

Character degrees and class lengths in p -blocks of some finite groups

Akihiko Hida (Faculty of Education, Saitama University)

飛田明彦（埼玉大学教育学部）

Masao Kiyota (Tokyo Medical and Dental University)

清田正夫（東京医科歯科大学名誉教授）

1 序文

G を有限群とし、 G の既約指標全体を $\text{Irr}(G)$ 、共役類全体を $\text{Cl}(G)$ で表す。 $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k\}$ 、 $\text{Cl}(G) = \{K_1, K_2, \dots, K_k\}$ とおく。オハイオ州立大学の原田耕一郎氏は [6] において次の予想を提出した。

$$(H) \quad h(G) = \frac{|K_1||K_2|\cdots|K_k|}{\chi_1(1)\chi_2(1)\cdots\chi_k(1)} \text{ とおくと、} h(G) \text{ は整数か？}$$

$$(\text{例 } 1) \quad G \text{ がアーベル群の時、} h(G) = \frac{1 \cdot 1 \cdots 1}{1 \cdot 1 \cdots 1} = 1.$$

$$(\text{例 } 2) \quad G = \text{SL}(2, 3) \text{ の時、} h(G) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 64.$$

熊本大学の千吉良直紀氏により、ATLAS 単純群をはじめとする非常に多くの群について (H) が成立することが確かめられている。また、対称群 S_n と交代群 A_n について (H) が成立することが証明されている ([8] を参照)。(H) が成立するための十分条件はいくつか得られているものの ([7], [9] などを参照)、現在のところ、(H) の一般的解明には至っていない。本稿では、予想 (H) と関連する問題を有限群のブロック理論を通して考察する。

2 ブロック細分

以下、序文の記号をそのまま用いる。標数 $p > 0$ の代数的閉体 F 上の群環 FG の直既約直和因子イデアル B を G の p ブロックと呼ぶ。 G の p ブロック全体を $\text{Bl}(G)$ で表す。 $\text{Irr}(G)$ の各元 χ は唯一つの $B \in \text{Bl}(G)$ に属している。 B に属す $\text{Irr}(G)$ の元全体を $\text{Irr}(B)$ で表し、 $k(B) = |\text{Irr}(B)|$ とおく。こうして G の既約指標のブロック分割

$$\text{Irr}(G) = \bigcup_{B \in \text{Bl}(G)} \text{Irr}(B)$$

が得られる。同様に G の共役類のブロック分割

$$\text{Cl}(G) = \bigcup_{B \in \text{Bl}(G)} \text{Cl}(B)$$

も定義される。([3] p240 参照。) ここで、 $\text{Cl}(B)$ は一意的に定まるとは限らないが、 $|\text{Cl}(B)| = k(B)$ は成立する。原田予想 (H) のブロック細分として次の予想を立てる。

$$(HB) \quad h(B) = \frac{\prod_{K \in \text{Cl}(B)} |K|}{\prod_{\chi \in \text{Irr}(B)} \chi(1)} \text{ とおくと、} h(B) \text{ は } p \text{ 局所整数か?}$$

$h(G) = \prod_{B \in \text{Bl}(G)} h(B)$ なので、任意の素数 p 、任意の p ブロック $B \in \text{Bl}(G)$ について (HB) が成立すれば、(H) が成立する。

[2], [11] の結果を用いて、次が得られた。

定理 1 B が tame ブロックならば、(HB) が成立する。

ここで、 B が tame とは、 $p = 2$ かつ B の不足群 D が 2 面体群、準 2 面体群、一般四元数群のいずれかであること。不足群 D がアーベル群のときにも (HB) は成立する ([7]) ので定理 1 とあわせて、次が得られる。

定理 2 G のすべてのシロー部分群がアーベル群、2 面体群、準 2 面体群、一般四元数群のいずれかであるならば、(H) が成立する。

3 モジュラー版

原田予想 (H) やそのブロック細分 (HB) の p モジュラー版として次の問題が考えられる。 G の既約 Brauer 指標全体を $\text{IBr}(G)$ 、 G の p 正則共役類全体を $\text{Cl}_{p'}(G)$ とする。前節と同様にそれらは

$$\text{IBr}(G) = \bigcup_{B \in \text{Bl}(G)} \text{IBr}(B), \quad \text{Cl}_{p'}(G) = \bigcup_{B \in \text{Bl}(G)} \text{Cl}_{p'}(B)$$

とブロック分割されて、各ブロック B について $|\text{IBr}(B)| = |\text{Cl}_{p'}(B)|$ が成立する。以上の記号のもとで、原田予想のモジュラー類似 (HM) とそのブロック細分 (HMB) が次のように定式化される。

$$(HM) \quad hm(G) = \frac{\prod_{K \in \text{Cl}_{p'}(G)} |K|}{\prod_{\varphi \in \text{IBr}(G)} \varphi(1)} \text{ とおくと、 } hm(G) \text{ は } p \text{ 局所整数か?}$$

$$(HMB) \quad hm(B) = \frac{\prod_{K \in \text{Cl}_{p'}(B)} |K|}{\prod_{\varphi \in \text{IBr}(B)} \varphi(1)} \text{ とおくと、 } hm(B) \text{ は } p \text{ 局所整数か?}$$

(HMB) が成り立てば、当然、(HM) も成立する。4 節で述べる定理 5 から次の定理が得られる。

定理 3 G が p 可解群のとき、(HM) は成立する。また、 B が p 可解群 G のブロックのとき、(HMB) は成立する。

次に (HB) と (HMB) の関連を調べるため、それらを defect を用いて言い換える。自然数 n の p 成分を n_p で表す。 $\chi \in \text{Irr}(G)$ と $\varphi \in \text{IBr}(G)$ に対し、

$$|G|_p / \chi(1)_p = p^{d(\chi)}, \quad |G|_p / \varphi(1)_p = p^{d(\varphi)}$$

とおき、 $d(\chi)$, $d(\varphi)$ をそれぞれ χ , φ の defect という。 $d(\chi)$ は非負の整数であるが、 $d(\varphi)$ は負の整数となることもある。また $K \in \text{Cl}(G)$ に対し、代表元 $x \in K$ の中心群 $C_G(x)$ の p シロー群を K の不足群と呼び、 $D(K)$ で表す。 $D(K)$ は G 共役を除き一意的に定まる。 $|D(K)| = p^{d(K)}$ とおき、 K の defect $d(K)$ を定める。これらの術語を用

いると、(HB) と (HMB) はそれぞれ次のように言い換えられる。

$$(HB)' \quad \sum_{\chi \in \text{Irr}(B)} d(\chi) \geq \sum_{K \in \text{Cl}(B)} d(K) \quad \text{は成り立つか?}$$

$$(HMB)' \quad \sum_{\varphi \in \text{IBr}(B)} d(\varphi) \geq \sum_{K \in \text{Cl}_{p'}(B)} d(K) \quad \text{は成り立つか?}$$

上のふたつの不等式の関連を調べるため、もうひとつ術語を導入する。 G の p 元 x と $C_G(x)$ の p ブロック b_x の対 (x, b_x) を subsection と呼ぶ。 b_x が $b_x^G = B$ を満たすとき、 (x, b_x) を B subsection と呼ぶ。 B subsections 全体に G は共役で作用する。この作用の G 代表系を Γ と書く。 $(1, B) \in \Gamma$ に注意せよ。このとき、Brauer による等式

$$|\text{Irr}(B)| = \sum_{(x, b_x) \in \Gamma} |\text{IBr}(b_x)|$$

が成立する。この等式に defect による重みを付けた形の不等式

$$(*) \quad \sum_{\chi \in \text{Irr}(B)} d(\chi) \geq \sum_{(x, b_x) \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \text{IBr}(b_x)} d(\varphi)$$

を考える。この不等式が成り立てば、(HB) と (HMB) を結びつけることができる。

定理 4 不等式 (*) が成り立つ場合には、(HMB) が成り立てば (HB) も成り立つ。

当初は不等式 (*) が常に成立するのではないかと期待していたが、その後反例が見つかり、(*) は一般には成り立たないことが分かった。(*) の反例として、(1) Tits 単純群 $G = {}^2F_4(2)'$ 、 B は主 3 ブロック、(2) $G = SL(2, 3)$ 、 B は主 2 ブロックが挙げられる。一方、不足群がアーベル群であるブロック B では (*) が成立する。そこで、次の問題を提出する。

問題 ブロック B が不等式 (*) を満たすための条件を求めよ。

4 ヴァーテックス版

この節では、加群の vertex 理論と予想 (HMB) との関連を考察する。前節までの記号をそのまま使う。 H を G の部分群、 V を FG 加群、 W を FH 加群とすると、 V_H, W^G によって、それぞれ、 H への制限加群、 G への誘導加群を表す。直既約 FG 加群 V に対して、 V が $(V_Q)^G$ の直和因子となるような極小な部分群 Q を V の vertex と呼び、 $\text{vx}(V)$ で表す。 $\text{vx}(V)$ は G の p 部分群で、 G 共役を除き一意的に定まる。Green の定理 [4] により、 $|G : \text{vx}(V)|_p$ は V の次元 $\dim(V)$ を割りきる。

さて、 $\varphi \in \text{IBr}(G)$ に対応する単純 FG 加群を S とすると、 $|G : \text{vx}(S)|_p$ は $\varphi(1) = \dim(S)$ を割り切る。ここで、 $|\text{vx}(S)| = p^{v(\varphi)}$ とおくと、 $d(\varphi)$ の定義から、不等式 $v(\varphi) \geq d(\varphi)$ が成り立つ。よって、もし (HMB) が、言い換えれば、(HMB)' が成り立つならば、次の (VB) が成立しなくてはならない。

$$(VB) \quad \sum_{\varphi \in \text{IBr}(B)} v(\varphi) \geq \sum_{K \in \text{Cl}_{p'}(B)} d(K) \quad \text{は成り立つか?}$$

一般には (VB) は (HMB) よりかなり弱い予想であり、次の定理から実際に成立することがわかる。

定理 5 ([10]) $\text{IBr}(B) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$, $\text{Cl}_{p'}(B) = \{K_1, \dots, K_l\}$ とおき、 φ_i に対応する単純 FG 加群を S_i とする。このとき、添え字をうまく書き換えると、

$$\text{vx}(S_i) \geq_G D(K_i) \quad (i = 1, \dots, l)$$

が成立する。特に、任意の i について $v(\varphi_i) \geq d(K_i)$ が成立し、したがって、(VB) が成り立つ。

G が p 可解群のときには、Hamernik-Michler の定理 [5] より、任意の $\varphi \in \text{IBr}(G)$ に対して $v(\varphi) = d(\varphi)$ が成立し、したがって、定理 5 から (HMB) が成立する。(VB) の不等式の等号成立条件について次の問題が考えられている。

問題 次は同値か？

(1) (VB) の不等式で等号が成り立つ。

$$(2) |\mathrm{IBr}(B)| = 1$$

(2) から (1) は自明に成り立つ。また、 B が主ブロックのときや、 G が p 可解群の場合には (1) から (2) が導かれる。

直既約加群 V の次元 $\dim(V)$ の下限を与える Green の定理は次のように拡張されている。

定理 (Bessenrodt-Willems [1]) V を vertex Q を持つ直既約 FG 加群とする。 V の complexity を c 、 Q の p ランクを r とする。このとき、 $p^{r-c}|G : Q|_p$ は $\dim(V)$ を割りきる。

$c \leq r$ なので、Bessenrodt-Willems の定理は Green の定理を含んでいる。Green の定理と予想 (HMB) から予想 (VB) を導いたのと同様の議論で、Bessenrodt-Willems の定理を用いて、次の予想 (CB) が導出できる。

$$(CB) \quad \sum_{S \in \mathrm{IBR}(B)} (v(S) + c(S) - r(S)) \geq \sum_{K \in \mathrm{Cl}_{p'}(B)} d(K) \quad \text{は成り立つか?}$$

ここで、 $\mathrm{IBR}(B)$ は B に属する単純 FG 加群 S (の同型類) 全体の集合、 $c(S)$ は S の complexity、 $r(S)$ は $\mathrm{vx}(S)$ の p ランク、 $v(S)$ は $|\mathrm{vx}(S)| = p^{v(S)}$ とおいて定める。

(HMB) $\implies$ (CB) $\implies$ (VB) という論理関係があるが、(VB) と同様に (CB) も証明できる。

定理 6 ([10]) $\mathrm{IBR}(B) = \{S_1, \dots, S_l\}$, $\mathrm{Cl}_{p'}(B) = \{K_1, \dots, K_l\}$ とおき、添え字をうまく書き換えると、

$$v(S_i) + c(S_i) - r(S_i) \geq d(K_i) \quad (i = 1, \dots, l)$$

が成立する。特に、(CB) が成り立つ。

参考文献

- [1] C. Bessenrodt and W. Willems, Relations between complexity and modular invariants and consequences for p -soluble groups, *J. Algebra* 86 (1984), 445-456
- [2] R. Brauer, On 2-blocks with dihedral defect groups, *Symposia Mathematica* XIII(1974), 367-393
- [3] W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland, 1982
- [4] J. A. Green, On the indecomposable representations of a finite group, *Math. Z.* 70(1959), 430-445
- [5] W. Hamernik and G. Michler, On vertices of simple modules in p -solvable groups, *Math. Sem. Giessen* 121(1976), 147-162
- [6] K. Harada, Revisiting character theory of finite groups, *Bulletin of the Inst. Math. Academia Sinica (New Series)* 13(2018), 383-395
- [7] M. Kiyota, 原田予想 II とそのブロック分割, *数理解析研究所講究録* 2061 (2018), 56-60
- [8] A. Hida, Harada's conjecture on character degrees and class sizes— symmetric and alternating groups 一, *数理解析研究所講究録* 2086 (2018), 144-153
- [9] A. Hida and M. Kiyota, Character degree products and class length products of some finite groups, *数理解析研究所講究録掲載予定* (2019)
- [10] A. Hida and M. Kiyota, Lower defect groups and vertices of simple modules, preprint
- [11] J. B. Olsson, On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups, *J. Algebra* 36(1975), 212-241