

# An improved level set method for Hamilton-Jacobi equations

早稲田大学 教育・総合科学学術院 浜向 直  
Nao Hamamuki \*

Faculty of Education and Integrated Arts and Sciences,  
Waseda University

## 1 序

古典的な等高面法では、 $\mathbf{R}^n$  内の部分集合 (多くの場合は超曲面) として与えられる界面  $\Gamma(t)$  の動きを、 $\Gamma(t)$  をある補助関数  $w(x, t)$  のゼロ等高面、

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid w(x, t) = 0\} \quad (1.1)$$

として表し、対応する  $w$  に関する偏微分方程式の初期値問題を解くことで求める。ここで  $t \in [0, T)$  は時刻、 $x \in \mathbf{R}^n$  は空間を表す変数である。本稿では、この初期値問題がハミルトン・ヤコビ方程式、

$$\partial_t w(x, t) + H(x, \nabla w(x, t)) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, T) \quad (1.2)$$

に初期条件、

$$w(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n$$

が付いたものとして与えられる場合を考える。ここで  $H$  は幾何的 (後の (H1) を参照) なハミルトニアンであり、 $\nabla w = (\partial_{x_i} w)_{i=1}^n$  は空間変数  $x$  に関する  $w$  の勾配を表す。また初期データの  $u_0$  は  $\mathbf{R}^n$  上の有界一様連続関数、つまり  $u_0 \in BUC(\mathbf{R}^n)$  であるとする。方程式 (1.2) はしばしば等高面方程式と呼ばれる。

数学的には界面運動の良い計算手法を与える等高面法であるが、計算機を用いた数値計算では、界面を等高面法では正確に求められない場合がある。時間が経つにつれて (1.2) の解  $w$  の傾き  $|\nabla w|$  が小さくなると、ゼロ等高面を正確に取り出せず、計算機で求めた界面が肥大しうるのである。この問題を解決するために、本稿では、

$$\partial_t u(x, t) + H(x, \nabla u(x, t)) = u(x, t)G(x, \nabla u(x, t)) \quad (1.3)$$

の形の修正等高面方程式を導入する。そして右辺の  $G$  を適当に定義したときに、(1.3) の解  $u$  が (1.2) の解  $w$  と同じゼロ等高面を与え、かつ  $u$  の傾きがゼロ等高面付近で時間大域的に保たれることを示す。なお本稿において、修正前の元の等高面方程式 (1.2) に対しては未知関数として  $w$  を、修正後の等高面方程式 (1.3) に対しては未知関数として  $u$  を以降用いる。

---

\*E-mail: n.hamamuki@kurenai.waseda.jp

方程式 (1.2) や (1.3) は非線形方程式であるので、解概念として粘性解([3]) を用いる。そして解の傾きが保たれるという主結果を、(1.3) の粘性解  $u$  と界面への符号付き距離関数  $d$  に対して比較定理を適用することで確立する。ここで符号付き距離関数は、

$$d(x, t) = \begin{cases} \text{dist}(x, \Gamma(t)) & \text{if } u(x, t) \geq 0, \\ -\text{dist}(x, \Gamma(t)) & \text{if } u(x, t) < 0 \end{cases}$$

で与えられる関数である。つまり界面  $\Gamma(t)$  の「内」と「外」で符号の付け方の異なる距離関数である。ただし上の式で  $\text{dist}(x, \Gamma(t)) = \inf\{|x - y| \mid y \in \Gamma(t)\}$  である。この距離関数は、アイコナル方程式、

$$|\nabla d(x, t)| = 1 \quad (1.4)$$

の適当な意味での解となっていることが知られている。例えば、 $d$  はほとんど至る所で微分可能で、微分可能な点で (1.4) を満たす。さらに粘性解の意味、そして滑らかな界面の付近では古典的な意味でも (1.4) の解となっている。それ故、傾きが 1 であるこの距離関数  $d$  を用いて、(1.3) の解  $u$  の傾きを保存させるという発想は自然である。

修正方程式 (1.3) の  $G$  を定めるために、 $d$  に対する時間発展型の方程式を考える。もし界面が十分滑らかであるなら、 $d$  は (1.2) の左辺の  $H$  の第 1 成分  $x$  を  $x - d(x, t)\nabla d(x, t)$  で置き換えた方程式、つまり、

$$\partial_t d(x, t) + H(x - d(x, t)\nabla d(x, t), \nabla d(x, t)) = 0$$

を満たす。すると、 $H$  の第 1 変数に関して 1 次のテイラー近似 (線形近似) をすることで、誤差付きではあるが (1.3) の形をした方程式が得られる。関数  $G$  はこのテイラー近似に基づいて定義される。主結果として次のことが分かる：初期条件の  $u_0$  は、初期界面  $\Gamma(0)$  の付近で符号付き距離関数  $d(\cdot, 0)$  に等しいとする。また界面運動  $\{\Gamma(t)\}_{0 \leq t < T}$  は十分滑らかであるとする。このとき、各  $\varepsilon > 0$  に対してある定数  $\rho(\varepsilon) > 0$  が存在して、(1.3) の初期値問題の粘性解  $u$  は評価式、

$$\begin{cases} e^{-\varepsilon t} d(x, t) \leq u(x, t) \leq e^{\varepsilon t} d(x, t) & \text{if } 0 \leq d(x, t) \leq \rho(\varepsilon), \\ e^{\varepsilon t} d(x, t) \leq u(x, t) \leq e^{-\varepsilon t} d(x, t) & \text{if } -\rho(\varepsilon) \leq d(x, t) \leq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

を満たす。距離関数  $d$  の傾きは 1 であり、かつ  $\varepsilon$  が十分小さいとき  $e^{\pm \varepsilon t} \approx 1$  なので、この (1.5) の意味で  $u$  の傾きは界面付近で 1 に保たれている。

等高面法についての研究で、解の傾きに着目したものはほとんど無い。論文 [8] では、ハミルトニアン  $H$  が凸な場合に解の傾きの下からの評価が与えられている。ただ、方程式を修正して良い解を得ようとしている本研究とは目的としているところは異なる。

解の傾きを保証するための方程式の修正は、Roisman によっても輸送方程式、

$$\partial_t w(x, t) + \langle X(x), \nabla w(x, t) \rangle = 0 \quad (1.6)$$

に対して既に提案されている。ここで  $X: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  は与えられたベクトル場であり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbf{R}^n$  の通常のユークリッド内積を表す。彼が [9] において提案した修正輸送方程式は、

$$\partial_t u(x, t) + \langle X(x), \nabla u(x, t) \rangle = u(x, t) \frac{\langle X'(x) \nabla u(x, t), \nabla u(x, t) \rangle}{|\nabla u(x, t)|^2} \quad (1.7)$$

の形である。ここで  $X'(x)$  は  $X(x) = (X_i(x))_{i=1}^n$  のヤコビ行列、つまり  $X'(x) = (\partial_{x_j} X_i(x))_{i,j}$  を表す。この修正方程式は、 $u$  を (1.3) の滑らかな解としたときに、ベクトル場  $X$  の定める

流れに沿ってゼロ等高面上で初期時刻の傾きが保たれるように、つまり流れに沿った  $|\nabla u|^2$  の微分が 0 となるように  $G$  を取ることで導出されている。しかし Roisman による議論は、滑らかな解の存在を仮定しているという意味で形式的であり、また右辺に特異性が現れるなどの問題がある。さらに特性曲線の方法に基づくため、一般の非線形な方程式 (1.2) への拡張は自明でない。実は、本研究の主結果 (定理 4.7) においては、関数  $G = G(x, p)$  は連続であり、かつ  $p = 0$  の近傍を除いて (1.7) の右辺に現れる関数と一致していることが分かる。従って Roisman の手法のある意味での正当化と、特異性の回避、さらには方程式の一般化が達成されている。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 章では粘性解の概念を導入し、その基本的性質を述べる。また等高面法について、例を交えつつより詳しく説明する。その後第 3 章で、修正方程式 (1.3) の解のゼロ等高面が元の方程式 (1.2) の解のゼロ等高面と一致することを示し、第 4 章で符号付き距離関数の満たす方程式に基づき  $G$  を定めた上で、(1.3) の解の傾きがゼロ等高面付近で実際に保たれていることを証明する。

なお本稿の内容は、著者の博士論文 [6, Chapter 4] に基づいている。

## 2 準備

本章ではまず粘性解の概念を導入し、その重要な性質である比較定理について述べる。さらに界面の発展方程式からの等高面方程式の導出について触れ、具体例と共に、その粘性解に対する基本的結果を述べる。粘性解理論に関する基礎的事項は [1, 3] や [5, Section 2, 3], その等高面法への応用については [5, Section 4] などを参照のこと。

### 2.1 粘性解

時間発展型の一般の 1 階方程式,

$$\partial_t u(x, t) + F(x, t, u(x, t), \nabla u(x, t)) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, T) \quad (2.1)$$

を考える。ここで  $F : \mathbf{R}^n \times (0, T) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  は連続であるとする。また簡単のため、解の候補となる関数  $u$  はその定義域上で有界であることを常に仮定する。

**定義 2.1** (粘性解). 上半連続 (resp. 下半連続) な関数  $u : \mathbf{R}^n \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  が (2.1) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) であるとは、点  $(z, s) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  と試験関数  $\phi \in C^1(\mathbf{R}^n \times (0, T))$  であって、 $u - \phi$  が  $(z, s)$  で最大 (resp. 最小) を取っているようなものに対して、不等式、

$$\partial_t \phi(z, s) + F(z, s, u(z, s), \nabla \phi(z, s)) \leq 0 \quad (\text{resp. } \geq 0)$$

が常に成り立つときを言う。また  $u$  が粘性劣解かつ粘性優解のとき粘性解という。

**注意 2.2.** (1)  $u \in C^1(\mathbf{R}^n \times (0, T))$  とすると、 $u$  が古典的な意味での劣解 (古典劣解), つまり,

$$\partial_t u(x, t) + F(x, t, u(x, t), \nabla u(x, t)) \leq 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, T)$$

であることと、 $u$  が粘性劣解であることは同値である。実際  $u$  が古典劣解ならば、点  $(z, s)$  における試験関数  $\phi$  に対して、 $\partial_t u(z, s) = \partial_t \phi(z, s)$  かつ  $\nabla u(z, s) = \nabla \phi(z, s)$  なので粘性劣解であることが分かる。逆に  $u$  が粘性劣解ならば、試験関数  $\phi$  を  $u$  自身として取ることで古典劣解であることが出る。

(2) 定義 2.1 中の「最大」と「最小」は、それぞれ「極大」と「極小」で置き換えても定義としては同値である。証明には 1 の分割が使われる ([1, Appendix A.1, pp.229–230]).

次に (1.3) の粘性劣解と粘性優解に対する比較定理を述べよう。 ( $G \equiv 0$  の場合として (1.2) も含まれる。 ) この比較定理から特に解の一意性が従う。関数  $H, G: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  に対しては以下を仮定する。

- (CP) (i) 広義単調増加な関数  $\omega_1, \omega_2 \in C([0, \infty))$  で  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$  を満たすものが存在して、  $|H(x, p) - H(x, q)| \leq \omega_1(|p - q|)$  かつ  $|H(x, p) - H(y, p)| \leq \omega_2((1 + |p|)|x - y|)$  が全ての  $x, y, p, q \in \mathbf{R}^n$  に対して成り立つ；
- (ii)  $G$  は (i) を満たし、かつ  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  上で有界である。

以降ずっと (CP) は仮定する。  $\|G\| := \sup_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |G| < \infty$  と定めておく。

**定理 2.3 (比較定理).**  $u, v: \mathbf{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  とし、この定義域上で  $u$  は上半連続、 $v$  は下半連続とする。  $u$  と  $v$  がそれぞれ (1.3) の粘性劣解と粘性優解で、 $\mathbf{R}^n$  上で  $u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0)$  ならば、 $\mathbf{R}^n \times (0, T)$  上で  $u \leq v$  となる。

なお粘性解の存在を示すにはペロンの方法 ([1, Section 7, pp.82–86], [3, Section 4], [5, Section 2.4]) が有力だが、ここでは省略する。

## 2.2 等高面法

まずは等高面法の考え方、特に界面の発展方程式から等高面方程式 (1.2) を導く方法について簡単に紹介しよう。界面  $\Gamma(t)$  の運動が、

$$V = f(x, \vec{n}) \quad \text{on } \Gamma(t) \quad (2.2)$$

という方程式で記述される場合を考える。ここで  $x$  は界面上の点、 $\vec{n}$  は  $x$  における界面の単位法線ベクトル、 $V$  は  $x$  における  $\vec{n}$  方向の界面の法速度を表している。(2.2) を 1 階の界面の発展方程式と呼ぶ。界面  $\Gamma(t)$  を補助関数  $w = w(x, t)$  を用いて (1.1) の様に表示したとき、 $V$  と  $\vec{n}$  は、

$$V = \frac{\partial_t w(x, t)}{|\nabla w(x, t)|}, \quad \vec{n} = -\frac{\nabla w(x, t)}{|\nabla w(x, t)|}$$

で与えられる。(ただし  $\vec{n}$  の向きを考慮した符号の調整は必要である。) 従ってこれらを (2.2) に代入することで、 $w$  を未知関数とする偏微分方程式、

$$\partial_t w(x, t) = |\nabla w(x, t)| f\left(x, -\frac{\nabla w(x, t)}{|\nabla w(x, t)|}\right) \quad (2.3)$$

を得る。これが (2.2) で記述される界面運動に対応した等高面方程式である。

**例 2.4.** 界面の発展方程式と対応する等高面方程式の例をいくつか挙げておく。

- (1) **輸送方程式.** 界面が与えられたベクトル場  $X: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  の法線成分を速度に持って運動しているとする。すなわち界面の発展方程式が  $V = \langle X(x), \vec{n} \rangle$  であるとする。このときの等高面方程式は輸送方程式 (1.6) である。

- (2) アイコナル方程式.  $V = c(x)$  という界面の発展方程式を考える. これは界面の法速度が場所のみに依存して決まっている場合である. 対応する等高面方程式は,

$$\partial_t w(x, t) - c(x)|\nabla w(x, t)| = 0 \quad (2.4)$$

となり, これは (時間発展型の) アイコナル方程式である.

- (3) 平均曲率流方程式 ([2, 4]). 界面の法速度が平均曲率  $\kappa$  に等しい, すなわち  $V = \kappa$  であるとする. 平均曲率  $\kappa$  は等高面法の補助関数  $w$  によって  $\kappa = \operatorname{div}(\nabla w/|\nabla w|)$  と表されるので ([5, Section 1.4]), 等高面方程式は,

$$\partial_t w(x, t) - |\nabla w(x, t)| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla w(x, t)}{|\nabla w(x, t)|} \right) = 0$$

となる. これは 2 階の退化放物型方程式である. 本研究では今のところ 1 階方程式 (1.2) のみを考えており, このような 2 階方程式は枠組みに入らないが, 等高面法の有名な応用例としてここでは紹介した.

簡単な 1 次元の方程式を用いて, 実際にゼロ等高面付近で (1.2) の解の傾きが小さくなっていく例と, (1.3) の形の修正方程式を考えることによる解決法を見てみることにする.

例 2.5. 空間次元  $n$  を 1 として, 方程式,

$$\partial_t w(x, t) + x \partial_x w(x, t) = 0 \quad (2.5)$$

に初期値  $u_0(x)$  を付けて考える. これは輸送方程式 (1.6) で  $X(x) = x$  と取った場合である. つまり界面の運動方程式は  $V = x$  で, 数直線上の場所  $x \in \mathbf{R}$  にいる点  $x$  が, 速度  $x$  で動いていくような界面の発展現象を記述している. (2.5) は簡単な線形方程式であるので, 解は  $w(x, t) = u_0(e^{-t}x)$  と書き表すことができる.  $w(\cdot, t)$  のグラフは初期値  $u_0$  を  $x$  軸方向に  $e^t$  倍だけ拡大したものである. 時間が経つにつれてその傾きは指数的にどんどん小さくなっていく. このことは, 実際に  $w$  を  $x$  で微分すれば  $\partial_x w(x, t) = e^{-t}u'_0(e^{-t}x)$  となることから分かる. そこで (2.5) の代わりに,

$$\partial_t u(x, t) + x \partial_x u(x, t) = u(x, t) \quad (2.6)$$

という方程式を, 同じ初期値  $u_0$  の下で考える. これは (2.5) の右辺を 0 から未知関数に置き換えた修正方程式である. (2.6) に対してもやはり解は明示的に書いて, 今度は  $u(x, t) = e^t u_0(e^{-t}x)$  となる. この解  $u$  についてまず,  $u$  は  $w$  と同じゼロ等高面を与えることが簡単に分かる. さらに  $u$  の傾きは時間大域的に小さくならない. というのも,  $u(\cdot, t)$  のグラフは  $u_0$  を縦横両方に  $e^t$  倍拡大したものであるからである. 実際  $\partial_x u(x, t) = u'_0(e^{-t}x)$  であるので,  $w$  と異なり傾きは指数減衰しない.

この観察から, (2.5) の代わりに (2.6) を解けば, 同じゼロ等高面を取り出せてかつ, ゼロ等高面の付近で傾きが小さくならない「良い」解が得られることが分かる. このような修正法をより一般の次元で, そしてより一般の方程式 (1.2) に対して提示することが本研究の目的である.

なお Roisman の修正方程式 (1.7) を 1 次元の場合に書くと, 右辺の特異性は消えて,

$$\partial_t u(x, t) + X(x) \partial_x u(x, t) = X'(x) u(x, t)$$

となる. 実は (2.6) は, この式で  $X(x) = x$  と取ったものに他ならない.

(1.2) の粘性解の性質を調べよう。等高面法を考える際、[2] で導入された幾何性と呼ばれる  $H$  に対する以下の仮定は基本的である。

(H1) 全ての  $(x, p) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  と  $\lambda > 0$  に対して  $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$  が成り立つ。

実際、方程式 (2.3) はいつも幾何的である。なお (H1) の下では、全ての  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して  $H(x, 0) = 0$  となることに注意しておく。幾何的な方程式の解が持つ重要な性質として、次の従属変数変換不変性がある。これは比較定理と共に、等高面法で得られる界面運動の一意性 (注意 2.8) を示すのに大事な役割を果たす。

**定理 2.6** (従属変数変換不変性). (H1) を仮定する。  $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を広義単調増加な上半連続 (resp. 下半連続) 関数とする。もし  $w$  が (1.2) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) ならば、合成関数  $\theta \circ w$  も (1.2) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) となる。

証明の概略。  $\theta$  も  $w$  も滑らかであるとすれば、  $H$  の幾何性と  $\theta' \geq 0$  であることを用いて、

$$\begin{aligned} \partial_t(\theta \circ w) + H(x, \nabla(\theta \circ w)) &= \theta'(w) \partial_t w + H(x, \theta'(w) \nabla w) \\ &= \theta'(w) \{ \partial_t w + H(x, \nabla w) \} \leq 0. \end{aligned}$$

従って結論が従う。  $w$  が滑らかでない場合は、上記の計算を粘性解の定義の試験関数  $\phi$  に対して行えばよい。  $\theta$  が滑らかでない場合は、滑らかな関数で近似してその極限を取る。このとき粘性解の安定性を用いる。詳しい証明は [5, Theorem 4.2.1] を参照。  $\square$

定理 2.6 の系を一つ述べておく。集合  $S$  上の特性関数  $\chi_S$  を、  $z \in S$  のとき  $\chi_S(z) = 1$ ,  $z \notin S$  のとき  $\chi_S(z) = 0$  で定める。また以降、集合  $\{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T) \mid w(x, t) \geq 0\}$  など、混乱の無い限り  $\{w \geq 0\}$  などと簡単に記すことにする。

**系 2.7.** (H1) を仮定する。  $w$  を (1.2) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) とするとき、特性関数  $\chi_{\{w \geq 0\}}$  (resp.  $\chi_{\{w > 0\}}$ ) も (1.2) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) となる。

証明。  $\chi_{\{w \geq 0\}} = \chi_{[0, \infty)} \circ w$ ,  $\chi_{\{w > 0\}} = \chi_{(0, \infty)} \circ w$  と書けることによる。  $\square$

**注意 2.8.** (1.2) の初期値問題を解いて得られる界面運動  $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$  は初期値の取り方に依らず一意に決まる。すなわち  $u_{01}, u_{02} \in BUC(\mathbf{R}^n)$  を  $\{u_{01} = 0\} = \{u_{02} = 0\}$  かつ  $\{\pm u_{01} > 0\} = \{\pm u_{02} > 0\}$  を満たす初期値とすると、  $u_{01}$  と  $u_{02}$  をそれぞれ初期値に持つ解  $w_1$  と  $w_2$  に対しても、  $\{w_1 = 0\} = \{w_2 = 0\}$  かつ  $\{\pm w_1 > 0\} = \{\pm w_2 > 0\}$  となる。詳しくは [5, Section 4.2.3, 4.2.4] などを参照のこと。

### 3 ゼロ等高面の保存

本章では、元の等高面方程式 (1.2) の解  $w$  のゼロ等高面と、修正等高面方程式 (1.3) の解  $u$  のゼロ等高面とが一致することを証明する。修正方程式の  $G$  に対しては (CP) の連続性と有界性のみを仮定し、特別な取り方はここではまだ要求しない。なお (1.3) で  $u = 0$  とすると右辺は 0 となり、方程式は (1.2) と一致する。従って少なくとも形式的には、ゼロ等高面上で解も一致していることが期待できるが、もちろん粘性解の意味で厳密に示す必要がある。

**定理 3.1** (ゼロ等高面の保存). (H1) を仮定する。  $w$  と  $u$  をそれぞれ、 (1.2) と (1.3) の同じ初期値  $u_0 \in BUC(\mathbf{R}^n)$  を持つ粘性解とする。このとき  $\{w = 0\} = \{u = 0\}$  かつ  $\{\pm w > 0\} = \{\pm u > 0\}$  となる。

証明. 1. 関数  $v^\pm : \mathbf{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  を,

$$v^\pm(x, t) := \begin{cases} e^{\pm \|G\|t} w(x, t) & \text{if } w(x, t) \geq 0, \\ e^{\mp \|G\|t} w(x, t) & \text{if } w(x, t) < 0 \end{cases}$$

として定める. すると  $v^+$  と  $v^-$  はそれぞれ, (1.3) の粘性優解と粘性劣解となる. とりあえずこれを認めれば, 初期時刻においては  $v^\pm(\cdot, 0) = u_0$  であるから, 比較定理により  $\mathbf{R}^n \times [0, T)$  上で  $v^- \leq u \leq v^+$  が分かる. 特に  $\{v^- > 0\} \subset \{u > 0\} \subset \{v^+ > 0\}$  であるが,  $v^\pm$  の定義より  $\{v^\pm > 0\} = \{w > 0\}$  なので  $\{w > 0\} = \{u > 0\}$  が分かる. 同様に  $\{w < 0\} = \{u < 0\}$  となり, 従って  $\{w = 0\} = \{u = 0\}$  である.

2.  $v^+$  が (1.3) の粘性優解であることを示そう. 同様の方法で  $v^-$  が (1.3) の粘性劣解であることも示せるので, こちらは省略する.  $w$  が滑らかであるとして実際に  $v^+$  を微分してみると,  $\{w > 0\}$  上では,

$$\partial_t v^+ + H(x, \nabla v^+) = \|G\| e^{\|G\|t} w + e^{\|G\|t} \partial_t w + H(x, e^{\|G\|t} \nabla w).$$

ここで  $H$  の幾何性 (H1) と  $w$  が (1.2) の解であることを用いると,

$$\partial_t v^+ + H(x, \nabla v^+) = \|G\| v^+ + e^{\|G\|t} \{\partial_t w + H(x, \nabla w)\} = \|G\| v^+ + 0 \geq v^+ G(x, \nabla v^+).$$

これより  $v^+$  が (1.3) の古典的な意味での優解, 従って粘性優解であることが分かる.  $w$  が滑らかとは限らない一般の場合は, 試験関数に対して同様の計算をすることで  $v^+$  が粘性優解であることが確かめられる. 同様の議論が  $\{w < 0\}$  上でもできるので, これで  $v^+$  が  $\{w > 0\} \cup \{w < 0\}$  上で粘性優解であることが分かった.

3. 次に  $v^+$  が  $\{w = 0\}$  上でも (1.3) の粘性優解であることを示す. 粘性解の定義に従い,  $w(z, s) = 0$  なる点  $(z, s) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  と,  $\min_{\mathbf{R}^n \times (0, T)} (v^+ - \phi) = (v^+ - \phi)(z, s)$  を満たす試験関数  $\phi \in C^1(\mathbf{R}^n \times (0, T))$  を取る. 示すべきは,

$$\partial_t \phi(z, s) + H(z, \nabla \phi(z, s)) \geq w(z, s) G(z, \nabla \phi(z, s))$$

である. ただし  $w(z, s) = 0$  より, 右辺は今 0 であることに注意する.

特性関数  $\chi_{\{w>0\}}(x, t)$  を考える. すると  $v^+(z, s) = \chi_{\{w>0\}}(z, s) = 0$  かつ, 点  $(z, s)$  のある近傍  $U$  上で  $v^+ \leq \chi_{\{w>0\}}$  より,  $\min_U (\chi_{\{w>0\}} - \phi) = (\chi_{\{w>0\}} - \phi)(z, s)$  であることが分かる. 系 2.7 より  $\chi_{\{w>0\}}$  は (1.2) の粘性優解であるから,  $\partial_t \phi(z, s) + H(z, \nabla \phi(z, s)) \geq 0$  となり示すべき不等式を得る. 以上で  $v^+$  が (1.3) の粘性優解であることが分かった.  $\square$

定理 3.1 の簡単な帰結として, 幾何的でない方程式 (1.3) に対しても, その解のゼロ等高面が初期値の取り方に依存せず決まることが注意 2.8 より分かる.

## 4 符号付き距離関数との比較

本章で調べる界面運動  $\{\Gamma(t)\}_{0 \leq t < T}$  に対する基本的な仮定をまず記しておく.

- (I)  $\Gamma(t)$  は  $\mathbf{R}^n$  の部分集合で,  $t \in [0, T)$  について一様に有界である;
- (II) (1.2) の粘性解  $w : \mathbf{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  が存在して,  $\Gamma(t) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid w(x, t) = 0\}$  が全ての  $t \in [0, T)$  で成り立つ.

(I) の有界性は本質的ではなく、後に現れる  $H$  の  $x$  成分に関する微分可能性の仮定をより弱い形で述べるためのみに使われる。有界でない場合を考えたいときは、後の仮定 (H2) の (4.4) が  $K = \mathbf{R}^n$  で成り立つことを仮定すればよい。

さて符号付き距離関数を定義するために、界面の「内」と「外」を決めておく必要がある。(II) の粘性解  $w$  に対し、

$$D(t) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid w(x, t) > 0\}$$

と定める。そして界面  $\Gamma(t)$  に対する符号付き距離関数  $d: \mathbf{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  を、 $D(t)$  上で正、 $D(t)$  の外で非正となるように定める。つまり、

$$d(x, t) := \begin{cases} \text{dist}(x, \Gamma(t)) & \text{if } x \in D(t), \\ -\text{dist}(x, \Gamma(t)) & \text{if } x \in \mathbf{R}^n \setminus D(t) \end{cases}$$

と定義する。

この符号付き距離関数  $d$  が満たす方程式を考え、それを基に修正方程式 (1.3) 右辺の  $G$  を定めよう。本稿では、界面付近で  $d$  が滑らかであることを仮定する。それ故に界面運動が滑らかな場合に話は限られる。滑らかでない界面を調べることももちろん重要であるが、今後の研究課題である。滑らかさに関する仮定は以下のものである。

(SM) ある定数  $\delta > 0$  が存在して、

(i)  $\{|d| < \delta\}$  上で  $d$  は  $C^1$  級；

(ii)  $|d(x, t)| < \delta$  を満たす各  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  に対して、 $\bar{x} := x - d(x, t)\nabla d(x, t)$  とおくと  $\bar{x} \in \Gamma(t)$  であり、 $\partial_t d(x, t) = \partial_t d(\bar{x}, t)$  かつ  $\nabla d(x, t) = \nabla d(\bar{x}, t)$  である。

(ii) の  $\bar{x}$  は  $x$  から  $\Gamma(t)$  に降ろした垂線の足を表しており、この二つの点における  $d$  の微分係数が等しいことを言っている。(SM) は  $\Gamma := \bigcup_{0 \leq t < T} (\Gamma(t) \times \{t\})$  が十分滑らかなら、例えば  $\Gamma$  が  $C^{2,1}$  級ならば成り立つ ([7, Chapter 5])。ここでは界面の滑らかさを仮定する代わりに、実際に後に必要になる (SM) だけを仮定した。

**補題 4.1.** (SM) を仮定する。このとき、

$$\partial_t d(x, t) + H(x - d(x, t)\nabla d(x, t), \nabla d(x, t)) = 0 \quad (4.1)$$

が、 $|d(x, t)| < \delta$  を満たす全ての  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  に対して成り立つ。

証明.  $\bar{x} := x - d(x, t)\nabla d(x, t)$  とおく。示すべきは  $\partial_t d(\bar{x}, t) + H(\bar{x}, \nabla d(\bar{x}, t)) = 0$  である。特性関数  $\chi_{\{w>0\}}$  を考える。ただし  $w$  は (II) に現れる (1.2) の解とする。系 2.7 より  $\chi_{\{w>0\}}$  は (1.2) の粘性優解である。今  $\bar{x} \in \Gamma(t)$  であるから、点  $(\bar{x}, t)$  においては  $\chi_{\{w>0\}}(\bar{x}, t) = d(\bar{x}, t) = 0$ 。また  $(\bar{x}, t)$  のある近傍  $U$  上で  $d \leq \chi_{\{w>0\}}$  かつ  $d \in C^1(U)$  なので、 $d$  を粘性優解の定義に現れる試験関数とみなすことができる。故に  $\partial_t d(\bar{x}, t) + H(\bar{x}, \nabla d(\bar{x}, t)) \geq 0$  となる。逆向きの不等号に関しても同様に、粘性劣解である特性関数  $\chi_{\{w \geq 0\}} - 1$  を考えればよい。□

(4.1) が符号付き距離関数  $d$  の満たす方程式であるが、これを書き直してみよう。まず左辺を (1.2) や (1.3) に合わせて、

$$\partial_t d + H(x, \nabla d) = H(x, \nabla d) - H(x - d\nabla d, \nabla d) \quad (4.2)$$

と変形する。このとき右辺は、 $H$  の  $x$  成分に関するずれを表している。そこで1次のテイラー近似 (線形近似) を右辺に施す。  $H$  が  $x$  成分について滑らかであれば、 $|d|$  が小さいとき、

$$\partial_t d + H(x, \nabla d) = d \langle \nabla_x H(x, \nabla d), \nabla d \rangle + o(d) \quad (4.3)$$

となる。すると右辺は、誤差項の  $o(d)$  を無視すれば、未知関数  $d$  と、 $(x, \nabla d)$  の関数との積、すなわち修正方程式 (1.3) の形をしている。従って、内積  $\langle \nabla_x H(x, p), p \rangle$  を基に  $G$  を定義すれば、(1.3) の解は界面近くで符号付き距離関数に近い、よって傾きが1に近いことが期待できる。

ここで関数  $H$  と  $G$  に対する正確な仮定を述べよう。まず  $H$  の  $x$  成分に関する微分可能性については次の (H2) を仮定する。

(H2) 各コンパクト集合  $K \subset \mathbf{R}^n$  に対し、

$$\lim_{\mathbf{R} \ni h \rightarrow 0} \sup_{\substack{(x,p) \in K \times \mathbf{R}^n \\ |p|=1}} \frac{|H(x, p) - H(x - hp, p) - h \langle \nabla_x H(x, p), p \rangle|}{|h|} = 0. \quad (4.4)$$

後のために、(4.4) を次の形で同値に書き直しておく。

$$\text{各 } r > 0 \text{ に対してある } a(r) > 0 \text{ が存在して、} |h| < a(r), (x, p) \in K \times \mathbf{R}^n \text{ かつ } |p| = 1 \text{ ならば常に、} |H(x, p) - H(x - hp, p) - h \langle \nabla_x H(x, p), p \rangle| \leq r|h| \text{ となる。} \quad (4.5)$$

なお上記の関数  $a : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  は、集合  $K$  に依存して決まっている。

次に、修正方程式 (1.3) に現れる  $G : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  に対する仮定を述べる。展開式 (4.3) の第1項の内積  $\langle \nabla_x H(x, p), p \rangle$  として  $G(x, p)$  を決めるのが自然であるが、このとき  $G$  は有界にならないので、この内積を修正したものでもって  $G$  を定める。具体的には、内積に現れる  $p$  を正規化して、つまり  $p/|p|$  で置き換えて  $G$  を定める。ただしこのままでは特異性が発生するので、 $p = 0$  の近傍は除いておく。

(G) ある  $\sigma \in (0, 1)$  が存在して、

$$G(x, p) = \left\langle \nabla_x H \left( x, \frac{p}{|p|} \right), \frac{p}{|p|} \right\rangle$$

が、全ての  $(x, p) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  で  $|p| \geq \sigma$  なるものに対して成り立つ。

この (G) の下で、 $G$  は固定した各  $p \in \mathbf{R}^n$  の方向に沿って定数となるような関数である。なお  $|p| < \sigma$  のときのことは (G) では何も要求していないが、(CP) の連続性を満たしていることは最低限仮定する。

さて、符号付き距離関数  $d$  自身は、テイラー展開に伴う誤差項  $o(d)$  の影響で、一般には修正方程式 (1.3) の劣解にも優解にもならない。しかし評価式 (1.5) に現れる  $d$  を修正した関数、

$$d^+(x, t) := e^{\varepsilon t} d(x, t), \quad d^-(x, t) := e^{-\varepsilon t} d(x, t) \quad (4.6)$$

は、ゼロ等高面の付近で劣解・優解となることが分かる。

**命題 4.2** (ゼロ等高面付近の劣解・優解). (SM), (H1), (H2), (G) を仮定する。  $0 < \varepsilon \leq -(\log \sigma)/T$  とし、関数  $d^\pm$  を (4.6) で定める。  $K \subset \mathbf{R}^n$  を  $\{d(x, t) < \delta\} \subset K$  を満たすコン

パクト集合とし、これに対して (4.5) に現れる関数  $a$  を取る.  $r > 0$  を  $a(r) \leq \delta$  を満たす定数とする. このとき,  $|d(x, t)| < a(r)$  を満たす全ての  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  に対して,

$$|\partial_t d^+(x, t) + H(x, \nabla d^+(x, t)) - d^+(x, t)\{G(x, \nabla d^+(x, t)) + \varepsilon\}| \leq r|d^+(x, t)|, \quad (4.7)$$

$$|\partial_t d^-(x, t) + H(x, \nabla d^-(x, t)) - d^-(x, t)\{G(x, \nabla d^-(x, t)) - \varepsilon\}| \leq r|d^-(x, t)| \quad (4.8)$$

が成り立つ. 特に  $r \leq \varepsilon$  ならば,  $d^+$  は (1.3) の  $\{0 \leq d(x, t) < a(r)\}$  上 (resp.  $\{-a(r) < d(x, t) \leq 0\}$  上) での古典優解 (resp. 古典劣解) であり,  $d^-$  は (1.3) の  $\{0 \leq d(x, t) < a(r)\}$  上 (resp.  $\{-a(r) < d(x, t) \leq 0\}$  上) での古典劣解 (resp. 古典優解) となる.

証明. 以下  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  を  $|d(x, t)| < a(r)$  を満たす点とする. 仮定より  $a(r) \leq \delta$  であるから,  $d$  は  $(x, t)$  で微分可能である. まず (H1) と (4.2) より,

$$\begin{aligned} \partial_t d^\pm + H(x, \nabla d^\pm) &= \pm \varepsilon d^\pm + e^{\pm \varepsilon t} \partial_t d + H(x, e^{\pm \varepsilon t} \nabla d) \\ &= \pm \varepsilon d^\pm + e^{\pm \varepsilon t} \{\partial_t d + H(x, \nabla d)\} \\ &= \pm \varepsilon d^\pm + e^{\pm \varepsilon t} \{H(x, \nabla d) - H(x - d \nabla d, \nabla d)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

が分かる. 次に  $\varepsilon$  の選び方より  $e^{-\varepsilon t} > e^{-\varepsilon T} \geq \sigma$  であるから,  $|\nabla d| = 1$  にも注意すると, (G) より,

$$G(x, \nabla d^\pm) = G(x, e^{\pm \varepsilon t} \nabla d) = \langle \nabla_x H(x, \nabla d), \nabla d \rangle. \quad (4.10)$$

(4.5) で  $h = d(x, t)$  かつ  $p = \nabla d(x, t)$  と取ると,

$$|H(x, \nabla d) - H(x - d \nabla d, \nabla d) - d \langle \nabla_x H(x, \nabla d), \nabla d \rangle| \leq r|d|$$

であり, (4.10) をこの左辺に適用してさらに両辺に  $e^{\pm \varepsilon t}$  を掛けると,

$$|e^{\pm \varepsilon t} \{H(x, p) - H(x - d \nabla d, \nabla d)\} - d^\pm G(x, \nabla d^\pm)| \leq r|d^\pm| \quad (4.11)$$

を得る. 最後に (4.9) と (4.11) とを合わせることで, (4.7) と (4.8) の両方を得る. 残りの  $r \leq \varepsilon$  の場合の主張は, (4.7) と (4.8) より直ちに従う.  $\square$

評価式 (1.5) を比較定理から導くためには, 関数  $d^\pm$  をゼロ等高面から離れたところで修正して,  $\mathbf{R}^n \times (0, T)$  全体の上での劣解・優解へと拡張しておく必要がある. この修正と拡張のために, 二つの滑らかな関数の最小として与えられる関数に対する試験関数の微分についてまずは調べる.

**補題 4.3.**  $f_1, f_2 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  とし,  $g(x) := \min\{f_1(x), f_2(x)\}$  と定める.  $z \in \mathbf{R}^n$  を  $f_1(z) = f_2(z)$  を満たす点とし,  $z$  のある開近傍  $V$  で  $f_1, f_2 \in C^1(V)$  であることを仮定する. このとき滑らかな関数  $\phi \in C^1(V)$  が  $\max_V (g - \phi) = (g - \phi)(z)$  を満たすならば, ある  $\lambda \in [0, 1]$  が存在して  $\nabla \phi(z) = \lambda \nabla f_1(z) + (1 - \lambda) \nabla f_2(z)$  となる.

証明. 1. まず  $f_2 \equiv 0$  のときを考える.  $\nabla \phi(z) = 0$  であれば  $\lambda = 0$  と取って主張は自明なので, 以下  $\nabla \phi(z) \neq 0$  と仮定する. さらに  $\phi(z) = 0$ ,  $\partial_{x_n} \phi(z) > 0$  と仮定しても一般性を失わない. このとき,

$$\partial_{x_n} f_1(z) \geq \partial_{x_n} \phi(z) (> 0) \quad (4.12)$$

が成り立っていることを示そう.  $z$  を  $z = (z', z_n) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$  と表す.  $\partial_{x_n} \phi(z) > 0$  なので, 十分小さい全ての  $h > 0$  に対して  $\phi(z', z_n - h) < 0$  が成り立つ. 従って  $0 \leq$

$(g - \phi)(z', z_n - h) > g(z', z_n - h)$ . これより  $g(z', z_n - h) = f_1(z', z_n - h)$  であることが分かるので,

$$\begin{aligned}\partial_{x_n} f_1(z) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{f_1(z', z_n - h) - f_1(z)}{-h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{g(z', z_n - h) - g(z)}{-h} \\ &\geq \lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(z', z_n - h) - \phi(z)}{-h} = \partial_{x_n} \phi(z).\end{aligned}$$

よって (4.12) が成り立つ.

2. この (4.12) と陰関数定理より, ゼロ等高面の  $\{f_1(x) = 0\}$  と  $\{\phi(x) = 0\}$  は,  $z'$  のある開近傍  $U$  上で関数のグラフとして表される.  $\{f_1(x) = 0\}$  を  $x_n = h(x')$ ,  $\{\phi(x) = 0\}$  を  $x_n = \psi(x')$  と表すことにする. ただし  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$  である. このとき,  $U$  上で  $h \geq \psi$  が成り立つ. 実際,  $h(x') < \psi(x')$  がある  $x' \in U$  で成り立っているとすると,  $f_1(x', h(x')) = 0$  かつ  $\phi(x', h(x')) < \phi(x', \psi(x')) = 0$  となるが, これは  $f_1 - \phi$  が  $z$  で最大値 0 を取っていることに矛盾する.  $U$  上で  $h \geq \psi$  であることと  $h(z') = \psi(z')$  より,

$$\nabla_{x'} h(z') = \nabla_{x'} \psi(z') \quad (4.13)$$

が成り立つ. 一方  $h$  と  $\psi$  の微分は, 陰関数定理より,

$$\nabla_{x'} h(z') = -\frac{\nabla_{x'} f_1(z)}{\partial_{x_n} f_1(z)}, \quad \nabla_{x'} \psi(z') = -\frac{\nabla_{x'} \phi(z)}{\partial_{x_n} \phi(z)} \quad (4.14)$$

で与えられる. (4.14) を (4.13) に代入して  $\lambda := \partial_{x_n} \phi(z) / \partial_{x_n} f_1(z)$  とおくと,

$$\nabla_{x'} \phi(z) = \frac{\partial_{x_n} \phi(z)}{\partial_{x_n} f_1(z)} \nabla_{x'} f_1(z) = \lambda \nabla_{x'} f_1(z)$$

を得る.  $\lambda$  の定義と (4.12) より,  $\partial_{x_n} \phi(z) = \lambda \partial_{x_n} f_1(z)$  かつ  $0 < \lambda \leq 1$  であることも直ちにわかる. これで  $f_2 \equiv 0$  のときに題意は示された.

3. 一般の 0 とは限らない  $f_2$  に対しては, 関数  $(g - f_2)(x) = \min\{(f_1 - f_2)(x), 0\}$  を考える.  $\max_V \{(g - f_2) - (\phi - f_2)\} = \{(g - f_2) - (\phi - f_2)\}(z)$  なので,  $f_2 \equiv 0$  の場合の結果から, ある  $\lambda \in [0, 1]$  が存在して  $\nabla(\phi - f_2)(z) = \lambda \nabla(f_1 - f_2)(z)$ , つまり  $\nabla \phi(z) = \lambda \nabla f_1(z) + (1 - \lambda) \nabla f_2(z)$  となる.  $\square$

次に (1.3) の自明な劣解と優解を準備しておく.

**補題 4.4.** (H1) を仮定する.  $c > 0$ ,  $M \geq \|G\|$  とし  $w^\pm(x, t) = ce^{\pm Mt}$  と定義する. このとき  $w^+$  (resp.  $w^-$ ) は (1.3) の古典優解 (resp. 古典劣解) である. また  $-w^+$  (resp.  $-w^-$ ) は (1.3) の古典劣解 (resp. 古典優解) である.

**証明.** (H1) より  $H(x, 0) = 0$  であることに注意すると,

$$\partial_t w^+ + H(x, \nabla w^+) = Mce^{Mt} + H(x, 0) = Mw^+ + 0 \geq w^+ G(x, \nabla w^+).$$

従って  $w^+$  は優解である. 残りの主張も同様の計算で分かる.  $\square$

これらの補題を用いて、ゼロ等高面付近での劣解・優解であった  $d^+$  と  $d^-$  を、全空間での劣解・優解に拡張しよう。まず  $c, L > 0$  とし、

$$V(x, t) := \frac{3L}{c} e^{\|G\|t} d^+(x, t)$$

と定める。さらに  $M > 0$  として、関数  $u^\pm : \mathbf{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  を、

$$u^+(x, t) = \begin{cases} \min \{ \max \{ d^+(x, t), V(x, t) - L \}, L e^{\|G\|t} \} & \text{if } d(x, t) \geq 0, \\ \max \{ d^-(x, t), -c e^{-Mt} \} & \text{if } d(x, t) < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

と

$$u^-(x, t) = \begin{cases} \min \{ d^-(x, t), c e^{-Mt} \} & \text{if } d(x, t) \geq 0, \\ \max \{ \min \{ d^+(x, t), V(x, t) + L \}, -L e^{\|G\|t} \} & \text{if } d(x, t) < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

で定義する。これらの関数のグラフについては図 1 を参照。

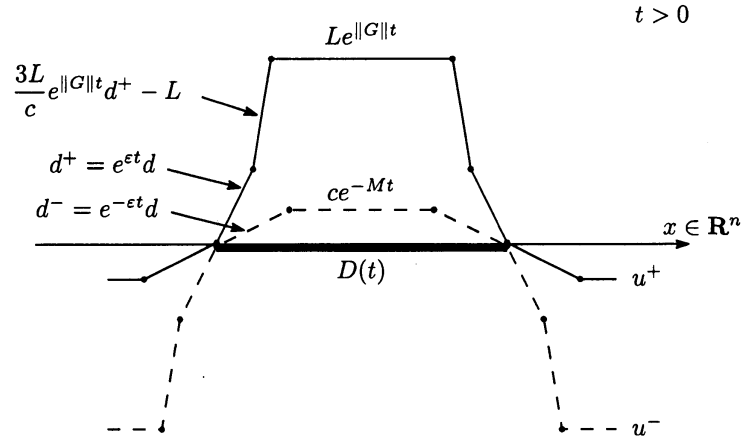


図 1:  $u^+$  と  $u^-$  の定義.

**命題 4.5 (劣解・優解の拡張).** (SM), (H1), (H2), (G) を仮定する.  $\varepsilon$  と  $a$  を命題 4.2 の仮定のように取り、定数  $c, L, M > 0$  は、

$$0 < c \leq \min\{a(\varepsilon), \delta\}, \quad L \geq c, \quad M \geq \frac{2\|G\|}{1 - \sigma e^{\varepsilon T}}, \quad M > \varepsilon$$

を満たすとする。このとき  $u^+$  と  $u^-$  はそれぞれ、(1.3) の  $\mathbf{R}^n \times (0, T)$  上の粘性優解と粘性劣解となる。

**証明.** 1. 以下では、 $u^+$  と  $u^-$  がそれぞれ、(1.3) の  $\{d > 0\}$  上での粘性優解と粘性劣解であることを示す。 $\{d < 0\}$  上でも同様の議論で示せる。 $\{d = 0\}$  上では、定理 3.1 での証明と同様に特性関数の  $\chi_{\{w > 0\}}$  や  $\chi_{\{w \geq 0\}}$  を考えればよい。

まず,  $\{d \geq 0\}$  上で  $u^+$  と  $u^-$  は次のように表される.

$$u^+(x, t) = \begin{cases} d^+(x, t) & \text{if } 0 \leq d^+(x, t) \leq cL/(3Le^{\|G\|t} - c), \\ V(x, t) - L & \text{if } cL/(3Le^{\|G\|t} - c) \leq d^+(x, t) \leq c(1 + e^{-\|G\|t})/3, \\ Le^{\|G\|t} & \text{if } c(1 + e^{-\|G\|t})/3 \leq d^+(x, t), \end{cases}$$

そして

$$u^-(x, t) = \begin{cases} d^-(x, t) & \text{if } 0 \leq d^-(x, t) \leq ce^{-Mt}, \\ ce^{-Mt} & \text{if } ce^{-Mt} \leq d^-(x, t). \end{cases}$$

$0 \leq d^+(x, t) \leq c(1 + e^{-\|G\|t})/3$  のとき,

$$0 \leq d(x, t) \leq \frac{c(1 + e^{-\|G\|t})e^{-\epsilon t}}{3} \leq \frac{2}{3}c \leq \frac{2}{3}\min\{a(\epsilon), \delta\}$$

であるので,  $d^+$  は  $\{0 \leq d^+ \leq c(1 + e^{-\|G\|t})/3\}$  上で (1.3) の優解となる. また  $0 \leq d^-(x, t) \leq ce^{-Mt}$  のときは,  $M > \epsilon$  であることを用いて,

$$0 \leq d(x, t) \leq ce^{(\epsilon-M)t} < c \leq \min\{a(\epsilon), \delta\}.$$

従って  $d^-$  は  $\{0 \leq d^- \leq ce^{-Mt}\}$  上で (1.3) の劣解となる.

2.  $u^-$  が  $\{0 < d^-\}$  上で (1.3) の粘性劣解であることを示そう. 第1段で述べたように,  $u^- = d^-$  は  $\{0 < d^- < ce^{-Mt}\}$  上で劣解である. また,

$$M \geq \frac{2\|G\|}{1 - \sigma e^{\epsilon T}} > 2\|G\| \geq \|G\|$$

であるので, 補題 4.4 より  $u(x, t) = ce^{-Mt}$  は  $\{ce^{-Mt} < d^-\}$  上で劣解となる. 残っているのは,  $u^-$  が  $\{d^- = ce^{-Mt}\}$  上で粘性劣解であることの証明である.  $(z, s) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  を  $d^-(z, s) = ce^{-Ms} =: \alpha$  を満たす点とし,  $\phi \in C^1(\mathbf{R}^n \times (0, T))$  に対して  $\max_{\mathbf{R}^n \times (0, T)}(u^- - \phi) = (u^- - \phi)(z, s)$  となっているとする. 示すべきは,

$$I := \partial_t \phi(z, s) + H(z, \nabla \phi(z, s)) - \alpha G(z, \nabla \phi(z, s)) \leq 0$$

である. 補題 4.3 を  $g = u^-$  として用いると, ある  $\lambda \in [0, 1]$  が存在して,

$$\begin{aligned} \nabla \phi(z, s) &= \lambda \nabla d^-(z, s) + (1 - \lambda) \nabla(ce^{-Mt})(z, s) \\ &= \lambda \nabla d^-(z, s), \\ \partial_t \phi(z, s) &= \lambda \partial_t d^-(z, s) + (1 - \lambda) \partial_t(ce^{-Mt})(z, s) \\ &= \lambda \partial_t d^-(z, s) - M(1 - \lambda)\alpha. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} I &= \lambda \partial_t d^- - M(1 - \lambda)\alpha + H(z, \lambda \nabla d^-) - \alpha G(z, \lambda \nabla d^-) \\ &= \lambda \{\partial_t d^- + H(z, \nabla d^-)\} - \alpha G(z, \lambda \nabla d^-) - M(1 - \lambda)\alpha \\ &\leq \lambda \alpha G(z, \nabla d^-) - \alpha G(z, \lambda \nabla d^-) - M(1 - \lambda)\alpha \end{aligned}$$

となる. ここで  $|\lambda \nabla d^-(z, s)|$  の大きさに応じて場合分けをする.

**Case 1:**  $|\lambda \nabla d^-(z, s)| \geq \sigma$  のとき. この場合, (G) より  $G(z, \lambda \nabla d^-(z, s)) = G(z, \nabla d^-(z, s))$  である. 故に,

$$\begin{aligned} I/\alpha &= \lambda G(z, \nabla d^-) - G(z, \nabla d^-) - M(1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)\{-G(z, \nabla d^-) - M\}. \end{aligned}$$

今  $M \geq \|G\|$  であったので,  $I \leq 0$  が分かる.

**Case 2:**  $|\lambda \nabla d^-(z, s)| < \sigma$  のとき. まず,

$$\lambda < \sigma/|\nabla d^-(z, s)| = \sigma e^{\varepsilon s} < \sigma e^{\varepsilon T}$$

という評価が成り立つ. これを用いると,

$$I/\alpha \leq \lambda \|G\| + \|G\| - M(1 - \sigma e^{\varepsilon T}) \leq 2\|G\| - M(1 - \sigma e^{\varepsilon T})$$

となる. 最右辺は  $M$  の選び方より 0 以下であるので, 従って  $I \leq 0$ . これで  $u^-$  が  $\{0 < d^-\}$  で粘性劣解であることの証明が完成した.

3. 次に  $u^+$  が  $\{0 < d^+\}$  上で (1.3) の粘性優解であることを証明しよう. 最初に,  $K \geq 1$  かつ  $\eta > 0$  とするとき, 関数,

$$V_0(x, t) = Ke^{\|G\|t} d^+(x, t) - \eta$$

が  $\{V_0 \geq 0\} \cap \{d < c\}$  上で (1.3) の古典優解であることを示す.  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  を  $V_0(x, t) \geq 0$  かつ  $d(x, t) < c$  を満たす点とする. このとき  $|\nabla V_0| = Ke^{\|G\|t} |\nabla d^+| \geq |\nabla d^+| \geq 1$  であるので, (G) より  $G(x, \nabla V_0) = G(x, \nabla d^+)$  となる.  $d^+$  が優解であることを用いると,

$$\begin{aligned} \partial_t V_0 + H(x, \nabla V_0) &= K\{\|G\|e^{\|G\|t} d^+ + e^{\|G\|t} \partial_t d^+\} + H(x, Ke^{\|G\|t} \nabla d^+) \\ &= \|G\|(V_0 + \eta) + Ke^{\|G\|t} \{\partial_t d^+ + H(x, \nabla d^+)\} \\ &\geq \|G\|(V_0 + \eta) + Ke^{\|G\|t} d^+ G(x, \nabla d^+) \\ &= (V_0 + \eta)\{\|G\| + G(x, \nabla V_0)\}. \end{aligned}$$

$\|G\| + G \geq 0$  かつ  $V_0(x, t) \geq 0$  であるので, 結局,

$$\partial_t V_0 + H(x, \nabla V_0) \geq V_0\{\|G\| + G(x, \nabla V_0)\} \geq V_0 G(x, \nabla V_0)$$

となり, これで  $V_0$  が (1.3) の優解であることが分かった. 以降,  $K = 3L/c$  かつ  $\eta = L$  と取る. このとき  $V_0(x, t) = V(x, t) - L$  である.

4.  $u^+$  が  $\{0 < d^+\}$  上で (1.3) の粘性優解であることを示したいわけだが,  $d^+$ ,  $V_0$  そして  $Le^{\|G\|t}$  が優解であることは既に示したので,  $\{d^+ = V_0\}$  上と  $\{V_0 = Le^{\|G\|t}\}$  上でのみ  $u^+$  を調べればよい.

まず  $\{V_0 = Le^{\|G\|t}\}$  上の点  $(z, s)$  に対しては,  $\min_{\mathbf{R}^n \times (0, T)}(u - \phi) = (u - \phi)(z, s)$  なる関数  $\phi \in C^1(\mathbf{R}^n \times (0, T))$  が存在しないことが簡単に分かる. 従って  $u^+$  は粘性優解である. 次に  $(z, s) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  を  $d^+(z, s) = V_0(z, s) =: \beta$  を満たす点とする. さらに  $\phi \in C^1(\mathbf{R}^n \times (0, T))$  は  $\min_{\mathbf{R}^n \times (0, T)}(u - \phi) = (u - \phi)(z, s)$  を満たすとする. 目標となる不等式は,

$$J := \partial_t \phi(z, s) + H(z, \nabla \phi(z, s)) - \beta G(z, \nabla \phi(z, s)) \geq 0$$

である。劣解の場合の第2段と同様、補題 4.3 よりある  $\lambda \in [0, 1]$  が存在して、

$$\begin{aligned}\nabla\phi(z, s) &= \lambda\nabla d^+(z, s) + (1 - \lambda)\nabla V_0(z, s) \\ &= \lambda\nabla d^+(z, s) + (1 - \lambda)Ke^{\|G\|s}\nabla d^+(z, s), \\ \partial_t\phi(z, s) &= \lambda\partial_t d^+(z, s) + (1 - \lambda)\partial_t V_0(z, s) \\ &= \lambda\partial_t d^+(z, s) + (1 - \lambda)\{\|G\|(\beta + \eta) + Ke^{\|G\|s}\partial_t d^+(z, s)\}\end{aligned}$$

となる。  $\lambda' := \lambda + (1 - \lambda)Ke^{\|G\|s}$  と定めると、

$$\begin{aligned}\nabla\phi(z, s) &= \lambda'\nabla d^+(z, s), \\ \partial_t\phi(z, s) &= \lambda'\partial_t d^+(z, s) + (1 - \lambda)\|G\|(\beta + \eta)\end{aligned}$$

と表される。また  $\lambda' \geq \lambda + (1 - \lambda) = 1$  であるから、  $G(z, \lambda'\nabla d^+) = G(z, \nabla d^+)$  となる。これより、

$$\begin{aligned}J &= \lambda'\partial_t d^+ + (1 - \lambda)\|G\|(\beta + \eta) + H(z, \lambda'\nabla d^+) - \beta G(z, \lambda'\nabla d^+) \\ &= \lambda'\{\partial_t d^+ + H(z, \nabla d^+)\} + (1 - \lambda)\|G\|(\beta + \eta) - \beta G(z, \nabla d^+) \\ &\geq \lambda'\beta G(z, \nabla d^+) + (1 - \lambda)\|G\|(\beta + \eta) - \beta G(z, \nabla d^+) \\ &= -(1 - \lambda')\beta G(z, \nabla d^+) + (1 - \lambda)\|G\|(\beta + \eta).\end{aligned}$$

ここで  $\lambda'$  と  $\beta$  の定義より、

$$-(1 - \lambda')\beta = (1 - \lambda)(Ke^{\|G\|s}\beta - \beta) = (1 - \lambda)\eta$$

なので、

$$\begin{aligned}J &\geq (1 - \lambda)\eta G(z, \nabla d^+) + (1 - \lambda)\|G\|(\beta + \eta) \\ &= (1 - \lambda)[\eta\{G(z, \nabla d^+) + \|G\|\} + \beta\|G\|] \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

以上で  $u^+$  が  $\{d^+ = V_0\}$  上で粘性優解であることが分かり、証明が完了した。  $\square$

注意 4.6. 定数  $\rho_0 > 0$  を、

$$\rho_0 := \min \left\{ \frac{cLe^{-\varepsilon T}}{3Le^{\|G\|T} - c}, ce^{(\varepsilon - M)T} \right\} \quad (4.17)$$

で定める。このとき  $u^+$  と  $u^-$  の定義より、

$$(u^+(x, t), u^-(x, t)) = \begin{cases} (e^{\varepsilon t}d(x, t), e^{-\varepsilon t}d(x, t)) & \text{if } 0 \leq d(x, t) \leq \rho_0, \\ (e^{-\varepsilon t}d(x, t), e^{\varepsilon t}d(x, t)) & \text{if } -\rho_0 \leq d(x, t) \leq 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

となる。

主定理として以上のことをまとめよう。初期値の  $u_0$  は  $\mathbf{R}^n$  上の有界一様連続な関数であって、初期界面  $\Gamma(0)$  の付近で符号付き関数に等しいとする。すなわち、ある  $m > 0$  が存在して、

$$\begin{cases} u_0(x) = d_0(x) & \text{if } |d_0(x)| \leq m, \\ u_0(x) \geq m & \text{if } d_0(x) > m, \\ u_0(x) \leq m & \text{if } d_0(x) < -m \end{cases} \quad (4.19)$$

であると仮定する。ここで  $d_0(x) := d(x, 0)$  である。

定理 4.7 (ゼロ等高面付近での符号付き距離関数との比較). (SM), (H1), (H2), (G) を仮定する.  $u$  を (1.3) の粘性解とし, 初期値  $u_0 \in BUC(\mathbf{R}^n)$  は, ある  $m > 0$  に対し (4.19) を満たすと仮定する. このとき, 各  $\varepsilon > 0$  に対してある  $\rho(\varepsilon) > 0$  が存在して,

$$\begin{cases} e^{-\varepsilon t} d(x, t) \leq u(x, t) \leq e^{\varepsilon t} d(x, t) & \text{if } 0 \leq d(x, t) \leq \rho(\varepsilon), \\ e^{\varepsilon t} d(x, t) \leq u(x, t) \leq e^{-\varepsilon t} d(x, t) & \text{if } -\rho(\varepsilon) \leq d(x, t) \leq 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

証明.  $\varepsilon > 0$  を固定する. 十分小さい  $\varepsilon$  に対して定理を示せばよいので,  $\varepsilon \leq -(\log \sigma)/T$  と仮定してよい. ここで  $\sigma$  は (G) の定数である. コンパクト集合  $K \subset \mathbf{R}^n$  を  $\{|d(x, t)| < \delta\} \subset K$  となるように取り, この  $K$  に対して (4.5) の関数  $a$  を取る. ただし  $\delta$  は (SM) の定数である. 次に,

$$c := \min\{\delta, a(\varepsilon), m\}, \quad L := \|u_0\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |u_0(x)|, \quad M := \max\left\{\frac{2\|G\|}{1 - \sigma e^{\varepsilon T}}, \frac{3\varepsilon}{2}\right\}$$

と定め, これらの定数を用いて関数  $u^\pm : \mathbf{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  を (4.15) と (4.16) の様に定義する. このとき,

$$u^-(x, 0) \leq u_0(x) \leq u^+(x, 0) \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^n \quad (4.20)$$

が成り立っていることを示そう.  $x \in \mathbf{R}^n$  を  $d_0(x) \geq 0$  を満たす点とする. このとき,

$$\begin{aligned} u^+(x, 0) &= \min\left\{\max\left\{d_0(x), \frac{3\|u_0\|}{c}d_0(x) - \|u_0\|\right\}, \|u_0\|\right\}, \\ u^-(x, 0) &= \min\{d_0(x), c\} \end{aligned}$$

である.  $0 \leq d_0(x) \leq m$  のとき, (4.19) より  $u_0(x) = d_0(x)$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned} u^+(x, 0) &\geq \min\{d_0(x), \|u_0\|\} = \min\{u_0(x), \|u_0\|\} = u_0(x), \\ u^-(x, 0) &\leq \min\{d_0(x), m\} = d_0(x) = u_0(x) \end{aligned}$$

となる. 一方  $d_0(x) > m$  のときは,

$$\begin{aligned} u^+(x, 0) &\geq \min\left\{\frac{3\|u_0\|}{c}d_0(x) - \|u_0\|, \|u_0\|\right\} \geq \min\{2\|u_0\|, \|u_0\|\} \geq u_0(x) \\ u^-(x, 0) &\leq \min\{d_0(x), m\} = m \leq u_0(x). \end{aligned}$$

従って (4.20) が  $\{d_0 \geq 0\}$  上で示された.  $\{d_0 < 0\}$  上での証明も同様である. この (4.20) と比較定理より,

$$u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t) \quad \text{for all } (x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T). \quad (4.21)$$

今の定数  $c, L, M$  によって  $\rho_0$  を (4.17) で定め,  $\rho(\varepsilon) := \rho_0$  と取る. 最後に (4.18) と (4.21) を合わせて定理の結論を得る.  $\square$

なお (SM) の下では, (1.3) の解  $u$  は界面上で微分可能である.

系 4.8. 定理 4.7 と同じ仮定をおく.  $(z, s) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  を  $d(z, s) = 0$  を満たす点とする.

$$(1) \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (z,s) \\ d(x,t) \neq 0}} \frac{u(x,t)}{d(x,t)} = 1 \text{ である.}$$

$$(2) u \text{ は } (z, s) \text{ で微分可能であり, } \partial_t u(z, s) = \partial_t d(z, s), \nabla u(z, s) = \nabla d(z, s) \text{ である.}$$

証明. (1) のみ証明しておく. 各  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$e^{-\varepsilon t} = \frac{e^{-\varepsilon t} d(x, t)}{d(x, t)} \leq \frac{u(x, t)}{d(x, t)} \leq \frac{e^{\varepsilon t} d(x, t)}{d(x, t)} = e^{\varepsilon t}$$

が  $0 < |d(x, t)| \leq \rho_0(\varepsilon)$  を満たす全ての  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$  に対して成り立つ. 従って,

$$e^{-\varepsilon s} \leq \liminf_{\substack{(x,t) \rightarrow (z,s) \\ d(x,t) \neq 0}} \frac{u(x,t)}{d(x,t)} \leq \limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (z,s) \\ d(x,t) \neq 0}} \frac{u(x,t)}{d(x,t)} \leq e^{\varepsilon s}$$

であり,  $\varepsilon > 0$  は任意であるから結論が従う.  $\square$

例 4.9. 仮定 (G) で定まる  $G$  の具体例を最後に挙げておく.

- (1) 輸送方程式 (1.6) を考える. 対応するハミルトニアンは  $H(x, p) = \langle X(x), p \rangle$  であり,  $x$  についての勾配は  $\nabla_x H(x, p) = X'(x)p$  となるので,  $G$  は,

$$G(x, p) = \left\langle \nabla_x H \left( x, \frac{p}{|p|} \right), \frac{p}{|p|} \right\rangle = \left\langle X'(x) \frac{p}{|p|}, \frac{p}{|p|} \right\rangle \quad \text{if } |p| \geq \sigma.$$

これは第 1 章で述べた Roisman による修正方程式 (1.7) と同じである.

- (2) アイコナル方程式 (2.4) を考える. 対応するハミルトニアンは  $H(x, p) = c(x)|p|$  で,  $\nabla_x H(x, p) = \nabla c(x)|p|$  となるので,

$$G(x, p) = \left\langle \nabla_x H \left( x, \frac{p}{|p|} \right), \frac{p}{|p|} \right\rangle = \left\langle \nabla c(x), \frac{p}{|p|} \right\rangle \quad \text{if } |p| \geq \sigma$$

となる. すなわち修正方程式は,  $|\nabla u(x, t)| \geq \sigma$  のときに,

$$\partial_t u(x, t) - c(x)|\nabla u(x, t)| = u(x, t) \left\langle \nabla c(x), \frac{\nabla u(x, t)}{|\nabla u(x, t)|} \right\rangle$$

の形となる.

## 参考文献

- [1] Y. Achdou, G. Barles, H. Ishii, G. L. Litvinov, Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, Lecture Notes from the CIME Summer School held in Cetraro, August 29–September 3, 2011, Edited by Paola Loreti and Nicoletta Anna Tchou, Lecture Notes in Mathematics, 2074, Fondazione CIME/CIME Foundation Subseries, Springer, Heidelberg; Fondazione C.I.M.E., Florence, 2013, xvi+301 pp.

- [2] Y.-G. Chen, Y. Giga, S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, *J. Differential Geom.* 33 (1991), no. 3, 749–786.
- [3] M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 27 (1992), no. 1, 1–67.
- [4] L. C. Evans, J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature. I, *J. Differential Geom.* 33 (1991), no. 3, 635–681.
- [5] Y. Giga, Surface evolution equations: A level set approach, *Monographs in Mathematics*, 99, Birkhauser Verlag, Basel, 2006, xii+264 pp.
- [6] N. Hamamuki, A few topics related to maximum principles, Ph.D. thesis, University of Tokyo (2013).
- [7] M. Kimura, Geometry of hypersurfaces and moving hypersurfaces in  $\mathbf{R}^m$  for the study of moving boundary problems, *Topics in mathematical modeling*, 39–93, Jindřich Nečas Cent. Math. Model. Lect. Notes, 4, Matfyzpress, Prague, 2008.
- [8] O. Ley, Lower-bound gradient estimates for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications to the regularity of propagating fronts, *Adv. Differential Equations* 6 (2001), no. 5, 547–576.
- [9] I. Roisman, Implicit surface method for numerical simulations of moving interfaces, Lecture at the International Workshop on “Transport Processes at Fluidic Interfaces from Experimental to Mathematical Analysis” in Aachen (Germany), December 5–7, 2011.