

非同期回路の合成定理

早大 理工 中 村 剛

Semi-modular state chart の synthesis を考える
 場合、similarity relation $\sim$ よりも v -similarity
 relation $\sim_v$ が本質的であることが Hattori [10] において明
 かにされた。ここでは [10] において得られた $\sim_v$ の性質と
 、M. Hattori、H. Noguchi [7] において重要な役割を果た
 した x -extension の概念を用いて、直接に digital ex-
 tension を構成する手順を考える。

1. Lemma. (2 of [10]). (V, h) を finite semi-
 modular state chart とすると、次の (1), (2), (3) が成立す
 る。

- (1) $|V/x|$, v -similarity class の数, は有限である。
- (2) v -similarity class T をとり、 Z を $Z(T)$ の
 cycle、 Q をその張る nodes とすると、 $T|Q = \{M|Q\}$;

$M \in T$ は全順序集合である。

(3). M, N を $Z(M) = Z(N) = \{Z(1), \dots, Z(m)\}$ なる実とし、 $Q(q), q=1, \dots, m$, を各 $Z(q)$ の張る nodes とする。 $Q(0) = J - \bigcup_{q=1}^m Q(q)$ としたとき、 $M \sim N$ なる必要十分条件は $M|Q(q) \equiv N|Q(q) \pmod{Z(q)|Q(q)}$ が全ての $q=1, \dots, m$ について成立しかつ $M|Q(0) = N|Q(0)$ となることである。

2. 定義. (V, R) を finite semi-modular state chart, $\{T(\alpha)\}, \alpha=1, 2, \dots, n$, を v -similarity class の族とする。二つの v -similarity class $T(\alpha), T(\beta)$ をとる。もしある実 $M \in T(\alpha), N \in T(\beta)$ について $M \sim N$ となるならば $T(\alpha) \sim T(\beta), R(M) = R(N)$ となるならば $R(T(\alpha)) = R(T(\beta))$ と書く。 K を次に定義される non-ordered な couple とする。

$K = \{(T(\alpha), T(\beta)); R(T(\alpha)) = R(T(\beta)) \text{ かつ } T(\alpha) \not\sim T(\beta)\}$. 通常 K を (V, R) の knotty set, その要素を K で示す。

3. 定義. (V, R) を node J の finite state chart, T と S を V の disjoint subset とする。 (V, R) の

extension (V^e, h^e) が次の (1), (2) を満たすとき (T, S) -extension という。

(1). $h^e(M^e) = h^e(N^e)$ が $M^e|J \sim N^e|J$ なる V^e の真 M^e, N^e については、 $M^e \sim N^e$ が成り立つ。

(2). $M^e|J \in T, N^e|J \in S$ なる V^e の真 M^e, N^e については、 $h^e(M^e) \neq h^e(N^e)$ となる。

4. Lemma. (Hattori-Noguchi [1]). (V, h) を nodes J をもつ state chart、 K をその knolly set とする。もし各 $K \in K$ について K -extension (V^K, h^K) が存在するならば、それらの amalgamation $\otimes_K (V^K, h^K)$, $K \in K$, は (V, h) の digital extension である。

5. Lemma. (V, h) を finite state chart で少くとも 1 つの cycle をもつものとするとき、ある cycle の直交系 $\{X(1), \dots, X(m)\}$ が存在して任意の cycle はそれらの線型結合で書ける。実際、 (V, h) には order 子のもとで最大の $\mathcal{E}$ -class が存在するから、その cycle をとればよい。

$X(g)$ の張る nodes を $Q(g)$, $g=1, \dots, m$, とし各 $i \in J$ について非負整数 $w(i)$ を次の様に定義し、node i の上の cyclic number と呼ぶ。

$$w(i) \begin{cases} = 0 & \text{if } i \notin \bigcup Q(g) \\ = X(g)_i & \text{if } i \in Q(g) \end{cases}.$$

1.1 and 2.1 of [6] により、 $w(i) \neq 0$ ならば $w(i) \geq 2$ である。

6. Lemma. (V, h) を nodes J をもった finite state chart、 $\{w(i)\}$ をそれぞれの cyclic number とする。もし V の実 M, N で $M \sim N$ かつ $M_i \neq N_i$ となるならば、 $w(i) \neq 0$ かつ $M_i \equiv N_i \pmod{w(i)}$ である。

証明. $M_i < N_i$ として一般性を失わない。 $M(0) = M$ 、 $N(0) = N$ 、 $M(k) = M \vee N(k-1)$ 、 $N(k) = M(k) - M + N$ と実列 $\{M(k)\}$ 、 $\{N(k)\}$ を定義すると、ある $k' > k \geq 0$ が存在して、 $M(k') \sim M(k) \sim N(k)$ 、 $M(k') \geq M(k) \vee N(k)$ となる。

2.6 of [6] により $\{a(g)\}$ 、 $\{b(g)\}$ 、なる W の実列が存在して、 $Z(M(k))$ の cycle $\{Z(g)\}$ について

$$M(k') = M(k) + \sum_g a(g) Z(g) = N(k) + \sum_g b(g) Z(g)$$

となる。 3.5 of [6] により $\{Z(g)\}$ は直交系であるから、ある g が存在して $M(k')_i = M(k)_i + a(g) Z(g)_i = N(k)_i + b(g) Z(g)_i$ かつ $a(g) > b(g)$ となる。 よって

$$N_i - M_i = N(k)_i - M(k)_i = (a(g) - b(g)) Z(g)_i \text{ となる。}$$

従って $w(i)$ の定義より $N_i \equiv M_i \pmod{w(i)}$ をうる。

7. 定義、 (V, R) を nodes J をもった finite state chart で特にある node i について $V|_{\{i\}} = \{0, 1, \dots, R\}$ とする。 r, ξ をそれぞれ $0 < r < R$, $\xi \in J$ なる数とし、 nodes $\{i, \xi\}$ をもった $(V, R)|_{\{i\}}$ の extension (V', R') を次の様に定義する。

$V' = \{(j, 0) ; 0 \leq j \leq r\} \cup \{(j, 1) ; r \leq j \leq R\}$,
 $R'(M')_{\xi} = M'_{\xi}$, $R'(M')_i = R_i(M'_i)$ ここで $M' \in V'$ で
 R_i については 1.1 of [6] を参照されたい。 $(V, R)|_{\{i\}} = (V', R')|_{\{i\}}$ であるから amalgamation $(V, R) \otimes (V', R')$ をつくれる。 これを "nodes $\{\xi, J\}$ をもった (i, r) に関する type-1 extension" という。

8. 定義、 (V, R) を nodes J をもった finite state chart で特にある node i について $\omega(i) \neq 0$ とする。 a, b をそれぞれ $0 \leq a < \omega(i)$, $b > 0$ なる数とし、数列 $\{a(k)\}$ を $a(k) = a + k \cdot \omega(i)$ と定義する。 ξ を $\xi \in J$ なる指数とし、三通りの extension (V', R') を次の様に定義する。
 どれも $(V, R)|_{\{i\}}$ の extension でその nodes は $\{i, \xi\}$ である。

[type-2]: $V' = V'(0) \cup V'(1) \cup \dots \cup V'(3b+1) \cup V'(\infty)$,

$$V'(0) = \{(j, 0) ; 0 \leq j < a\}$$

$$V'(3b-2) = \{(a(b-1), 2b-2), (a(b-1), 2b-1)\}$$

$$V'(3k-1) = \{(a(k-1)+1, 2k-1), (a(k-1)+1, 2k)\}$$

$$V'(3k) = \{(j, 2k); a(k-1)+1 < j < a(k)\}$$

$$k = 1, 2, \dots, b$$

$$V'(3b+1) = \{(a(b), 2b), (a(b), 2b+1)\}$$

$$V'(\infty) = \{(j, 2b+1); j > a(b)\} \quad \text{と } \exists \text{ 3.} \quad \text{但し}$$

もし $a=0$ 又は $w(i)=2$ の時はそれぞれ $V'(0) \times 1$, $V'(3k)$ は空集合と $\exists$ 3. $M' \in V'$ の実として $R'(M')_i = R_i(M'_i)$,

$$R'(M')_{\xi} = M'_{\xi} \quad \text{と } \exists \text{ 3.}$$

$$[\text{type-3}]: \quad V' = V'(0) \cup V'(1) \cup \dots \cup V'(k) \cup \dots$$

$$V'(0) = \{(j, 0); 0 < j < a\}$$

$$V'(4k-3) = \{(a(k-1), 2k-2), (a(k-1), 2k-1)\}$$

$$V'(4k-2) = \{(j, 2k-1); a(k-1)+1 \leq j < a(k)-3\}$$

$$V'(4k-1) = \{(a(k)-2, 2k-1), (a(k)-2, 2k)\}$$

$$V'(4k) = \{(a(k)-1, 2k)\}$$

但し、 $a=0$ 又は $w(i)=3$ の時は $V'(0)$ 又は $V'(4k-2)$ は空集合とし、 $w(i)=2$ の時はこの type の extension は定義しない。 $M' \in V'$ の実として、 $R'(M')_i = R_i(M'_i)$, $R'(M')_{\xi} = M'_{\xi} \pmod{2b}$ と $\exists$ 3.

$$[\text{type-4}]: \quad V' = \{(0,0)\} \cup \{(j, j-1), (j, j); j \geq 1\}$$

但し $w(i) \geq 3$ の時はこの type の extension は定義しない。 $M' \in V'$ の実として、 $R'(M')$ を type-3 の時と同様に

定義する。

かようにして $(V, R) | \{i\}$ の extension type-2, 3, 4 を定義したわけですが、それと (V, R) の amalgamation $(V, R) \otimes (V', R')$ をそれぞれ type-2, 3, 4 extension with respect to (i, a, b) , (i, a, b) , (i, b) とする。

9. Lemma. (V, R) を nodes J をもつ finite state chart, $(V^e, R^e) = (V, R) \otimes (V', R')$ を 7, 8 で定義した 4 種の type の extension のうちの任意の 1 つとする。 M^e, N^e を $R^e(M^e) = R^e(N^e)$ かつ $M^e|_J \sim N^e|_J$ なる V^e の点とすると、 $M^e \sim N^e$ である。

証明. 6. lemma 及び 6.6 of [6] を用いることにより証明できる。より厳格な証明を欲するなら、各 extension を change chart を用いて表現することもできるが、ここではふれないことにする。

10. Lemma (Hatlori [10]). (V, R) を finite state chart, $T(\alpha)$, $T(\beta)$ と $T(\beta) \xrightarrow{\sim} T(\alpha)$ なる similarity class とすると、ある node $i \in J$ が存在して、任意の $M \in T(\alpha)$, $N \in T(\beta)$ について $N_i > M_i$ となりかつ M_i は定数にある。

証明、 $Q(0)$ を $Z(T(\alpha))$ の unspanned nodes とする。
 $T(\beta) \not\sim T(\alpha)$ で $T(\alpha)$ が v -similarity class なることより、
 ある node $i \in Q(0)$ が存在して、任意の $M \in T(\alpha)$, $N \in T(\beta)$ について、 $M_i < N_i$ となる。一方 1 により M_i は定数である。

11. 定理、 (V, R) を nodes J をもった finite state chart、 $K = (T(\alpha), T(\beta))$ を $T(\beta) \not\sim T(\alpha)$ なる knotty set K の元とすると、 K -extension で nodes $\{i, J\}$ をもったものが存在する。但し i は J のある指数である。

証明。10において存在を示された特別な node を i とすると、 $T(\alpha)$ は node i では定数であるからそれを $(r-1)$ とする。もし $V \setminus \{i\} = \{0, 1, \dots, k\}$ ならば (V^e, R^e) を type-1 extension with respect to (i, r) とし、一方もし $w(i) \geq 2$ だったと a, b を $r = b \cdot w(i) + a$ $0 \leq a < w(i)$ とし、 (V^e, R^e) を type-2 extension with respect to (i, a, b) とすれば、9 lemma 及び、簡単な計算により K -extension であることがわかる。

12. Lemma (Hattori' [10]). J を空でない有限個の指数、集合、 $P(1), P(2), Z$ を $P(1) \neq P(2) \pmod{2}$ なる

W^J の実とする。 W^J の部分集合 $S(1), S(2)$ を

$$S(1) = \{P(1) + rZ; r \in W\}, \quad S(2) = \{P(2) + rZ; r \in W\}$$

と定義すると、ある正整数 k が存在して、 $S(1), S(2)$ をそれぞれ k 個の disjoint union $S(1) = \bigcup_{t=0}^{k-1} S(1, t), S(2) =$

$$\bigcup_{t=0}^{k-1} S(2, t) \text{ 但し, } S(1, t) = \{P(1) + tZ + r kZ; r \in W\}$$

$$S(2, t) = \{P(2) + tZ + r kZ; r \in W\},$$

で表わすと、任意の $(t, s) \in \{0, 1, \dots, k-1\} \times \{0, 1, \dots, k-1\}$ に対

してある node $i \in J$ が存在して、 $M_i \not\equiv N_i \pmod{kZ_i}$

が任意の $M \in S(1, t), N \in S(2, s)$ について成り立つ。

13. 定理. (V, R) を nodes J をもった finite state chart, $\kappa = (T(\alpha), T(\beta))$ を $T(\alpha) \in T(\beta)$ i.e., $T(\alpha) \leq T(\beta)$ かつ $T(\beta) \leq T(\alpha)$, ちる knotty set K の元とすると、nodes $\{i, j\}$ をもった κ -extension (V^e, R^e) が存在する。但し i は $i \in J$ なる指数である。

証明. 7.2 of [6] により $T(\alpha), T(\beta)$ は同一の cycle $\{Z(1), \dots, Z(m)\}$ をもつ。各 $Z(q), q=1, \dots, m$, の張る nodes を $Q(q)$ とし $Q(0)$ を $J - \bigcup_{q=1}^m Q(q)$ とする。 $T(\alpha), T(\beta)$ は nodes $Q(0)$ に関しては定バクトルでありかつ $T(\alpha) \in T(\beta)$ であるから $Q(0)$ では等しい。従って (3) of 1 によりある cycle $Z \in \{Z(1), \dots, Z(m)\}$ が存在して、その張る

nodes を Q とすると、 $M|Q \not\equiv N|Q \pmod{Z|Q}$ が全ての $M \in T(\alpha)$, $N \in T(\beta)$ について成立する。1 により

$$T(\alpha)|Q = \{P^g(\alpha) + r(Z|Q); r \in W\}$$

$T(\beta)|Q = \{P^g(\beta) + r(Z|Q); r \in W\}$ とかける、但し $P^g(\alpha)$ 、 $P^g(\beta)$ はそれぞれ $T(\alpha)|Q$, $T(\beta)|Q$ の最少元である。従って $P^g(\alpha) \neq P^g(\beta) \pmod{Z|Q}$ である。簡単のため、 $T(\alpha)|Q$, $T(\beta)|Q$, $Z|Q$ の代わりに $T^g(\alpha)$, $T^g(\beta)$, Z^g とかく。

12 Lemma で存在を示された特別な数 k とし、 $T^g(\alpha)$, $T^g(\beta)$ をそれぞれ k 個の disjoint union $T^g(\alpha) = \bigcup_{t=0}^{k-1} T^g(\alpha, t)$ 、

$T^g(\beta) = \bigcup_{s=0}^{k-1} T^g(\beta, s)$ で表わす。各 $(t, s) \in \{0, 1, \dots, k-1\}^2$ について $X(t, s)$ を $X(t, s) = \{T(\alpha, t), T(\beta, s)\}$ 、但し $T(\alpha, t) = \{M \in T(\alpha); M|Q \in T^g(\alpha, t)\}$, $T(\beta, s) = \{M \in T(\beta); M|Q \in T^g(\beta, s)\}$ 、と定義する。

もし任意の $X(t, s)$ に対して $X(t, s)$ -extension $(V^{(t, s)}, R^{(t, s)})$ が存在するならば、 $\bigotimes_{(t, s)} (V^{(t, s)}, R^{(t, s)})$ が X -extension になることは容易にわかる。従ってこれから $X(t, s)$ について考える。

(t, s) を一つとり、それに対して、12 で存在を示された特別な node を i とする。 u, v をそれぞれ $T(\alpha, t)|\{i\}$, $T(\beta, s)|\{i\}$ の最少元とし、 $u \leq v$ と仮定して一般性を失わない。一方 $u \not\equiv v \pmod{kZ_i}$ であるから、ある数 C が存在して、 $u + CkZ_i < v < (C+1)kZ_i$ となる。

以下 $\omega(i) = 2$ と $\omega(i) \geq 3$ の 2 通りの場合に分ける。

$[w(i)=2]$: $b \in \mathbb{R}Z_i = b \cdot w(i) = 2b$ とする。

$\mathbb{R}Z_i \supseteq \mathbb{Z}4$ であるから $b \in \mathbb{Z}2$ である。 (V^e, R^e) は type 4 extension with respect to (i, b) とする。

$[w(i) \geq 3]$: $a, b, q \in \mathbb{Z}$ と $u+1 = q \cdot w(i) + a$, $0 \leq a < w(i)$, $\mathbb{R}Z_i = b \cdot w(i)$ とする。 (V^e, R^e) は type 3 extension with respect to (i, a, b) とする。

すなわち、いずれの場合にも、9 lemma 及びもう少し複雑な計算により (V^e, R^e) が $K(t, s)$ -extension であることが分る。

以上により K -extension を構成する手順は与えられたが、それは一般に与えられた p に対して p 個とはならない。従って、次の定義と lemma により、今までの結果を利用して p 個 K -extension を構成するわけですが、ここにはそれにはふれないことにする。

14. 定義. (V, R) は nodes J と t 上の finite state chart, (V^e, R^e) , $(\hat{V}, \hat{R})$ はそれぞれ nodes J^e , $\hat{J}$ と t 上の (V, R) の extension のために、次の (1) (2) (3) (4) を満たす、 V^e から $\hat{V}$ への onto mapping が存在するとする。

$$(1) \quad M^e|_J = f(M^e)|_J$$

$$(2) \quad M^e \geq N^e \iff f(M^e) \geq f(N^e)$$

(3) もし $M^e \sim N^e$ かつ $L^e \in V_{M^e}^e$ とすると、

$$f(M^e + L^e) - f(M^e) = f(N^e + L^e) - f(N^e)$$

$$(4) \quad R^e(M^e) = R^e(N^e) \Leftrightarrow \hat{R}(f(M^e)) = \hat{R}(f(N^e))$$

この時 f を (V, R) 上の不変写像, $(\hat{V}, \hat{R})$ と $(\hat{V}, \hat{R})$ の (V, R) 上の不変像とよぶ。

15. Lemma. (V, R) を nodes J 上, 1. finite state chart, T, S を V の disjoint な部分集合, (V^e, R^e) を (T, S) extension とする。 (V^e, R^e) の (V, R) 上の不変像を $(\hat{V}, \hat{R})$ とすると, $(\hat{V}, \hat{R})$ も (T, S) -extension である。

最後にここに得た結論を述べる。

16. 定理. (V, R) を finite state chart とすると、その digital extension を構成する手順がある。もし (V, R) が p -健、physical ならば、 p -健、physical な digital extension を構成できる。