

多重尺度キュムラント展開理論における相似解

京大 数理解析 不田 重雄

§1. スペクトル方程式

いわゆる多重尺度キュムラント展開理論と一次元 Burgers 乱流, 二次元・三次元 Navier-Stokes 乱流に適用すると, エネルギースペクトルに関する次の方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{R} k^2 \right) \phi(k, t) = \psi(k, t)$$

1-dimensional

$$E(k, t) = \phi(k, t)$$

$$\psi(k, t) = -\frac{R}{2} k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\left[-\frac{2t}{R}(k^2 + k'^2 + kk')\right]}{k^2 + k'^2 + kk'} \times$$

$$\times \left\{ 2(k+k')\phi(k, t) - k\phi(k+k', t) \right\} \phi(k', t) dk'$$

2-dimensional

$$E(k, t) = \pi k \phi(k, t)$$

$$\psi(k, t) = -2Rk \int_0^\infty dk' \int_{-1}^1 d\mu \frac{1 - \exp\left[-\frac{t}{R}(k^2 + k'^2 + k''^2)\right]}{k^2 + k'^2 + k''^2} \times \\ \times k'^2 \left(\frac{kk'}{k'^2} + 2\mu\right) \sqrt{1-\mu^2} \left\{ \phi(k, t) - \phi(k', t) \right\} \phi(k'', t)$$

3-dimensional

$$E(k, t) = 4\pi k^2 \phi(k, t)$$

$$\psi(k, t) = -4\pi Rk \int_0^\infty dk' \int_{-1}^1 d\mu \frac{1 - \exp\left[-\frac{t}{R}(k^2 + k'^2 + k''^2)\right]}{k^2 + k'^2 + k''^2} \times \\ \times k'^3 \left(\frac{kk'}{k'^2} + \mu\right) (1-\mu^2) \left\{ \phi(k, t) - \phi(k', t) \right\} \phi(k'', t)$$

但し、

$$k''^2 = k^2 + k'^2 + 2\mu k k'$$

である。なお簡単のために初期条件として

$$\phi(k, 0) = 0$$

を選んだ。ここで、 $E(k, t)$ はエネルギースペクトル関数

R はレイノルズ数である。

これらの方程式は、色々の初期条件のもとで数値計算され
以下に述べる相似解の存在が示唆される。(1-5)

§2. 相似解

エネルギースペクトル方程式の $R \rightarrow \infty$ における漸近解は次の二つの条件のもとで解析的に求めてみよう。

- (1) スペクトルは、いくつかの限られた波数領域において R と t に関して相似である。即ち

$$E(k, t) = R^\alpha t^\beta F(k / (R^\gamma t^\delta))$$

と表される。相似指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は各波数領域で異なっている。

- (2) スペクトルは、隣り合った領域間ではなめらかにつながっている。

結論から言うと 1-D と 3-D では三つの領域、2-D では二つの領域が存在する。これらの領域を波数の小さい方からエネルギー領域、中間領域 (2-D では無い) 及び粘性領域と呼ぶ事にする。

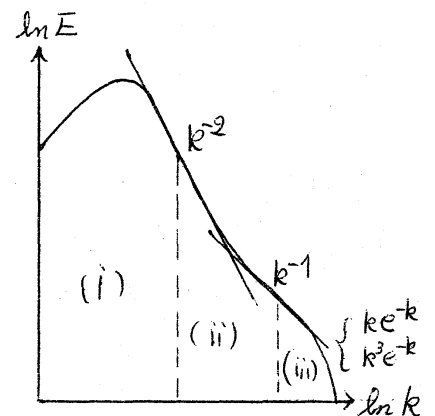
1-D, 3-D

解くべきスペクトル方程式は、

- (i) エネルギー領域では

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = \nu$$

- (ii) 中間領域では



[図 1]

$$\mathcal{U} = 0$$

(iii) 粘性領域では

$$\frac{\partial}{\partial t} k^2 \phi = \mathcal{U}$$

	α	β	γ	δ
(i)	0	$-(3b+2)$	0	b
(ii)	-1	$-(b+1)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
(iii)	$-\frac{5}{4}$	$-(\frac{b}{2} + \frac{3}{4})$	$\frac{3}{4}$	$-(\frac{b}{2} + \frac{3}{4})$

[表 1]

である。領域 (i) と (ii) の間には k^{-2} -スペクトル帯が、
領域 (ii) と (iii) の間には k^{-1} -スペクトル帯がそれぞれ存在する。また $k \rightarrow 0$ における漸近的振舞は 1-D では
 $E \sim k e^{-k}$, 3-D では $E \sim k^3 e^{-k}$ である。

次に、相似指数はエネルギー-スペクトルの $k \rightarrow 0$ での振舞によって決まる。小さな波数領域でのスペクトルの形を

$$E \sim k^a, \quad b = -\frac{2}{a+3}$$

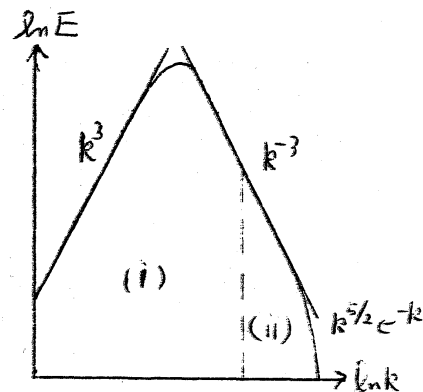
とすると、相似指数は表1の様になる。ここに a (従って b も) は、不変量であり 初期条件によって決まる。

2-D

この場合は、(i) エネルギー領域
では

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \mathcal{U}$$

(ii) 粘性領域では



[図 2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{2}{R} k^2 \phi = \psi$$

	α	β	γ	δ
(i)	0	1	0	-1
(ii)	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

と解く事になる。領域 (i)

と (ii) の間に k^3 -スケー

[表 2]

トル帯が存在する。 $k \rightarrow \infty$ における漸近的振舞は

$$E \sim k^{5/2} e^{-k} \quad \text{となる。}$$

相似指数は 初期条件によらず一意的に定まり、表 2 の様になる。また $k \rightarrow 0$ における相似解の振舞は $E \sim k^3$ である。

§3 相似解の導出

ここでは、一次元 Burgers 乱流の場合を例にとって、相似解の導出を説明しよう。基礎方程式は各波数領域において、次の様に与えられる。

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(k, t) = -k t \int_{-\infty}^{\infty} \{ 2(k+k') \phi(k, t) - k \phi(k+k', t) \} \phi(k', t) dk'$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp \left[-\frac{2t}{R} (k^3 + k'^3 + k k') \right]}{k^3 + k'^3 + k k'} \{ 2(k+k') \phi(k, t) - k \phi(k+k', t) \} \phi(k', t) dk' = 0$$

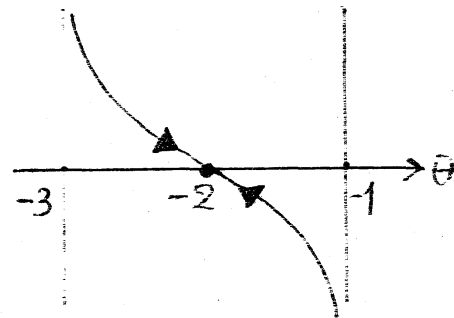
$$(iii) \quad \frac{2}{R} k^2 \phi(k, t) = -\frac{R}{2} k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{ 2(k+k') \phi(k, t) - k \phi(k+k', t) \} \phi(k', t)}{k^3 + k'^3 + k k'} dk'$$

領域 (i) で $k \rightarrow \infty$ にした式と領域 (ii) で $k \rightarrow 0$ にした式は一致し、

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \{2(k+k')\phi(k,t) - k\phi(k+k',t)\} \phi(k',t) dk' = 0$$

となる。ここで

$$\phi(k,t) \propto |k|^{\theta}$$



[図 3]

と仮定すると上式の左辺は図 3

の様に变化し $\theta = -2$ でのみ

零となる。スペクトル方程式の時間微分の項を考慮すると、

θ を時間の関数と考えた時、図の矢印の方向に変化する事が分る。即ち $\theta = -2$ は安定な点である。従って、領域 (i) と (ii) の間は k^2 -スペクトル系に在る事が結論される。

次に領域 (ii) と (iii) の間を考えよう。領域 (ii) で $k \rightarrow \infty$ にした式と領域 (iii) で $k \rightarrow 0$ にした式は一致し、

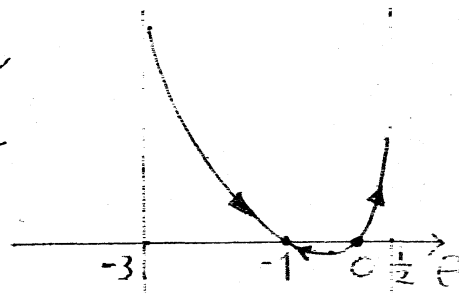
$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{2(k+k')\phi(k,t) - k\phi(k+k',t)\} \phi(k',t)}{k^2 + k'^2 + kk'} dk' = 0$$

となる。上と同じ様に、スペクトル

をベキの形に仮定すると左辺は図 4

の様に变化する。 $\theta = 0$ と $\theta = -1$

で零になるが、 $\theta = 0$ は不安定な点



[図 4]

$\theta = -1$ は安定点である。従って、領域 (ii) と (iii) の間には、 k^{-1} -スペクトル帯が存在する。

さて、領域 (i) における相似解を考えてみよう。 $k \rightarrow 0$ の極限において、スペクトル方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = 2k^2 t \int_0^\infty E(k', t)^2 dk'$$

となる。従って、初期条件として

$$E(k, 0) = A_a k^a \quad (k \rightarrow 0)$$

とすれば、 $-1 < a < 2$ のときは A_a は時間的に不変であり、 $a \geq 2$ のときは、

$$E(k, t) = A_2(t) k^2 \quad (k \rightarrow 0)$$

で、

$$\frac{d}{dt} A_2(t) = 2t \int_0^\infty E(k', t)^2 dk' \quad (> 0)$$

となり、 $A_2(t)$ は時間の増加関数になる。

領域 (i) における相似指数は $\alpha = \gamma = 0$ であるから相似解と

$$E(k, t) = t^\beta F_i(k/t^\delta)$$

として、スペクトル方程式に代入し、両辺で t のべきを等しいと置くと、

$$\beta = -3b - 2, \quad \delta = b$$

が得られる。この時、スペクトル方程式は、

$$-(3b+2)\bar{F}_i(k) - bk\bar{F}_i'(k) = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{2\bar{F}_i(k) - \bar{F}_i(k-k')\} \bar{F}_i(k') dk'$$

となる。特に、 $k \rightarrow 0$ では、

$$-(3b+2)\bar{F}_i(k) - bk\bar{F}_i'(k) = 2k^2 \int_0^{\infty} \bar{F}_i(k')^2 dk'$$

で、その解は、 A を積分定数として、

$$\bar{F}_i(k) = A k^{-\frac{2+3b}{b}} - \frac{2k^2}{5b+2} \int_0^{\infty} \bar{F}_i(k')^2 dk'$$

で与えられる。

パラメター b の値は

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} E(k, t) dk < 0$$

より、 $b > -1$ でなければならず、また $E(k, t) > 0$

より $b < -\frac{2}{5}$ でなければならぬ。積分定数 A の値は、

$b = -2/3$ および $-5/12$ (数値計算) 以外は、零ではない事が分る。

各波数領域内でエネルギースペクトルの相似形を仮定し、スペクトル方程式に代入し、 k と ω のべきを等置する事によって、相似指数の間の一連の関係式が得られる。しかし、これだけでは、相似指数を決定する事はできない。 k^2 -スペクトル帯と、 k^1 -スペクトル帯でエネルギースペクトルが、なめらかにつながる事を要求し、領域(i)における前記の相似指数を用いると、表1にあげた様に、全ての相似指数が決定される。

以上の方法は、二次元、三次元 Navier-Stokes 乱流においても、同様に適用され、表1および表2にあげた結果を得る。

ところで、領域(iii)において、 $k \rightarrow \infty$ とした時のスペクトルの漸近形が 1-D, 2-D, 3-D 共、指数的に減少する関数である事を解析的に示す事ができる。

$$F_{iii}(k) = \begin{cases} \frac{12\sqrt{3}}{2\pi - 3\sqrt{3}} k e^{-k} & (1-D) \\ \frac{12}{\sqrt{2\pi} (11 - 2\sqrt{3}\pi)} k^{3/2} e^{-k} & (2-D) \\ \frac{6\sqrt{3}}{(15\sqrt{3} - 8\pi)\pi} k e^{-k} & (3-D) \end{cases}$$

スペクトル密度

§4. いくつかの統計量

前章で求めたエネルギー・スペクトルを用いて計算できる二
 三の統計量を示しておこう。

エネルギー

流体の単位質量当りのエネルギー $\mathcal{E}(t)$ はエネルギー・スペ
 クトル関数のエネルギー領域における形から決定される事が
 証明できる。

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} t^{-\frac{2(a+1)}{a+3}} \int_0^\infty F_c(k) dk & (1-D) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} \pi \int_0^\infty k F_c(k) dk & (2-D) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} 4\pi t^{-\frac{2(a+1)}{a+3}} \int_0^\infty k^2 F_c(k) dk & (3-D) \end{cases}$$

$$(-1 < a < 2)$$

これから、一次元と三次元では 同じ減衰法則に従う事が
 分る。それは、スペクトルの $k \rightarrow 0$ における振舞を表わすパ
 ラメター a で決まる。また 二次元のエネルギーは時間によ
 らないで一定である。

エンストロフィー

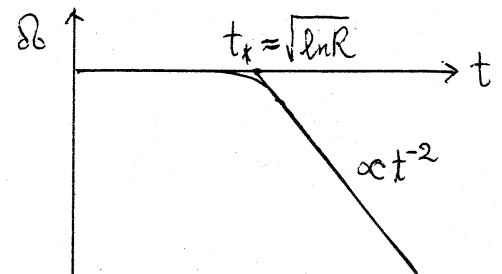
エンストロフィー $\mathcal{Q}_b(t)$ はエネルギー・スペクトル関数を用
 いて、

$$\mathcal{S}_b(t) = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk$$

と表わされる。二次元乱流の場合にこの量を計算すると

$$\mathcal{S}_b(t) = \frac{C\pi}{2} \ln R \cdot t^{-2}$$

但し



[図5]

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} k^4 F_i(k)$$

となる。図5に示した様に、 $\sqrt{\ln R}$ 程度の時間 t_* が存在し、 $t < t_*$ では $\mathcal{S}_b(t)$ は一定、 $t > t_*$ では $\mathcal{S}_b(t) \propto t^{-2}$ となる。

Skewness

速度微分の Skewness は

$$S(t) = \langle (\frac{\partial u}{\partial x})^3 \rangle / \langle (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \rangle^{3/2}$$

で定義されるが、エネルギースペクトルを用いて計算すると、

$$S(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \int_0^\infty k^4 F_{iii}(k) dk}{[\int_0^\infty k^2 F_{iii}(k) dk]^{3/2}} & (1-D) \\ 0 & (2-D) \end{cases}$$

$$\left| \frac{3}{7} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{\int_0^\infty k^6 \bar{F}_{iii}(k) dk}{\left[\int_0^\infty k^4 \bar{F}_{iii}(k) dk \right]^{3/2}} \right| \quad (3-D)$$

となる。いずれも時間によらずに定常な値である。

Micro-scale

Taylor の Micro-scale は

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{\langle u(x,t)^2 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \rangle}}$$

で定義され、相似解を用いると

$$\lambda(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t}{R} \frac{\int_0^\infty F_i(k) dk}{\int_0^\infty k^2 F_{iii}(k) dk}} & (1-D) \\ \sqrt{\frac{8t^2}{C_{\text{lin}} R} \frac{\int_0^\infty k F_i(k) dk}{\int_0^\infty k^4 F_{iii}(k) dk}} & (2-D) \\ \sqrt{\frac{5t}{R} \frac{\int_0^\infty k^2 F_i(k) dk}{\int_0^\infty k^4 F_{iii}(k) dk}} & (3-D) \end{cases}$$

となる。

§5. 厳密解

Burgers 乱流のエネルギー領域におけるスペクトル及び、速度相関は $b = -2/3$ の時、次式で表わされる事が分った。

$$B_i(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_i(k) e^{ikr} dk$$

として,
$$\frac{B_i(r)}{B_i(0)} - \ln \frac{B_i(r)}{B_i(0)} = 1 + \frac{r^2}{6B_i(0)}$$

及び

$$\bar{H}_i(k) = \frac{B_i(0)}{\pi k} \int_0^1 \sin k \sqrt{6B_i(0)(x - \ln x)} dx$$

である。このエネルギースペクトルの形は図6に示してある。

[文献]

- 1) Tatsumi, Kida & Mizushima J. F. M. (1978) 85 97-142
- 2) Tatsumi & Kida (to appear)
- 3) Tatsumi & Mizushima (")
- 4) Mizushima & Segami (")
- 5) Tatsumi & Yanase (")

② 1) と 2) は 三次元, 3) と 4) は 一次元, 5) は 二次元
に属するものである。

