松木美保子 (MATSUKI, Mihoko)

電気通信大学情報工学科

牛島照夫 (USHIJIMA, Terno)

0 序

始めに、本報告の概要を述べる。長方形領域内の水の波線形固有値問題をフリードリックス・ケラー型分割による区分一次連続関数で有限要素近似して得られる偏差分方程式の解は、解析的に表示できる。この解析解をもとに、近似固有値の相対誤差を表示し、その性質を調べる。さらに質量行列を集中質量行列と直線的に足し合わせて一般化した場合の結果を述べる。最後に直方体領域への拡張について触れる。

著者の一人は、すでに標題の問題に対する数値計算の結果を牛島-若松 [4] として報告した。そこでは、一定要素ならびに線形要素を使った境界要素法と、フリードリックス・ケラー型分割に対応する区分一次連続要素による有限要素法の計算を比較した。その際、近似固有値の相対誤差の、ある意味での大域的な挙動とその刻みに対する収束性に関して、計算法による顕著な相違があることを見出した。そこで見られた有限要素法における近似固有値の相対誤差の挙動を解明することを目的として本研究は行われている。このような観点から偏微分方程式の数値計算を解析している研究の他の例を我々は知らない。

上記の報告 [4] では、一定要素を用いた境界要素法が、相対誤差の大域的挙動という視点からは、他の二つの計算法に比して優位であるように見受けられた。本研究によれば、有限要素法によっても、質量行列

のとり方を工夫することによって, [4] で行った境界要素計算の場合と十分対抗できることがわかった. さらに分割の縦横比を 0 に近づけていくとき, 相対誤差の絶対値の上限はモードによらずある下限をもつことを数値的に確認した.

1 水の波線形固有値問題

2 次元あるいは 3 次元有界単連結水域 Ω 内の定在波は,

$$(E) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u & \text{on } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \end{cases}$$

をみたす自明でない固有値と固有関数の対 $\{\lambda, u\}$ を求める問題として記述できる. Γ_0 と Γ_1 はそれぞれ静止水面と固体壁である. 線形化重力波理論によると, $\Phi = \sin(\sqrt{g\lambda}t)u$, $\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\cos(\sqrt{g\lambda}t)u$, はそれぞれ流速のポテンシャル関数と水面の変位を表わす (Stoker [1]).

領域 Ω が長方形 $\{(x, y): 0 < x < a, -b < y < 0\}$ の場合, (E) の解はモード数 $m = 0, 1, 2, \dots$ と非零定数 C に対し

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu \tanh(\mu b), & \mu &= \frac{m\pi}{a}, \\ u(x, y) &= C \cosh(\mu(y + b)) \cos(\mu x) \end{aligned}$$

として全て与えられる.

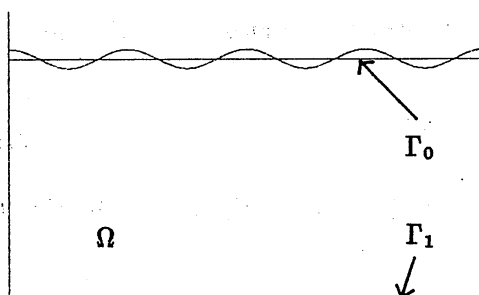


図1 定在波

2 有限要素近似

ソボレフ空間 $H^1(\Omega)$ を V で表わす. 空間 V 上の二次形式 $a(u, v), b(u, v)$ を, それぞれ, 関数 u と v の勾配の内積 $\nabla u \nabla v$ の領域 Ω 上の積分, および関数 u と v の積 uv の静止水面 Γ_0 上の積分とする:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\mathbf{x}, \\ b(u, v) &= \int_{\Gamma_0} uv d\Gamma. \end{aligned}$$

固有値問題 (E) の弱形式表現 (II) を

$$(II) \begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v), \forall v \in V, \\ \{\lambda, u\} \in \Re \times \{V - \{0\}\} \end{cases}$$

と表わす. 空間 V の有限次元部分空間で定数関数を含む空間 V_h を固定する. 問題 (II) のガレルキン近似問題 (II_h) は,

$$(II_h) \begin{cases} a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h), \forall v_h \in V_h, \\ \{\lambda_h, u_h\} \in \Re \times \{V_h - \{0\}\} \end{cases}$$

となる. 空間 V_h の次元を N とし, その基底を固定して $\{\phi_p\}_{p=1, \dots, N}$ とする. 近似問題 (II_h) の解 u_h は

$$u_h = \sum_{p=1}^N U_p \phi_p$$

と表わされる. N 次元ベクトル

$$\vec{U}_h = (U_p)_{p=1, \dots, N}$$

は次の一般固有値問題 (P_h) の固有ベクトルである.

$$(P_h) \begin{cases} A \vec{U}_h = \lambda_h M \vec{U}_h, \\ \{\lambda_h, \vec{U}_h\} \in \Re \times \{\Re^N - \{\vec{0}\}\}. \end{cases}$$

領域 Ω 上の剛性行列 A と静止水面 Γ_0 上の適合質量行列 M は以下のよう
に定められる.

$$\begin{aligned} A &= (A_{p,q})_{p,q=1, \dots, N}, & A_{p,q} &= a(\phi_q, \phi_p), \\ M &= (M_{p,q})_{p,q=1, \dots, N}, & M_{p,q} &= b(\phi_q, \phi_p). \end{aligned}$$

この問題 (P_h) と対応する線形非定常問題の近似問題の収束性と誤差評価については、すでに牛島—松木—青木 [3] で報告した。

3 フリードリックス・ケラー型区分一次近似

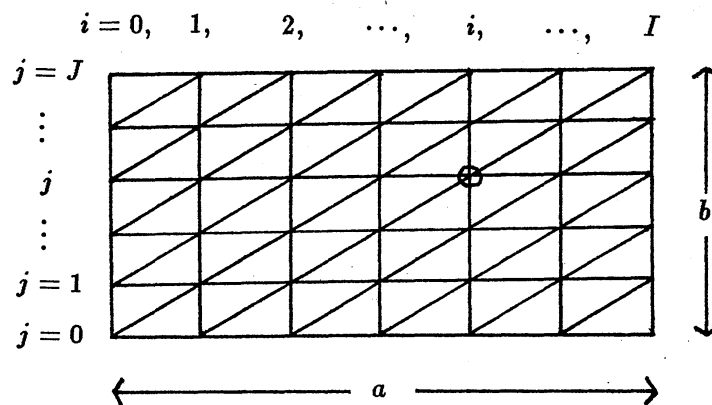
以下では、領域 Ω を長方形とする：

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, -b < y < 0\}.$$

領域 Ω の水平方向、鉛直方向の辺を、それぞれ I 等分、 J 等分して、 Ω を $I \times J$ 個の小長方形に分割し、その小長方形を細分して得られる、いわゆる、フリードリックス・ケラー型三角形分割が定める区分一次連続な有限要素空間を V_h とする (図2)。このときの (P_h) を 二次元適合質量離散問題 (2D-FKCM) と呼ぶことにする。

水平方向の刻み幅 h 、鉛直方向の刻み幅 k 、有限要素の形状アスペクト比 κ を

$$h = \frac{a}{I}, \quad k = \frac{b}{J}, \quad \kappa = \frac{k}{h}$$



○ 印の節点番号を $p = (I+1)j + i + 1$ とする。

図2 長方形領域 Ω のフリードリックス・ケラー型分割

によって定める。節点 (x_i, y_j) を

$$x_i = hi, \quad 0 \leq i \leq I, \quad y_j = kj - b, \quad 0 \leq j \leq J$$

とする。 κ を固定し、 h をパラメタとして動かして考えることにする。
近似問題 (Π_h) の固有関数を

$$u_h = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J U_{i,j} w_{i,j}$$

と表わす。空間 V_h の基底で、 $w_{i,j}(x_p, y_q) = \delta_{ip} \delta_{jq}$ をみたすものを $\{w_{i,j}\}_{i=0,1,\dots,I, j=0,1,\dots,J}$ とする。さらに

$$\begin{aligned} U_{-1,j} &= U_{1,j}, & U_{I+1,j} &= U_{I-1,j}, & 0 \leq j \leq J, \\ U_{i,-1} &= U_{i,1}, & U_{i,J+1} &= U_{i,J-1}, & 0 \leq i \leq I \end{aligned}$$

とおくことにする。

なお、節点 (x_i, y_j) に節点番号 $p = (I+1)j + i + 1$ を対応させ、基底 $\{w_{i,j}\}_{i=0,1,\dots,I, j=0,1,\dots,J}$ を節点番号順に一次的に並べたものを $\{\phi_p\}_{p=1,2,\dots,N}$ とする。すなわち、

$$(1) \quad \begin{cases} \phi_{(I+1)j+i+1} = w_{i,j}, & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \\ N = (I+1)(J+1), \\ U_{(I+1)j+i+1} = U_{i,j}, & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \\ u_h = \sum_{p=1}^N U_p \phi_p = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{i,j} w_{i,j} \end{cases}$$

と対応づけて、一般固有値問題 (P_h) の固有ベクトル $\vec{U}_h$ 、剛性行列 A と適合質量行列 M を定めることにする。

命題 1 [二次元適合質量離散問題 $(2D - FKCM)$ の

偏差分方程式表示]

作用素 Δ_{hk} と M_{hk} を

$$\begin{aligned} \Delta_{hk} U_{i,j} &= \frac{1}{h^2} (U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) \\ &\quad + \frac{1}{k^2} (U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}), \\ M_{hk} U_{i,j} &= \frac{1}{3k} (U_{i-1,j} + 4U_{i,j} + U_{i+1,j}) \end{aligned}$$

によって定めると、離散問題 $(2D - FKCM)$ は、次の偏差分方程式をみたす自明でない固有値と固有関数の対 $\{\lambda_h, u_h\}$ を求める問題として記述できる。

$$(E_h) \begin{cases} -\Delta_{hk} U_{i,j} = \lambda_h M_{hk} U_{i,j}, & 0 \leq i \leq I, \\ -\Delta_{hk} U_{i,j} = 0, & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J. \end{cases}$$

上の偏差分問題 (E_h) の解は変数分離法で求めることができる。

定理 1 [二次元適合質量離散問題 $(2D - FKCM)$ の解析解]

離散問題 $(2D - FKCM)$ の解 $\{\lambda_h, u_h\}$ は、モード数 $m = 0, 1, 2, \dots, I$, 非零定数 C に対し、

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \mu_h \cdot \tanh\left(\frac{b}{\kappa h} \log \nu_h\right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\left(\frac{\mu h}{2}\right)}}{1 - 2 \sin^2\left(\frac{\mu h}{2}\right)}, \\ u_h(x_i, y_j) &= C \cosh(j \log \nu_h) \cos(\mu h i), \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J \end{aligned}$$

と記述できる。ただし次のように定める。

$$\begin{aligned} \mu_h &= \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\mu h}{2}\right), & \mu &= \frac{\pi m}{a}, \\ \nu_h &= 1 + 2\kappa^2 \sin^2\left(\frac{\mu h}{2}\right) + 2\kappa \sin\left(\frac{\mu h}{2}\right) \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\left(\frac{\mu h}{2}\right)}. \end{aligned}$$

したがって、対応する連続問題 (E) の解を $\{\lambda, u\}$ とすると、静止水面 Γ_0 上の節点 $(x_i, 0)$ で、近似固有関数 u_h は真の固有関数 u と定数倍を除いて一致する。つまり非零定数 C' に対し

$$u_h(x_i, 0) = C' u(x_i, 0), \quad 0 \leq i \leq I$$

が成り立つ。

定理 1 で定めた μ_h を

$$\mu_h = \mu \cdot \frac{\sin\left(\frac{\mu h}{2}\right)}{\frac{\mu h}{2}}$$

と書き換えることにより,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu_h = \mu$$

は明かである. 同様に

$$\nu_h - 1 = \kappa \mu h \cdot \frac{\sin(\frac{\mu h}{2})}{\frac{\mu h}{2}} \cdot \left\{ \kappa \sin(\frac{\mu h}{2}) + \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2(\frac{\mu h}{2})} \right\}$$

と書き換えることにより,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \nu_h}{\kappa \mu h} = 1$$

となることがわかるから,

$$\frac{b}{\kappa h} \log \nu_h = \mu b \cdot \frac{\log \nu_h}{\kappa \mu h}$$

であり,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_h = \lambda$$

である. 同様に

$$j \log \nu_h = \mu \cdot ((jk - b) + b) \cdot \frac{\log \nu_h}{\kappa \mu h}$$

と書き換えることによって, $(x, y) \in \Omega$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h(x, y) = u(x, y)$$

が, 定理 1 で述べた C' が 1 であるような u_h に対して, 成立することがわかる. 今少し詳しく検討することにより, 次の定理 2 を得る.

定理 2 [二次元適合質量離散問題 (2D - FKCM) の

固有値と固有関数の収束]

連続問題 (E) の解を $\{\lambda, u\}$ とし, 対応する離散問題 (2D - FKCM) の解を $\{\lambda_h, u_h\}$ とする. 固有関数 u_h は定理 1 で $C' = 1$ をみたすものとし, u とともに,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h &= u_h|_{\Gamma_0} / \|u_h|_{\Gamma_0}\|_{L^2(\Gamma_0)}, \\ \tilde{u} &= u|_{\Gamma_0} / \|u|_{\Gamma_0}\|_{L^2(\Gamma_0)} \end{aligned}$$

と正規化する．定数 $h_0 > 0$ を固定するとき， λ のみに依存する定数 C_1, C_2 が存在して次式のように評価できる．

$$(2) \quad |\lambda_h - \lambda| \leq C_1 h^2, \quad 0 < h < h_0,$$

$$(3) \quad \|\tilde{u}_h - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq C_2 h^2.$$

定理 2 の証明の概略

次式をみたす定数 C'_1, C'_2, C'_3 が存在する．

$$\begin{aligned} & \left| \tanh\left(\frac{b}{\kappa h} \log \nu_h\right) - \tanh(\mu b) \right| \leq C'_1 h^2, \quad 0 < h < h_0, \\ & \left| \frac{\sqrt{1+\kappa^2 \sin^2(\frac{\mu h}{2})}}{1-\frac{2}{3} \sin^2(\frac{\mu h}{2})} - 1 \right| \leq C'_2 h^2, \\ & |\mu_h - \mu| \leq C'_3 h^2. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} |\lambda_h - \lambda| &= \left| \mu_h \cdot \tanh\left(\frac{b}{\kappa h} \log \nu_h\right) \cdot \frac{\sqrt{1+\kappa^2 \sin^2(\frac{\mu h}{2})}}{1-\frac{2}{3} \sin^2(\frac{\mu h}{2})} - \mu \cdot \tanh(\mu b) \right| \\ &\leq \left| \mu_h \cdot \frac{\sqrt{1+\kappa^2 \sin^2(\frac{\mu h}{2})}}{1-\frac{2}{3} \sin^2(\frac{\mu h}{2})} \right| \cdot \left| \tanh\left(\frac{b}{\kappa h} \log \nu_h\right) - \tanh(\mu b) \right| \\ &\quad + \left| \mu_h \cdot \tanh(\mu b) \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{1+\kappa^2 \sin^2(\frac{\mu h}{2})}}{1-\frac{2}{3} \sin^2(\frac{\mu h}{2})} - 1 \right| \\ &\quad + \left| \tanh(\mu b) \right| \cdot |\mu_h - \mu| \\ &\leq (\mu \cdot 3\sqrt{1+\kappa^2} \cdot C'_1 + \mu \cdot 1 \cdot C'_2 + 1 \cdot C'_3) h^2, \quad 0 < h < h_0 \end{aligned}$$

により不等式 (2) を得る．また

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 &= 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3} \sin^2(\frac{\mu h}{2})} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sin^2(\frac{\mu h}{2})}{(\frac{\mu h}{2})^2} - \frac{1}{3} \sin^2\left(\frac{\mu h}{2}\right) \right\} \\ &\leq 2 \cdot 3 \cdot C'_4 \left(\frac{\mu h}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

をみたす定数 C'_4 が存在することから不等式 (3) を得る．

4 固有値の相対誤差とその極限関数

水平方向の刻み I を固定し，モード数 m についての固有値の相対誤差を ρ_h とする．

$$\rho_h(m) = \frac{\lambda_h(m)}{\lambda(m)}, \quad m = 1, \dots, I, \quad h = \frac{a}{I}.$$

これを $\xi = \frac{m}{I} = \frac{mh}{a}$ ($0 \leq \xi \leq 1$) の関数とみて,

$$\tilde{\rho}_h(\xi) = \rho_h\left(\frac{a\xi}{h}\right)$$

と正規化する. 定理 1 で得た解析解より次の表示を得る.

定理 3 [二次元適合質量離散問題 ($2D - FKCM$) の

固有値の相対誤差の表示]

離散問題 ($2D - FKCM$) の固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_h(\xi)$ は次のように表現できる.

$$\tilde{\rho}_h(\xi) = \tilde{\rho}(\xi) \cdot \frac{\tanh\left(\frac{b}{h}\sigma(\xi)\right)}{\tanh\left(\frac{b}{h}\pi\xi\right)}.$$

ただし

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\xi) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{\frac{\pi\xi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\kappa^2 \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}}{1-\frac{2}{3} \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}, \\ \tilde{\nu}(\xi) &= 1 + 2\kappa^2 \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + 2\kappa \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}, \\ \sigma(\xi) &= \frac{\log \tilde{\nu}(\xi)}{\kappa}\end{aligned}$$

とする.

ここで

$$\frac{\log(1+\kappa)}{\kappa\pi} \cdot \pi\xi \leq \sigma(\xi) \leq \pi\xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

のよう評価できることに注意する.

定理 4 [二次元適合質量離散問題 ($2D - FKCM$) の

固有値の相対誤差の収束]

離散問題 ($2D - FKCM$) の固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_h(\xi)$ は, $h \rightarrow 0$ のとき, $0 \leq \xi \leq 1$ につき一様に $\tilde{\rho}(\xi)$ へ収束する.

また $\xi \in (0, 1]$ を固定するとき,

$$|\tilde{\rho}_h(\xi) - \tilde{\rho}(\xi)| \leq \tilde{\rho}(\xi) \cdot 2 \cdot \exp\left(-\frac{2b}{h}\sigma(\xi)\right), \quad \sigma(\xi) = \frac{\log \tilde{\nu}(\xi)}{\kappa},$$

$\xi = 0$ のとき, $\tilde{\rho}_h(\xi) = \tilde{\rho}(\xi) = 1$ が成り立つ.

定理 4 の証明の概略

各 $\xi \in [0, 1]$ に対し, $h \rightarrow 0$ のとき

$$f_h(\xi) = \frac{\tanh\left(\frac{b}{h}\sigma(\xi)\right)}{\tanh\left(\frac{b}{h}\pi\xi\right)}$$

とおくと, f_h は単調に 1 へ増加するので, ディニの定理より一様収束性を得る. また

$$\begin{aligned} |f_h(\xi) - 1| &= 2 \frac{\exp\left(\frac{2b}{h}\pi\xi\right) - \exp\left(\frac{2b}{h}\sigma(\xi)\right)}{\{\exp\left(\frac{2b}{h}\sigma(\xi)\right) + 1\} \{\exp\left(\frac{2b}{h}\pi\xi\right) + 1\}} \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{2b}{h}\sigma(\xi)\right) \end{aligned}$$

より各 $\xi \in (0, 1]$ での収束の速さを評価できる.

5 質量行列の一般化

3 節で述べた二重添数 (i, j) と一重添数

$p = (I+1)j + i + 1$, $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$ をここでも使用する. 集中質量行列 $\bar{M}$ の要素 $\bar{M}_{p,q}$ を次のように定める.

$$\bar{M}_{p,q} = \begin{cases} h & : p = q = (I+1)J + i + 1, \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ \frac{h}{2} & : p = q = (I+1)J + i + 1, \quad i = 0, I, \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

すなわち

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ I+1 \\ \downarrow \end{matrix}$

である。適合質量行列 M と集中質量行列 $\bar{M}$ を直線的に足し合わせて一般化質量行列 $\tilde{M}$ を作る。すなわち、実パラメタ θ を用いて、

$$\tilde{M} = \theta M + (1 - \theta)\bar{M}$$

とおく。一般固有値問題 (P_h) に対応して、次の一般固有値問題 $(\tilde{P}_h)$ を定める。

$$(\tilde{P}_h) \begin{cases} A\vec{U}_h = \lambda_h \tilde{M}\vec{U}_h, \\ \{\lambda_h, \vec{U}_h\} \in \Re \times \{\Re^N - \{0\}\}. \end{cases}$$

この問題を二次元一般化質量離散問題 $(2D - FKGM)$ と呼ぶ。特に $\theta = 0$ のとき二次元集中質量離散問題 $(2D - FKL M)$ と呼ぶ。

この離散問題 $(2D - FKGM)$ に対して、 $\theta < \frac{3}{2}$ ならば、適合質量離散問題のときに対応した結果が得られる。以下それを示す。

命題 2 [二次元一般化質量離散問題 $(2D - FKGM)$ の

偏差分方程式表示]

作用素 $\tilde{M}_{hk}$ を

$$\tilde{M}_{hk} U_{i,j} = \frac{1}{3k} (\theta U_{i-1,j} + 2(3 - \theta) U_{i,j} + \theta U_{i+1,j})$$

と定める。離散問題 $(2D - FKGM)$ は、次の偏差分方程式をみたす自明でない固有値と固有関数の対 $\{\lambda_h, u_h\}$ を求める問題として記述できる。

$$(\tilde{E}_h) \begin{cases} -\Delta_{hk} U_{i,j} = \lambda_h \tilde{M}_{hk} U_{i,j}, & 0 \leq i \leq I, \\ -\Delta_{hk} U_{i,j} = 0, & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J. \end{cases}$$

定理 5 [二次元一般化質量離散問題 $(2D - FKGM)$ の解析解]

離散問題 $(2D - FKGM)$ において、実パラメタ θ の範囲を $\theta < \frac{3}{2}$ とする。このとき解 $\{\lambda_h, u_h\}$ はモード数 $m = 1, 2, \dots, I$, 非零定数 C に対し、

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \mu_h \cdot \tanh\left(\frac{b}{\kappa h} \log \nu_h\right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2(\frac{\mu h}{2})}}{1 - \frac{2}{3}\theta \sin^2(\frac{\mu h}{2})}, \\ u_h(x_i, y_j) &= C \cosh(j \log \nu_h) \cos(\mu h i), \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J \end{aligned}$$

と記述できる。ここで

$$\begin{aligned} \mu_h &= \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\mu h}{2}\right), & \mu &= \frac{\pi m}{a}, \\ \nu_h &= 1 + 2\kappa^2 \sin^2\left(\frac{\mu h}{2}\right) + 2\kappa \sin\left(\frac{\mu h}{2}\right) \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\left(\frac{\mu h}{2}\right)} \end{aligned}$$

とする。したがって、対応する連続問題 (E) の解を $\{\lambda, u\}$ とすると、静水面 Γ_0 上の節点 $(x_i, 0)$ で、近似固有関数 u_h は真の固有関数 u と定数倍を除いて一致する。つまり非零定数 C' に対し

$$u_h(x_i, 0) = C' u(x_i, 0), \quad 0 \leq i \leq I$$

が成り立つ。

定理 6 [二次元一般化質量離散問題 $(2D - FKGM)$ の

固有値と固有関数の収束]

連続問題 (E) の解を $\{\lambda, u\}$ とし、対応する離散問題 $(2D - FKGM)$ の解を $\{\lambda_h, u_h\}$ とする。固有関数 u_h は定理 5 で $C' = 1$ をみたすものとし、 u とともに、

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h &= u_h|_{\Gamma_0} / \|u_h|_{\Gamma_0}\|_{L^2(\Gamma_0)}, \\ \tilde{u} &= u|_{\Gamma_0} / \|u|_{\Gamma_0}\|_{L^2(\Gamma_0)} \end{aligned}$$

と正規化する．定数 $h_0 > 0$ を固定するとき， θ と λ のみに依存する定数 C_1, C_2 が存在して次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned} |\lambda_h - \lambda| &\leq C_1 h^2, \quad 0 < h < h_0, \\ \|\tilde{u}_h - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma_0)} &\leq C_2 h^2. \end{aligned}$$

ただし，離散問題 $(2D - FKGM)$ の実パラメタ θ の範囲は $\theta < \frac{3}{2}$ とする．

定理 7 [二次元一般化質量離散問題 $(2D - FKGM)$ の

固有値の相対誤差の表示]

離散問題 $(2D - FKGM)$ の固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_h(\xi)$ は，実パラメタ θ の範囲を $\theta < \frac{3}{2}$ とするとき，次のように表現できる．

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_h(\xi) &= \tilde{\rho}(\xi) \cdot \frac{\tanh(\frac{1}{h}\sigma(\xi))}{\tanh(\frac{1}{h}\pi\xi)}, \\ \tilde{\rho}(\xi) &= \frac{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}{\frac{\pi\xi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\kappa^2 \sin^2(\frac{\pi\xi}{2})}}{1-\frac{2}{3}\theta \sin^2(\frac{\pi\xi}{2})}, \\ \tilde{\nu}(\xi) &= 1 + 2\kappa^2 \sin^2(\frac{\pi\xi}{2}) + 2\kappa \sin(\frac{\pi\xi}{2}) \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2(\frac{\pi\xi}{2})}, \\ \sigma(\xi) &= \frac{\log \tilde{\nu}(\xi)}{\kappa}. \end{aligned}$$

定理 8 [二次元一般化質量離散問題 $(2D - FKGM)$ の

固有値の相対誤差の収束]

離散問題 $(2D - FKGM)$ において，実パラメタを $\theta < \frac{3}{2}$ とするとき，固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_h(\xi)$ は， $h \rightarrow 0$ のとき， $0 \leq \xi \leq 1$ につき一様に $\tilde{\rho}(\xi)$ へ収束する．

また $\xi \in (0, 1]$ を固定するとき，

$$|\tilde{\rho}_h(\xi) - \tilde{\rho}(\xi)| \leq \tilde{\rho}(\xi) \cdot 2 \cdot \exp(-\frac{2b}{h}\sigma(\xi)), \quad \sigma(\xi) = \frac{\log \tilde{\nu}(\xi)}{\kappa},$$

$\xi = 0$ のとき， $\tilde{\rho}_h(\xi) = \tilde{\rho}(\xi) = 1$ が成り立つ．

6 収束状況の視覚的確認

水平方向の長さ $a = 1.0[m]$ ，鉛直方向の長さ $b = 0.1[m]$ の場合の，

- 1) 近似固有値の収束状況 (図3, 図4),
- 2) 相対誤差の大域的収束状況 (図5, 図6),
- 3) 相対誤差の極限関数の挙動のパラメタ依存性

(図7, 図8, 図9, 図10)

について数値計算結果を基にして作図したものを示す。1) と 2) に関しては適合質量問題 ($\theta = 1$) と集中質量問題 ($\theta = 0$) とを対比させる。

図3と図4とにアスペクト比 $\kappa = 1$ のときの近似固有値 λ_h の h 依存性を示した。それぞれ適合質量 ($\theta = 1$) と集中質量 ($\theta = 0$) の場合に対応する。モード数は $m = 1, 2, \dots, 10$ とした。モード数 m の近似固有値 λ_h は $0 < h \leq \frac{a}{m}$ で定義され、 $h = \frac{a}{m+i}, i = 0, 1, 2, \dots$ のところでだけ存在し得るものである。図は、定理5で表示される λ_h を、 $\mu = \frac{\pi m}{a}$ と固定して、連続変数 h を $[0, \frac{a}{m}]$ の範囲で動かして作図したものである。計算値の存在する $h = \frac{a}{m}, \frac{a}{m+1}, \frac{a}{m+2}, \dots, \frac{a}{30}$ の値に○印をつけてある。両図とも $h = 0$ の近くでは $\lambda_h = \lambda + O(h^2)$ の挙動が見られる。図3によれば、モード数を固定したとき、始めて計算可能になる h の近くでは、 h の減少にもかかわらず、 λ_h の増加が見られる。適合近似であるのでやや意外である。集中質量近似の場合は、 λ_h が真の値 λ に下から近づくことがあることを図4は示している。

図5と図6にアスペクト比 $\kappa = 1$ のときの固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_h(\xi)$ がその極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ へ収束する状況を作図した。それぞれ適合質量 ($\theta = 1$) と集中質量 ($\theta = 0$) の場合に対応する。グラフ上の○印は、実際に計算できる点 $\xi = \frac{m}{I}, m = 1, 2, \dots, I$ での値であることを意味している。この図の解像力の範囲では、 $h = \frac{1}{20}$ のときの $\tilde{\rho}_h$ と $\tilde{\rho}$ とを区別して識別することは不可能である。さらに $\tilde{\rho}_h$ が $\tilde{\rho}$ に下から単調に収束することが確認できる。

図7と図8に、相対誤差の極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ の有限要素のアスペクト比

$\kappa = \frac{h}{h}$ に関する依存性を示す。それぞれ適合質量 ($\theta = 1$)、集中質量 ($\theta = 0$) の場合である。いずれの場合も κ を減らすと、単調に減少する。適合質量の場合、 κ を 0 に近づけるほど、すなわち、鉛直方向の刻みを水平方向の刻みに比べて細かくすればする程、相対誤差は減少するが、高モードでは +100% 以下にすることはできないことが読みとれる。集中質量の場合は、 κ を 0 に近づけると、高モードではかえって相対誤差の 1 との差の絶対値 $|\tilde{\rho}(\xi) - 1|$ は増加する傾向がある。 κ に関しては、 $\kappa = 1$ のあたりが相対誤差の大域的大きさを示す量、例えば $\max_{0 \leq \xi \leq 1} |\tilde{\rho}(\xi) - 1|$ を最小にしているように観察できる（後掲の図 10 を参照のこと）。ちなみに、 $\kappa = 1$ のとき、 $-\Delta_{hh}$ は等間隔五点差分公式になっている。なお、牛島—若松 [4] における $\kappa = 1$ に対応する境界要素計算では、一定要素を使用した場合、

$$\max_{0 \leq \xi \leq 1} |\tilde{\rho}(\xi) - 1| \sim 0.1,$$

線形要素を使用した場合、

$$\max_{0 \leq \xi \leq 1} |\tilde{\rho}(\xi) - 1| \sim 0.3$$

であることを数値的に確認している。

図 9 にアスペクト比 κ を 1 に固定したときの固有値の相対誤差の極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ の θ 依存性を示す。 θ のとり方を工夫することによって、固有値の相対誤差を大域的におさえこんだり、低モードに着目して相対誤差を小さくするようにできることが示唆される。

図 10 には、固有値の相対誤差と 1 との差の絶対値の最大値のパラメタ θ と κ への依存性を図示する。すなわち θ と κ を固定したときの相対誤差の極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ に対して、

$$m(\theta; \kappa) = \max_{0 \leq \xi \leq 1} |\tilde{\rho}(\xi) - 1|$$

とおく。アスペクト比 κ をパラメタとして固定して、 $m(\theta; \kappa)$ を θ の関数として表示したものが図 10 である。ここでの $m(\theta; \kappa)$ の値は、 ξ の区間 $[0, 1]$ を 1000 等分して数値的に求めたものを使用している。このグラフ

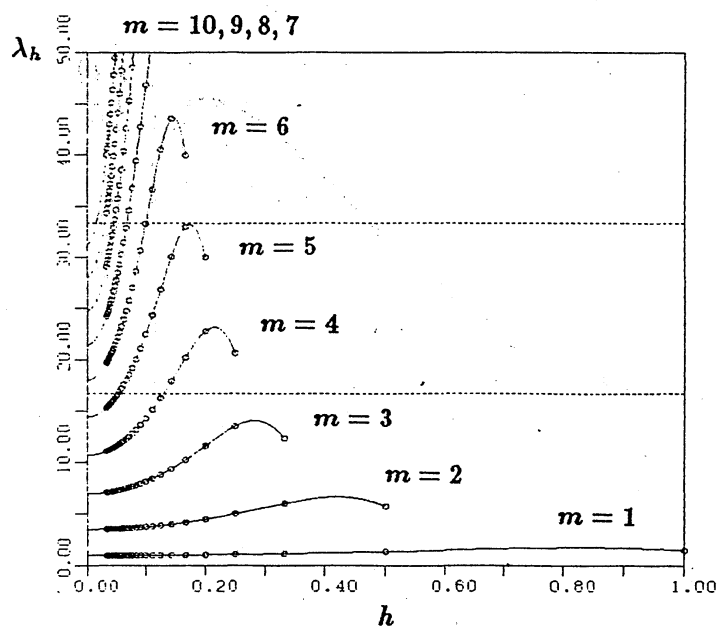


図3 適合質量の場合の近似固有値 λ_h ($\theta = 1, \kappa = 1$)
モード数 $m = 1, 2, 3, \dots, 10$ の場合

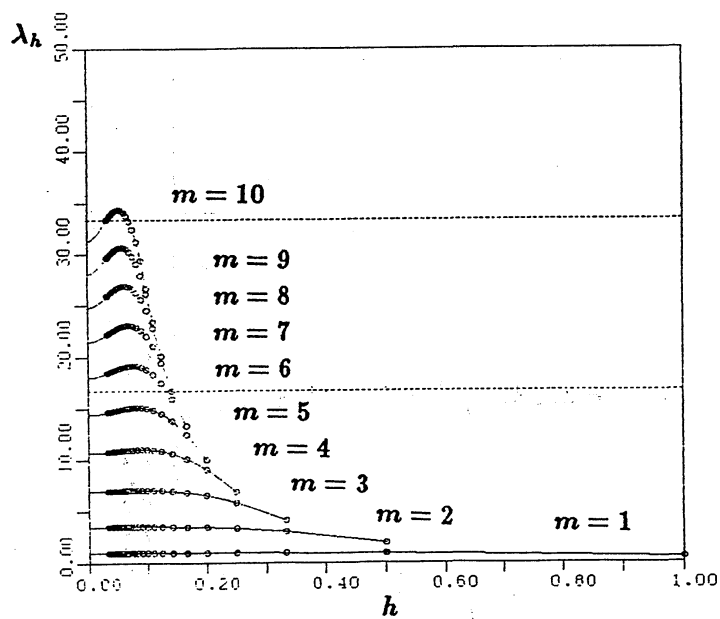


図4 集中質量の場合の近似固有値 λ_h ($\theta = 0, \kappa = 1$)
モード数 $m = 1, 2, 3, \dots, 10$ の場合

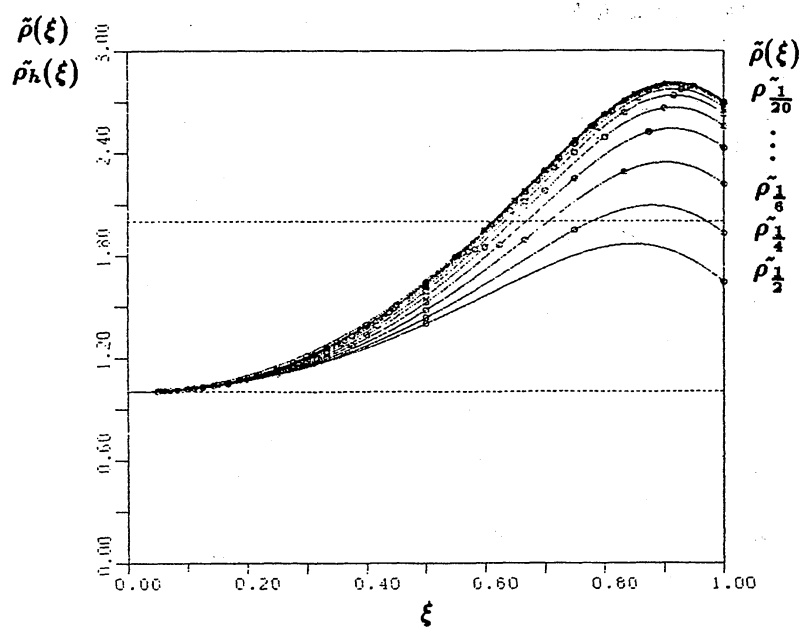


図5 適合質量の場合の固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_h(\xi)$ と
その極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ ($\theta = 1, \kappa = 1$)
 $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{20}$ の場合

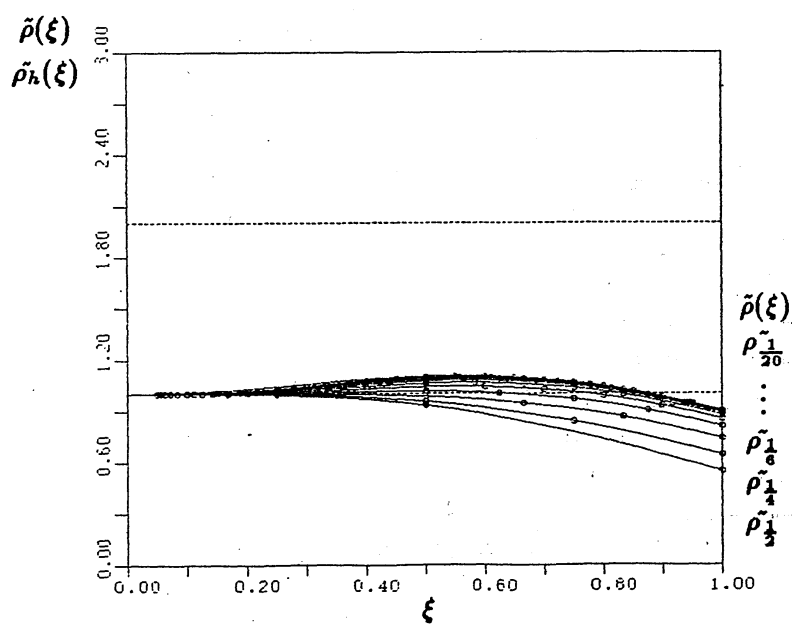


図6 集中質量の場合の固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_h(\xi)$ と
その極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ ($\theta = 0, \kappa = 1$)
 $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{20}$ の場合

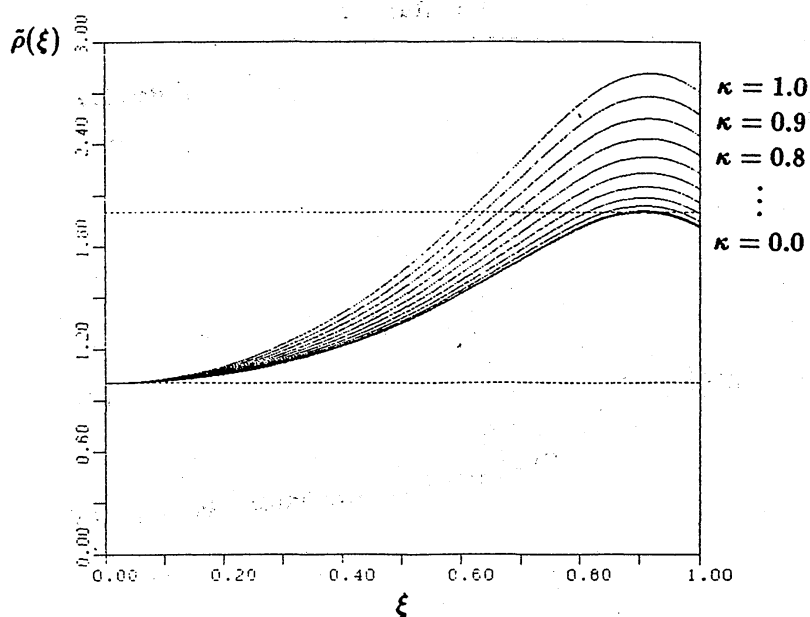


図7 適合質量の場合の固有値の相対誤差の極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ の
有限要素のアスペクト比 $\kappa = \frac{h}{h}$ 依存性 ($\theta = 1$)
 $\kappa = 1.0, 0.9, 0.8, \dots, 0.0$ の場合

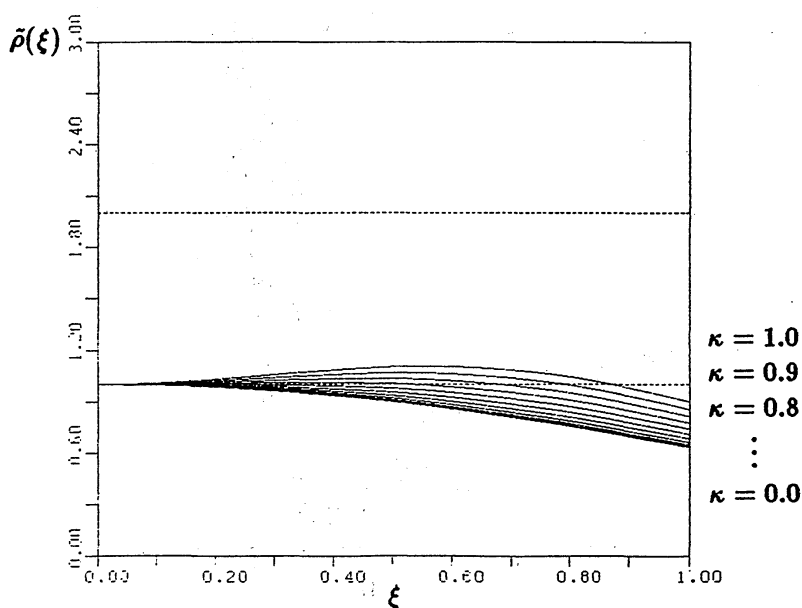


図8 集中質量の場合の固有値の相対誤差の極限関数 $\tilde{\rho}(\xi)$ の
有限要素のアスペクト比 $\kappa = \frac{h}{h}$ 依存性 ($\theta = 0$)
 $\kappa = 1.0, 0.9, 0.8, \dots, 0.0$ の場合

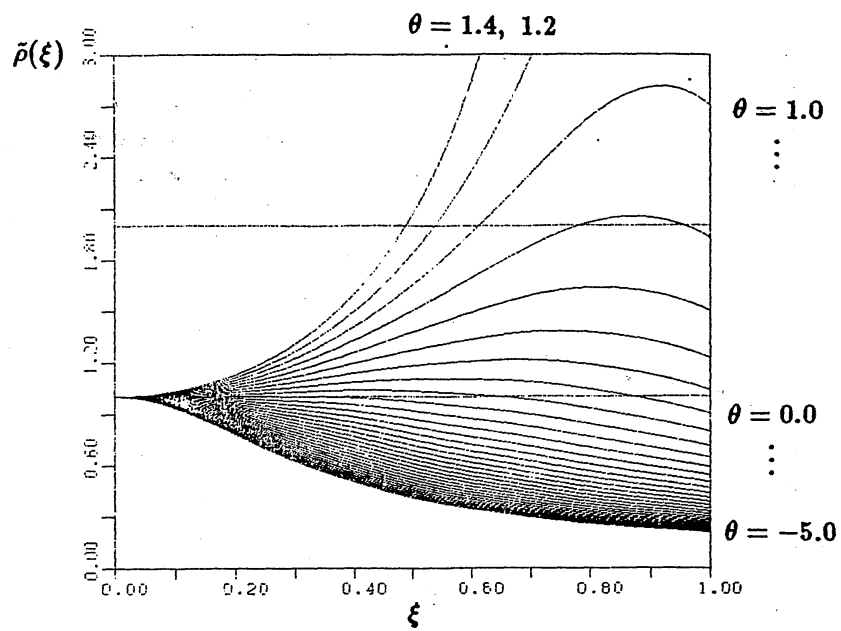


図9 固有値の相対誤差の極限関数 $\bar{\rho}(\xi)$ のパラメータ θ 依存性 ($\kappa = 1$)
 $\theta = 1.4, 1.2, 1.0, \dots, -5.0$ の場合

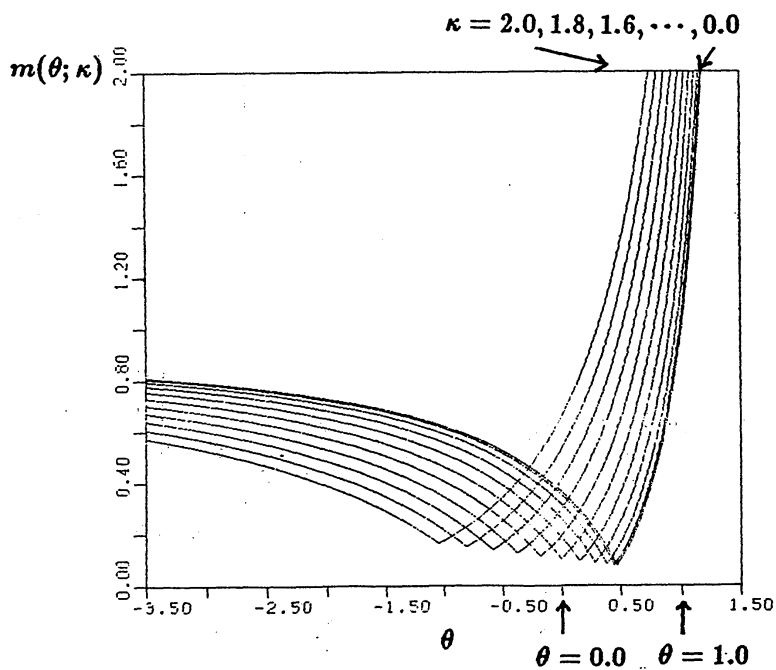


図10 固有値の相対誤差の極限関数 $\bar{\rho}(\xi)$ と 1 との差の
 絶対値の最大値 $m(\theta; \kappa)$ の $\kappa = \frac{h}{h}$ 依存性
 $\kappa = 0.0, 0.2, 0.4, \dots, 2.0$ 場合

を見ると、適合質量 ($\theta = 1$) の場合、 κ を 2.0 から 0.0 まで減少させると、 $m(\theta; \kappa)$ は単調に減少することがわかる。ところが、集中質量 ($\theta = 0$) の場合には、 κ を 2.0 から 1.0 まで減少させると、 $m(\theta; \kappa)$ は減少するが、さらに κ を 1.0 から 0.0 へと減少させると、 $m(\theta; \kappa)$ は増加することが観察できる。

7 直方体領域

領域 Ω が直方体 $\{(x, y, z) : 0 < x < a, 0 < y < b, -c < z < 0\}$ の場合のフリードリックス・ケラー型分割は、次のような四面体分割であると考えるのが適切である (牛島 [2])。すなわち、まずその直方体の三つの稜を、 x, y, z 軸方向に沿ってそれぞれ I, J, G 等分して Ω を $I \times J \times G$ 個の小直方体に分割する。次にその小直方体の一つを図 1.1 に示す 6 つの四面体に分割して標準直方体とする。おのおのの小直方体を、この標準直方体を平行移動したもので置き換えて、直方体 Ω 全体の四面体分割とする。

直方体 Ω のフリードリックス・ケラー型分割が定める区分一次連続な有要素空間を V_h とするとき、離散問題 (P_h) から導かれる偏差分方程式

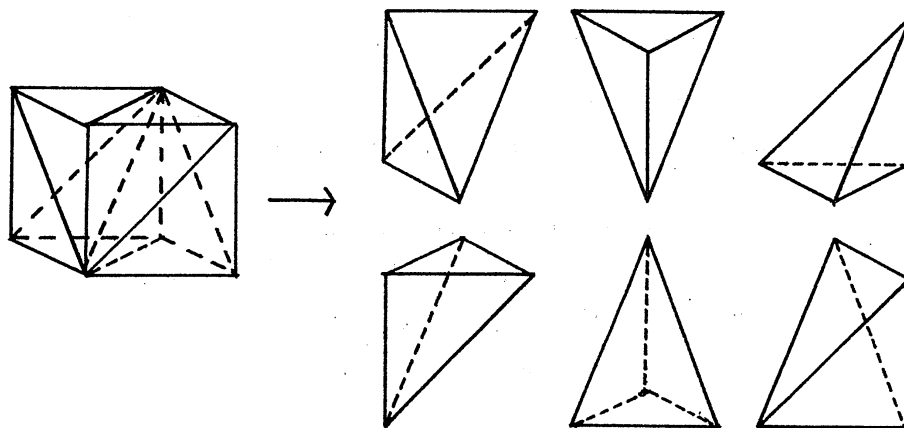


図 1.1 標準直方体の四面体分割

には、長方形領域の場合にみられる対称性がない。そこで新たに離散問題を設定することにする。

まず記号を定める。 x, y, z 方向の分割数をそれぞれ I, J, G とする。そして各方向の刻み幅を

$$h = \frac{a}{I}, \quad k = \frac{b}{J}, \quad l = \frac{c}{G}$$

とする。節点の作る格子のアスペクト比 κ_1 と κ_2 を

$$\kappa_1 = \frac{h}{l}, \quad \kappa_2 = \frac{k}{l}$$

とおき、 κ_1, κ_2 を固定して、 l をパラメタとして動かして考えることにする。節点 x_i, y_j, z_g を

$$\begin{aligned} x_i &= hi, & 0 \leq i \leq I, \\ y_j &= kj, & 0 \leq j \leq J, \\ z_g &= lg - c, & 0 \leq g \leq G \end{aligned}$$

とおき、 $u(x_i, y_j, z_g)$ の近似値を $U_{i,j,g}$ とかくことにする。さらに、

$$\begin{aligned} U_{-1,j,g} &= U_{1,j,g}, & U_{I+1,j,g} &= U_{I-1,j,g}, & 0 \leq j \leq J, & 0 \leq g \leq G, \\ U_{i,-1,g} &= U_{i,1,g}, & U_{i,J+1,g} &= U_{i,J-1,g}, & 0 \leq i \leq I, & 0 \leq g \leq G, \\ U_{i,j,-1} &= U_{i,j,1}, & U_{i,j,G+1} &= U_{i,j,G-1}, & 0 \leq i \leq I, & 0 \leq j \leq J \end{aligned}$$

とおくことにする。なお点 (x_i, y_j, z_g) に節点番号 $p = (I+1)(J+1)g + (I+1)j + i + 1$ を対応させ、

$$\begin{aligned} U_{(I+1)(J+1)g+(I+1)j+i+1} &= U_{i,j,g}, \\ 0 \leq i \leq I, & 0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq g \leq G, \\ N &= (I+1)(J+1)(G+1), \\ \vec{U}_l &= (U_p)_{p=1,\dots,N} \end{aligned}$$

と表わすことにする。

定義 1 [三次元離散問題 (3D - FD)]

α, β, γ を

$$\alpha + 2(\beta + \gamma) = 1, \quad \beta + \gamma < \frac{1}{2}$$

をみたす実パラメタとして, 作用素 Δ_{hkl} と M_{hkl} を

$$\begin{aligned} \Delta_{hkl} U_{i,j,g} &= \frac{1}{h^2} (U_{i-1,j,g} - 2U_{i,j,g} + U_{i+1,j,g}) \\ &\quad + \frac{1}{k^2} (U_{i,j-1,g} - 2U_{i,j,g} + U_{i,j+1,g}) \\ &\quad + \frac{1}{l^2} (U_{i,j,g-1} - 2U_{i,j,g} + U_{i,j,g+1}), \\ M_{hkl} U_{i,j,g} &= \frac{1}{l} \{ \alpha U_{i,j,g} + \beta (U_{i-1,j,g} + U_{i+1,j,g}) \\ &\quad + \gamma (U_{i,j-1,g} + U_{i,j+1,g}) \} \end{aligned}$$

とおき, 次の偏差分方程式をみたす自明でない固有値と固有ベクトルの対 $\{\lambda_l, \vec{U}_l\}$ を求める問題を 三次元離散問題 (3D - FD) と呼ぶことにする.

$$\begin{cases} \Delta_{hkl} U_{i,j,G} = -\lambda_l M_{hkl} U_{i,j,G}, & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \\ \Delta_{hkl} U_{i,j,g} = 0, & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq g \leq G-1. \end{cases}$$

三次元離散問題 (3D - FD) に対して, 長方形領域の場合と類似の結果を導くことができる.

定理 9 [三次元離散問題 (3D - FD) の解析解]

離散問題 (3D - FD) の固有値と固有ベクトルの対 $\{\lambda_l, \vec{U}_l\}$ は, モード数 $m = 0, 1, 2, \dots, I, n = 0, 1, 2, \dots, J$ と非零定数 C に対し,

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \mu_l \cdot \tanh\left(\frac{c}{l} \log \nu_l\right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\mu_1}{2\kappa_1} l\right) + \kappa_2^2 \sin^2\left(\frac{\mu_2}{2\kappa_2} l\right)}}{1 - 2\beta \sin^2\left(\frac{\mu_1}{2\kappa_1} l\right) - 2\gamma \sin^2\left(\frac{\mu_2}{2\kappa_2} l\right)}, \\ U_{i,j,g} &= C \cosh(g \log \nu_l) \cos(\mu_1 h i) \cos(\mu_2 k j), \\ &\quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq g \leq G \end{aligned}$$

である. ただし

$$\mu_1 = \frac{\pi m}{a}, \quad \mu_2 = \frac{\pi n}{b},$$

$$\begin{aligned}\mu_l &= \frac{2}{l} \sqrt{\kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\mu_1}{2\kappa_1} l\right) + \kappa_2^2 \sin^2\left(\frac{\mu_2}{2\kappa_2} l\right)}, \\ \nu_l &= 1 + 2\left\{\kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\mu_1}{2\kappa_1} l\right) + \kappa_2^2 \sin^2\left(\frac{\mu_2}{2\kappa_2} l\right)\right\} \\ &\quad + 2\sqrt{\kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\mu_1}{2\kappa_1} l\right) + \kappa_2^2 \sin^2\left(\frac{\mu_2}{2\kappa_2} l\right)} \\ &\quad \cdot \sqrt{1 + \kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\mu_1}{2\kappa_1} l\right) + \kappa_2^2 \sin^2\left(\frac{\mu_2}{2\kappa_2} l\right)}\end{aligned}$$

とする。したがって、対応する連続問題 (E) の解を $\{\lambda, u\}$ とすると、静止水面 Γ_0 上の節点 $(x_i, y_j, 0)$ で近似固有ベクトル $\vec{U}_l$ は真の固有関数 u と定数倍を除いて一致する。つまり非零定数 C' に対して

$$U_{i,j,G} = C' u(x_i, y_j, 0), \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J$$

が成り立つ。

長方形領域の場合と同様に固有値の相対誤差を定める。水平方向の刻み I, J を固定し、モード数 m, n についての固有値の相対誤差を $\rho_l(m, n)$ とする。

$$\rho_l(m, n) = \frac{\lambda_l(m, n)}{\lambda(m, n)}, \quad m = 1, \dots, I, \quad n = 1, \dots, J.$$

これを $\xi = \frac{m}{I} = \frac{m\kappa_1 l}{a}$ と $\eta = \frac{n}{J} = \frac{n\kappa_2 l}{b}$ ($0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$) の関数とみて、 $\tilde{\rho}_l(\xi, \eta) = \rho_l\left(\frac{a\xi}{\kappa_1 l}, \frac{b\eta}{\kappa_2 l}\right)$ と正規化する。すると定理 9 の解析解より次の表示を得る。

定理 10 [三次元離散問題 (3D-FD) の固有値の相対誤差の表示]

離散問題 (3D-FD) において、固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_l(\xi, \eta)$ は、次のように表現できる。

$$\tilde{\rho}_l(\xi, \eta) = \tilde{\rho}(\xi, \eta) \cdot \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{l} \log \tilde{\nu}(\xi, \eta)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{l} \sqrt{(\kappa_1 \xi)^2 + (\kappa_2 \eta)^2}\right)}, \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1.$$

ただし

$$\tilde{\rho}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{\kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + \kappa_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)}{\left(\frac{\kappa_1}{2}\xi\right)^2 + \left(\frac{\kappa_2}{2}\eta\right)^2}} \sqrt{\frac{1 + \kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + \kappa_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)}{1 - 2\beta \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - 2\gamma \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)}},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(\xi, \eta) &= 1 + 2\{\kappa_1^2 \sin^2(\frac{\pi}{2}\xi) + \kappa_2^2 \sin^2(\frac{\pi}{2}\eta)\} \\ &\quad + 2\sqrt{\kappa_1^2 \sin^2(\frac{\pi}{2}\xi) + \kappa_2^2 \sin^2(\frac{\pi}{2}\eta)} \\ &\quad \cdot \sqrt{1 + \kappa_1^2 \sin^2(\frac{\pi}{2}\xi) + \kappa_2^2 \sin^2(\frac{\pi}{2}\eta)}\end{aligned}$$

とする.

定理 1 1 [三次元離散問題 (3D - FD) の固有値の相対誤差の収束]

離散問題 (3D - FD) において, 固有値の相対誤差 $\tilde{\rho}_l(\xi, \eta)$ は, $l \rightarrow 0$ のとき, $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ につき一様に $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$ へ収束する.

また $(\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ を固定するとき,

$$\begin{aligned}|\tilde{\rho}_l(\xi, \eta) - \tilde{\rho}(\xi, \eta)| &\leq \tilde{\rho}(\xi, \eta) \cdot 2 \cdot \exp(-\frac{\sigma(\xi, \eta)}{l}), \\ \sigma(\xi, \eta) &= 2c \log \tilde{\nu}(\xi, \eta),\end{aligned}$$

$(\xi, \eta) = (0, 0)$ のとき,

$$\tilde{\rho}_l(\xi, \eta) = \tilde{\rho}(\xi, \eta) = 1$$

が成り立つ.

定理 6 に対応する結果は目下検討中である.

文献

[1] Stoker, J. J., Water Waves, Interscience Publishers, New-York, 1957.

[2] 牛島照夫, 四面体分割と三次元ポテンシャル問題, 研究集会「MHD 数値計算とトーラス閉じこめの基礎研究」講演報告集, pp.87-94, 1987.

[3] 牛島照夫, 松木美保子, 青木篤, 水の波の線形問題について, 数理解析研究所講究録 691「境界要素法の数学的理論とその周辺 (I)」, pp.97-125, 1989.

[4] 牛島照夫, 若松宏明, 水の波の線形固有値問題の境界要素計算, 数理解析研究所講究録 703「境界要素法の数学的理論とその周辺 (II)」, pp.46-63, 1989.