

氏 名 山ノ井 克 俊
 学位(専攻分野) 博 士 (理 学)
 学 位 記 番 号 理 博 第 2147 号
 学位授与の日付 平成 12 年 3 月 23 日
 学位授与の要件 学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
 研究科・専攻 理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
 学位論文題目 Algebro-Geometric Version of Nevanlinna's Lemma on Logarithmic Derivative and Applications.
 (ネバリンナの対数微分の補題の代数幾何的定式化とその応用)

論文調査委員 (主 査)
 教 授 伊 原 康 隆 教 授 宮 岡 洋 一 教 授 河 合 隆 裕

論 文 内 容 の 要 旨

現在まで、ネバリンナ理論は様々な発展を見ているが、この理論の中核である「第二主要定理」を高次元化する問題は、いくつかの特別な場合に知られていただけで、一般的な場合は未解決である。その第二主要定理については、それが確立されている場合には、その証明に、「対数微分の補題」と呼ばれる評価式が深く関係していることが認識されていた。しかし、その個々の場合の関わり方の有機的な繋がりは、見えにくかったといえよう。本論文では、

1. この対数微分の補題の高次元化を定式化、証明し、
2. それを用いて既知の場合の第二主要定理を統一的に導く枠組みを与えた。

ネバリンナ理論は、今から 70 年程前の R. Nevanlinna による複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数の値分布に関する定量的研究に始まる理論であり、その主な結果はネバリンナの第一主要定理、第二主要定理である。特に第二主要定理は「 $\mathbb{C}$ 上の定数でない有理型関数は 3 つ以上の値を除外できない」というピカールの小定理の精密な定量版であり、 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数の値分布に関する深い結果である。この理論を高次元化する一つの枠組は、 m 次元複素アフィン空間 $\mathbb{C}^m$ 上の分岐被覆空間 Y から射影代数多様体 X への有理型写像 f の像と X の因子 D の位置関係を調べる、というものである。現在では第一主要定理には十分な高次元化が知られているものの、第二主要定理については未だ満足のいく高次元化は知られていない。しかし次の形の予想がされており、いくつかの場合に証明されている。

第二主要定理 (予想) f が適当な意味で非退化ならば

$$m_{f,D}(r) + T_{f,KX}(r) \leq O(N_{\text{Ram}[Y/\mathbb{C}^m]}(r)) + (\text{Small term}).$$

ここで K_X は X の標準因子、 $m_{f,D}(r)$ 、 $T_{f,KX}(r)$ はそれぞれ接近関数、高さ関数を表す。

この式は、 f の値分布の様相が X の代数幾何的性質で強く制限されることを主張するもので、大変興味深い。現在までに第二主要定理が確立されていた場合は、次の通りである（簡単のため f の退化性、 D の非特異性に関する条件を省いて記す）。

- (a) $\dim X \leq \dim Y$ の場合、
- (b) $X = \mathbb{P}^n$ (射影空間) で、 D が一般の位置にある超平面の合併である場合、
- (c) X がアーベル多様体の場合。

本論文では、小林亮一教授 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科) の研究を発展させる形で、これらの証明において、しばしば重要になる「対数微分の補題」を高次元化して次の形の評価式を証明した。

対数微分の補題の代数幾何的定式化 (Theorem 3.2.1)

$$m_{f,Z}(r) \leq m_{f(\text{lift}), Z(\text{lift})}(r) + O(\log^+ r T_f(r)) \parallel,$$

$$m_{f(\text{lift}), \partial \mathcal{F}(X)} \leq O(\log^+ r T_f(r)) \parallel.$$

ここで $\mathcal{T}(X)$ は X 上のファイバー空間で接束の一般化, $f^{(lift)}, Z^{(lift)}$ はそれぞれ $\mathcal{T}(X)$ への f, Z の持ち上げである。また $\partial\mathcal{T}(X)$ は $\mathcal{T}(X)$ のコンパクト化の境界である。この評価式を使って一般の第二主要定理を導く道筋は、次のような ϕ を求めてそれを用いる、というものである。

「 X 上のファイバー空間の間の写像 $\phi: \mathcal{T}(X) \rightarrow K_X$ があって、 K_X のゼロセクションの ϕ による引き戻しが $D^{(lift)}$ を含む。」

この状況下で上記、第二主要定理の不等式を（ほとんどの f に対して）対数微分の代数幾何学的定式化を用いて示した (Propoiton 4.2.1 及び Theorem 4.1.3)。従って、第二主要定理を証明するためには、 ϕ を見つければよいのだが、実際、上の (a), (b), (c) の各場合にそれが可能であることを証明した。

論文審査の結果の要旨

値分布論は、射影代数多様体において（超越的）正則曲線（これは非コンパクト）と因子がどのように交わるかを研究する分野で、一種の非コンパクト交叉理論といえる。この理論は、今世紀初頭 Nevanlinna によって創設され、以後様々な高次元化の試みがなされてきた。しかし理論の重心である第二主要定理の高次元化については、いくつかの特別な場合に別々の方法で結果が示されたただけであった。申請者山ノ井克俊は、その鍵となる「対数微分の補題」の代数幾何学的定式化と証明に成功し、それをうまく用いれば第二主要定理の高次元版について従来個別的に得られていた諸結果がすべて見通しよく統一的に導けることを示した。

この種の研究方向は、小林亮一（調査委員）によって既に 1996 年頃示唆されていたが、申請者はそこで示唆されていた（が未だ正当化が得られていないところの）積分幾何学的方法にはよらずに、巧みな代数幾何学的設定を考えて、代数幾何学と値分布論的考察を明確に分離することによって、理論の全体構造を明らかにした。ここに本人自身の優れた洞察力を見ることが出来る。

値分布論は、研究者の数は少ないが、孤立した分野ではない。Diophantus 近似、代数幾何学、ポテンシャル論などと、深い関係にある分野交錯型の研究領域である。特に、Diophantus 近似を視野に入れながらの値分布論の研究は、申請者の本論文の研究によって、本質的進展を見たといえる。それは、Diophantus 近似において極めて重要な “successive minima” が値分布論における微分概念と対応している (P. Vojta) ため、値分布論における対数微分の補題の役割が明確になったことは両者の結びつきを考える上で大変助けになると考えられるからである。

本研究は、先行する諸結果を改良してようやく達した、という性質のものではなく、大変新鮮なものである一方、古典的なものとも自然に結びついている。すなわち、第二主要定理の (b) の場合の Ahlfors による古典的証明と Diophantus 近似論における Schmidt の部分空間定理の証明の類似性をどこまでも追求しようとする観点の延長上で考えると、出てくるものであり、この意味でも申請論文のアイディアはこれらの古典的結果に極めて自然につながった素直で優れたアイディアなのである。

以上のように、本申請論文は、理学博士の学位論文として価値あるものと認められる。

なお、申請論文に報告されている研究業績を中心に関連分野について、平成 12 年 1 月 17 日に試問した結果、合格と認めた。