

Fourier 変換と相互法則に関する 2, 3 の注意

名大理 久保田 富雄

Fourier 変換と相互法則との関係は、平方剰余の場合について古来有名であり、その際 e^{-x^2} という関数が重要な役割をするところが特に興味深い。それと類似の現象は、高次の相互法則についても存在するはずであり、それが単に相互法則という / 定理だけでなく、他の多くのことと関係するらしいことが、種々の根拠から推測される。ところで、この方向における本質的な発展を得るためには、数論の側からでなく、解析の側から問題に立ち向かい得る手段を見出すことがどうしても必要である。

この講演の目的は、以下仮に n 次の Fourier 変換とよぶものが、上にいうような問題に応用し得るらしいことを、特殊な例を通じて示すことにある。

H を $u = \begin{pmatrix} z & -\bar{v} \\ v & \bar{z} \end{pmatrix}$, ($z \in \mathbb{C}$, $v > 0$) の形の行列の集合とし、 u をまた (z, v) とも書く。 H はいわゆる上半空間であり、 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ について、 $\sigma u = (\tilde{a}u + \tilde{b})(\tilde{c}u + \tilde{d})$, (但し $w \in \mathbb{C}$ について $\tilde{w} = \begin{pmatrix} w & \\ & \bar{w} \end{pmatrix}$) とおけば、 $H = SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ である。一方 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ を Gauss 体、 $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ をその整

数環とする. $z \in \mathbb{C}$ について $e(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(z + \bar{z}))$ とおく

と, $e(z/2)$ について θ は self-dual である.

$f = f(u)$ を H 上の関数とするとき, n 次の Fourier 変換 $\mathcal{F}_n$:
 $\mathcal{F}_n f = g$ とは, 次の積分によって $f(u)$ に $g(u)$ を対応させる /
 変換をいう:

$$(\mathcal{F}_n) \quad \int_{\mathbb{C}} f\left(t^{\frac{n}{n-1}} u\right) e(tw/2) dV(t) = |u|^{-\frac{2(n-1)}{n}} g\left(w^{\frac{n}{n-1}} u^*\right).$$

ここで $u = (z, v)$ のとき $tu = (tz, |t|v)$ であり, $|u| = (z^2 + v^2)^{1/2}$,
 $u^* = (,^{-1})u$ である. $\mathcal{F}_n$ の逆はこれ自身である. $n=2$ のとき,
 $f(u) = \exp(\pi\sqrt{-1}(z + \bar{z})/2 - \pi v)$ とおけば, $\mathcal{F}_2 f = f$ であり,
 Poisson の公式から $\sum_{v \in \theta} f(v^2 u) = |u|^{-1} \sum_{v \in \theta} f(v^2 u^*)$ が得られ,
 これがテータ級数としての変換法則である.

Γ を $SL(2, \theta)$ の適当な合同部分群 Γ' と, $(,^{-1})$ との合成群
 とし, $(\frac{c}{d})$ を F の 4 乗剰余記号とすると, Γ の指標 χ は,
 $\chi(,^{-1}) = 1$, かつ $\sigma = (\frac{a}{c} \frac{b}{d}) \in \Gamma'$ について $d \neq 0$ か 0 かに
 従って $\chi(\sigma) = (\frac{c}{d})$ または 1 となるものが存在する. $u = (z, v)$
 について $v(u) = v$ と書き, また $\Gamma_\infty = \{\sigma \in \Gamma \mid c = 0\}$ とおいて,
 χ を含む Eisenstein 級数 $E(u, s) = \sum_{\sigma \in \Gamma} \chi(\sigma) v(\sigma u)^s$ を作る.
 このような関数は Γ の各 cusp について作れて, これらの s
 $= \frac{5}{4}$ における留数として得られる保型形式の全体 $\mathcal{H}$ について
 $0 < \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} < \infty$ がなりたつ. $\theta \in \mathcal{H}$ は $\theta(\sigma u) = \chi(\sigma) \theta(u)$, $(\sigma \in \Gamma)$;

という変換法則をもつが、もしこのような変換法則もこめて
 ④が直接解析的に構成できれば、相互法則が逆に証明される

それは χ という指標の存在が相互法則と同値であることか
 らわかってゐるからであつて、 $n=2$ のときは④はテータ関数の
 の空間になり、古典的な結果そのものが出るわけである。

$n=4$ のときには、④の中には θ に關して $\theta(u) = v^{\frac{3}{2}} + \dots$
 という形の Fourier 展開をもつものがあり、この定数項を 1 と
 するため、 $v^{-\frac{3}{2}}\theta(u) = R(u)$ とおけば、 $R(u)$ の変換法則は
 $R(u) = |u|^{-\frac{3}{2}}R(u^*)$ となる。ところが、この変換法則は、 $\sum_{\mathbb{Z}} f$
 $= f$ となる関数をとり、 $R(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} f(v^{\frac{2}{3}}u)$ とおいたとき、
 Poisson の和公式から得られる $\sum_{v \in \mathbb{Z}} f(v^{\frac{2}{3}}u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} |u|^{-\frac{3}{2}} f(v^{\frac{2}{3}}u^*)$ と
 同じものである。このことから、4乗剰余の相互法則は、4
 次の Fourier 変換で不変な関数で作られる 4乗型テータ級数か
 ら得られることが推測されるのである。しかし、 $\sum_{\mathbb{Z}} f$ が不変な
 関数は無数にある。他方、 θ があたえられたとき f を求める
 ことは、Möbius の関数を用いた級数を使えば簡単にできるが
 その関数の積分可能性等はあつかへない。

これらの困難をさけるため、求める f を数論と無関係な方
 法で特徴づけることを考える。より簡単な例についてこのア
 イデアを説明すると、 $f(u) = f_0(v)e(\frac{v}{4})$ の形の関数につい
 て $\sum_{\mathbb{Z}} f = f$ がなりたてば、実は $f_0(v) = e^{-\pi v}$ とならねばなら

ないことを証明される。これには, $\exp(\sqrt{-1} r \cos \delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}$

$\sqrt{-1}^{|n|} J_{|n|}(r) \cos n\delta$ を用いて, $f(u)$ を

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(v, r) \exp(\sqrt{-1} m \delta), \quad z = r \exp(\sqrt{-1} \delta),$$

の形に展開すると, f_m は $f(v)$ と Bessel 関数との積となり,

$\mathcal{F}_2 f = f$ から, e^{-x^2} を特徴づける

$$\int_0^{\infty} x^{v+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{xy} J_v(xy) dx = y^{v+\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

が無限の v について得られるからである。そこで, $n=4$ の場合について考えると, $f(u)$ の形はずっと複雑である。しかし, この場合にもやはり, $f(u)$ の v 軸への制限は, 無限の位数 2 の変換によって同次に不変な関数でなければならぬことがわかるのである。

このようにして, e^{-x^2} に相当する関数は, 任意の次数の場合に, 無限個の変換の同時不変関数として決定され得るのである。もちろんまだこれは大よきの結果であって, 厳密なとりあつかいは今後しなければならぬ。しかし, このような立場からすれば, 求める関数の構成は, 数論からは脱却した問題になる。さらに, 同じ方法で, p 進的な場合もあつかえるものと思われる。いずれにしても, 高次の剰余の場合に e^{-x^2} の役割りをはたす関数は, e^{-x^n} ではなく, むしろ $K_{1/n}(x^n)$ のようなものである。(終)