

[E] Markoff chain の境界問題への試み

広島大理 青木一芳

離散空間上の連続時間径数の Markoff chain から境界を定義し、境界をつけ加えた空間の上に process を拡張する試みが種々ある。ここでは Riemann 面の倉持境界論で大津賀 [5] が用いた exhaustion の方法の、Markoff chain の場合への応用を試みている。任意に選んだ exhaustion による近似の結果は、はじめの選びかたに依存しないで定まる、という論法がふつうであるが、この議論では、いわば逆に、すべての情報をその選びかたによって得ていることがわかる。exhaustion の各段階での核関数が、一定の極限関数に近づいてゆく場合には、Constantinescu-Cornea [1] の倉持境界論に類似の議論ができる。以下その最初のところまでを、若干の説明を加えながら述べる。

文献 (直接引用するもののみ)

- [1] Constantinescu-Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963.
- [2] H. Kunita, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962).
- [3] 国田寛-渡辺教, 数学, 13 (1961), 14 (1962).
- [4] J. Neveu, Ann. Inst. Poincaré, 17 (1962).
- [5] M. Ohtsuka, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 28 (1964). (p.271ff)

1. 状態空間の regular exhaustion

考える状態空間 (state space) S は可算無限個の点 (state) $x, y, \dots$ から成り, 離散位相が入っているものとする. S のすべての部分集合の族を $\mathcal{B}(S)$ と記す. S 上の Markoff chain を規定する関数の系 (q, Π) が与えられ, つぎをみたすものとする: $q(x)$ は S 上の関数で $0 < q(x) < +\infty$; $\Pi(x, E)$ は $E \subset S$ を固定すれば S 上の関数, x を固定すれば $\mathcal{B}(S)$ 上の測度であって, $\Pi(x, S) \leq 1$, $\Pi(x, x) = 0$. つぎの仮定は以下の議論に本質的に関係する.

仮定1 S の任意の2点は連絡している, すなわち各 $x, y \in S$ に対して適当な番号 k があって, $\Pi^k(x, y) > 0$.

ただし $\Pi^0 = \delta$ (δ 測度), $\Pi^1 = \Pi$, 一般につぎのように定義する:

$$\Pi^{k+1}(x, y) = \sum_{z \in S} \Pi(x, z) \Pi^k(z, y).$$

S に1点 $\varnothing$ を離散的に加え, $\Pi(x, \varnothing) = 1 - \Pi(x, S)$, $x \in S$; $\Pi(\varnothing, \varnothing) = 1$ とおいて Π を $S \cup \varnothing$ に拡張する. 以後 S 上に関数や測度を定義するとき, 必要ならば $\varnothing$ では0とおいて延長することにする.

仮定2 S から $\varnothing$ への連絡がある, すなわち各 $x \in S$ に対して適当な番号 k があって, $\Pi^k(x, \varnothing) > 0$.

この仮定により, S 上の Green 核関数

$$(1) \quad G(x, y) = \sum_{k \geq 0} \Pi^k(x, y) \frac{1}{q(y)}, \quad x, y \in S,$$

は有限値である. 仮定1のもとでは, 仮定2は $\Pi(x, S)$ が x の関数として恒等的に1とはならないことと同等である.

S の有限部分集合の増大列 $\{S_n\}$ で, $\forall x, \exists n, x \in S_n$ となるものを, ひとつの exhaustion という. $\varnothing$ はつねに S_1 につけ加えておく. exhaustion が regular であるとは, その各 S_n において, 任意の 2 点が連絡し, かつ S_n から $\varnothing$ への連絡がある場合をいう. 正確には, $\forall x \in S_n, \forall y \in S_n \cup \varnothing, \exists z_1, \dots, z_l \in S_n, \Pi(x, z_1) \cdot \Pi(z_1, z_2) \cdot \dots \cdot \Pi(z_l, y) > 0$ の成立する場合である.

仮定 1 によって, 任意の exhaustion $\{S_n\}$ に対して, 各 S_n を適当に増大させる (すなわち $S'_n \supset S_n$ なる有限集合 S'_n を選ぶ) ことにより, regular exhaustion $\{S'_n\}$ を作ることができる.

注意 1 regular exhaustion $\{S_n\}$ の各 S_n で, $\forall y \in S_n, \exists x, z \in S_n, \Pi(x, y) > 0, \Pi(y, z) > 0$. ただし S_1 は 2 点を含むとする.

つぎにしばらく regular exhaustion $\{S_n\}$ をひとつ固定して, 各 S_n の上に, Markoff chain を規定する系を導入する. 与えられている (q, Π) から

$$(2) \quad \begin{aligned} q_n(x) &= q(x) \cdot \Pi(x, S_n \cup \varnothing), \\ \Pi_n(x, y) &= \Pi(x, y) / \Pi(x, S_n \cup \varnothing), \end{aligned} \quad x, y \in S_n,$$

によって (q_n, Π_n) を定義する. 仮定より上式中の分母は 0 でない. また $\Pi_n(x, \varnothing) = 1 - \Pi_n(x, S_n), \Pi_n(\varnothing, \varnothing) = 1$ とおく.

注意 2 $n \rightarrow +\infty$ のとき, $q_n(x) \uparrow q(x), \Pi_n(x, y) \downarrow \Pi(x, y)$ がすべての $x, y \in S$ について成立する.

2. (q_m, Π_m) の定義の説明

ここで (q_m, Π_m) の定義の由来を説明しておく。

S 上の関数 $u(x)$ が点 x で $(\Pi-)$ 調和 (優調和) であるとは,

$$(3) \quad u(x) = \Pi u(x) \equiv \sum_{y \in S} \Pi(x, y) u(y) \quad [u(x) \geq \Pi u(x)]$$

が [それぞれ] 成立する場合をいい, $A \subset S$ のすべての点で調和 (等) のとき, u は A で調和 (等) であるという。

関数論の bordered Riemann surface で, 内部で調和, border での法線微分 $= 0$ なる関数を求めるときに, その border にかんする double (いわば, その border を対称の境目として鏡像をつけ加えた全体) の上で調和かつ対称な関数を求めて, もとの空間への制限をとるという方法がある。Riemann 面の exhaustion の各段階で, この方法によって得た調和関数の列が, ある意味で収束すれば, 内部で調和で, いわゆる理想境界では法線微分 $= 0$ に当る性質をもつ関数の得られることが期待される。実際, 大津寛 [5] ではこのようにして倉持コンパクト化上の核関数を作っている。

われわれの場合に上の類似を行なうには, 法線微分に当るものを陽に表わせないため, 調和の定義のほうで按配せねばならない。 S_m に対してその double $\hat{S}_m = S_m \cup \{\tilde{x} : x \in S_m\}$ を考え, その上に

$$(4) \quad \begin{aligned} \hat{q}_m(x) &= \hat{q}_m(\tilde{x}) = q(x), \\ \hat{\Pi}_m(x, y) &= \hat{\Pi}_m(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Pi(x, y), \\ \hat{\Pi}_m(x, \tilde{x}) &= \hat{\Pi}_m(\tilde{x}, x) = \Pi(x, S_m^c) (= 1 - \Pi(x, S_m \cup \partial)), \\ \hat{\Pi}_m(x, \tilde{y}) &= \hat{\Pi}_m(\tilde{x}, y) = 0 \quad (x \neq y), \end{aligned}$$

$$\hat{\pi}_m(x, \varphi) = \hat{\pi}_m(\tilde{x}, \varphi) = \pi(x, \varphi)$$

$(x, y \in S_m)$ で系 $(\hat{\pi}_m, \hat{\pi}_m)$ を定義すると、これは $\hat{S}_m$ 上にひとつの Markoff chain を規定し、 S_m 上に限れば (π, π) と一致している。double $\hat{S}_m$ 上で $\hat{\pi}_m$ -調和、かつ $(\forall x \in \hat{S}_m, u(x) = u(\tilde{x}))$ の意味で) 対称な関数 u の、 S_m への制限が問題であるが、じつは前節のように π_m を定義してあげると、 u は S_m 上 π_m -調和であることがわかる。

(正確には、 $\hat{S}_m$ ないし S_m 上で上記の対称・調和性をもつ関数は恒等的に 0 なるものしかありえない。意味をもたせるには、たとえば S_m のある 1 点 ($\hat{S}_m$ では 2 点) を除いたところで調和ということにするとよい。) exhaustion に regularity を要するの、もとは $\hat{\pi}_m$ の定義を円滑にするためである。 π_n のとりかたも $\hat{\pi}_n$ から自然に導かれる。

3. 核関数の収束

1 節の続きで、各 S_m の上に (1) に対応して、Green 核

$$(5) \quad \tilde{G}_m(x, y) = \sum_{k \geq 0} \pi_m^k(x, y) \frac{1}{q_n(y)}, \quad x, y \in S_m,$$

を定義する。 π_m^k の定義は π^k のそれと同様である。 仮定 1, 2 に対応する性質は S_m にもあるので、 $\tilde{G}_m$ は有限値で、その諸性質、たとえば

$$(6) \quad \tilde{G}_m(x, y) \leq \tilde{G}_m(y, y), \quad x, y \in S_m,$$

はよく知られている。 $m \rightarrow +\infty$ のとき、 $\tilde{G}_m(x, y)$ がもし収束すれば、その極限 $\tilde{G}(x, y)$ は有限値で、 $\tilde{G}(x, y) \leq \tilde{G}(x, y)$ となる。 一般には $\tilde{G}_m(x, y)$ は収束しない。 しかしつぎの補題が成立する。

補題 任意の regular exhaustion $\{S_m\}$ に対して, その適当な部分列 $\{S_{m'}\}$ (regular exhaustion である) を選んで, 対応する $\tilde{G}_{m'}(x, y)$ の列が $S \times S$ 上で

$$\tilde{G}(x, y) = \lim_{m' \rightarrow +\infty} \tilde{G}_{m'}(x, y)$$

をもつようにすることができる。

いいかえれば, $\{\tilde{G}_n(x, y)\}$ はつねに収束部分列を含む。

証明 $y_0 \in S$ を固定して, ある番号から先の $\{\tilde{G}_n(y_0, y_0)\}$ が n について有界なことを見よう。番号 m を十分大にとれば, $y_0 \in S_m$, かつ $y_1, \dots, y_\ell \in S_m - y_0$ を選んで $a = \pi(y_0, y_1) \cdot \pi(y_1, y_2) \cdot \dots \cdot \pi(y_\ell, \partial) > 0$ とすることができる (仮定2)。 $a < 1$ である。 $\alpha = \pi(y_0, S_m \cup \partial) (> 0)$ とおく。このとき $n \geq m$ ならば, (q_n, π_n) -chain で y_0 を出発した粒子が y_0 へ戻らない確率を $p_n(y_0)$ として, つぎの式が成立する:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(y_0, y_0) &= q_n(y_0)^{-1} \sum_{k \geq 0} (1 - p_n(y_0))^k \\ &\leq q_n(y_0)^{-1} \sum_{k \geq 0} [1 - \pi_n(y_0, y_1) \cdot \dots \cdot \pi_n(y_\ell, \partial)]^k \\ &\leq q_n(y_0)^{-1} \sum_{k \geq 0} (1 - a)^k \\ &= \frac{1}{a \alpha q(y_0)}. \end{aligned}$$

最初の等式は $\tilde{G}_n$ の確率論的意味から正当づけられ, つぎの不等式も確率論的に明らかである; あとは上の選びかたによる。 $\pi(y_0, \partial) > 0$ のときは $\ell = 0$ でよい。 a, α は y_0 のみによるから, これで有界性がいえた。不等式 (6) より $\{\tilde{G}_n(x, y)\}_n$ は $S \times S$ の各点で有界で

ある。 S の位相では (局所) 同程度連続性がつねに成立するから、よく知られた Ascoli-Arzelà 型の定理により、 $\{\tilde{G}_n(x, y)\}$ は $S \times S$ 上で広義一様に収束する部分列を含む。(終)

一定の極限 $\tilde{G}(x, y)$ が存在するような exhaustion を仮に fundamental であるとしよう。すべての fundamental exhaustion の集まりを、各 $\tilde{G}$ の恒等的一致を同値条件として類別し、その同値類間の関係を調べるのが将来の問題となろう。さしあたりひとつの $\tilde{G}$ について、その性質と働きとを調べねばならない。

4. 核 $\tilde{G}(x, y)$ の性質

$\{S_m\}$ をひとつの fundamental exhaustion とし、その核関数を $\tilde{G}(x, y) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{G}_m(x, y)$ とする。

a) $\tilde{G}(x, y)$ は y を固定すると x について優調和、とくに $S-y$ では調和、 y では「真に」優調和である。

証明 各番号 m について、 $\tilde{G}_m$ が S_m 上 Π_m -優調和、とくに $S_m - y$ で Π_m -調和であることに注意する。

$$\begin{aligned} \Pi \tilde{G}(x, y) &\equiv \sum_{z \in S} \Pi(x, z) \tilde{G}(z, y) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{z \in S_m} \Pi(x, z) \tilde{G}_m(z, y) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \Pi(x, S_m \cup \partial) \cdot \sum_{z \in S_m} \Pi_m(x, z) \tilde{G}_m(z, y) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \Pi(x, S_m \cup \partial) \cdot \tilde{G}_m(x, y) = \tilde{G}(x, y); \end{aligned}$$

積分と極限との交換では、不等式 (6) により Lebesgue の定理が通

用できる。上の不等式で、 $x \neq y$ のときは等号が成立する；また、

$$(7) \quad \sum_{z \in S_n} \pi_n(y, z) \tilde{g}_n(z, y) = \tilde{g}_n(y, y) - g_n(y)^{-1}$$

より、 $x = y$ のときは真の不等関係が極限にまでもちこまれる。(終)

(3) の双対として、測度 $\eta(E)$ について、

$$(8) \quad \eta(E) = \eta g \pi g^{-1}(E) \equiv \sum_{y \in E} \sum_{x \in S} \eta(x) g(x) \pi(x, y) \frac{1}{g(y)} \\ \left[\eta(E) \geq \eta g \pi g^{-1}(E) \right]$$

($\forall E \subset A$) のとき、 η は A 上で調和【優調和】であるという。

b) $\tilde{G}(x, E)$ は x を固定すると、 S で優調和、とくに $S - x$ で調和である。(証明は a) と同様である。)

a), b) とその証明、とくに (7) 式とその双対とかいう容易にわかるように、

c) 核 $U(x, y) = \tilde{G}(x, y) - G(x, y)$ は x について S 上調和、 y (一般に E) について S 上(双対)調和である。

したがって等式 $\tilde{G} = G + U$ は (g, π) に関する $\tilde{G}$ の Riesz 分解(国田-渡辺 [3])を与えている。とくに、

$$(9) \quad U(x, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi^k \tilde{g}(x, y)$$

が U の確率論的意味を与える (Constantinescu - Cornea [1]) の関数にあたる。

5. 有限集合 A の到達測度

$\{S_n\}$, $\tilde{g}$ は前節のとおりとする。 S_n 上の、 x を出発点とする

(q_n, π_n) -chain の確率法則を $\tilde{P}_x^{(n)}(\cdot)$, $x \in S_n$, で表わし, 有限集合 $K \subset S_n$ に対して, K への到達測度 $\tilde{\omega}_x^{(n)}$ を

$$\tilde{\omega}_x^{(n)}(z) = \tilde{P}_x^{(n)}(K \text{ に } z \text{ で到達する}), \quad z \in K,$$

と定義する.

$$(10) \quad \begin{aligned} \pi_n^K(x, y) &= \pi_n(x, y), & x \in S_n - K, y \in S_n; \\ &= 0, & x \in K, y \in S_n, \end{aligned}$$

とおき, (q_n, π_n^K) にかんする Green 核関数

$$(11) \quad \tilde{G}_n^K(x, y) = \sum_{k \geq 0} (\pi_n^K)^k(x, y) \frac{1}{q_n(y)}, \quad x, y \in S_n,$$

(重畳は S_n 上にとる) を定義すれば, $\tilde{\omega}_x^{(n)}(z) = \tilde{G}_n^K(x, z) / \tilde{G}_n^K(z, z) = \tilde{G}_n^K(x, z) q_n(z)$ となるから, $\tilde{\omega}_x^{(n)}$ が収束することというには, $\tilde{G}_n^K$ が正の極限関数をもつことをいえばよい. 定義の式 (5), (10),

(11) から容易にわかるように,

$$\tilde{G}_n(x, y) = \sum_{z \in K} \tilde{G}_n^K(x, z) q_n(z) \tilde{G}_n(z, y), \quad x \in S_n, y \in K;$$

$$\tilde{G}_n(x, y) = \tilde{G}_n^K(x, y) + \sum_{z \in K} \tilde{G}_n^K(x, z) q_n(z) \tilde{G}_n(z, y), \quad x \in S_n, y \in S_n - K,$$

が成立する. これらの式から, $\tilde{G}_n^K$ を $\tilde{G}_n$ の有理式で表現することができ, $n \rightarrow +\infty$ のとき $\tilde{G}_n$ が収束することから, $\tilde{G}_n^K$ は確かに極限関数 $\tilde{G}^K$ をもつことがいえる; 証明には K の要素の個数にかんする帰納法を用いるとよい. この結果, $\tilde{\omega}_x^{(n)}(z) \rightarrow \tilde{\omega}_x(z)$ ($n \rightarrow +\infty$) なる測度 $\tilde{\omega}_x$ (K を識別するときは $\tilde{\omega}_x^{K-K}$ と書く) が定まる. これは, $\tilde{G}$ による process ができたときに, それの K への到達測度となるべきものである; $\tilde{\omega}_x$ の台は K の部分集合で, $\tilde{\omega}_x(K) \leq 1$.

S 上の関数 f の, 有限集合 K への '射影' f^K を

$$f^K(x) = \int_S f(z) \tilde{\omega}_{x^K}^{S-K}(z) \left(= \sum_{z \in K} f(z) \tilde{\omega}_x^{S-K}(z) \right)$$

と定義する. 任意の有限集合 K に対して S 上 $f \geq f^K$ となる関数 f を, $(\tilde{G}-)$ 完全優調和であるという. 完全優調和関数は優調和である. これらの用語は [1] の 15 章の類似を造ったもので, そこに挙げられている諸性質を, われわれの場合にいいかえて確かめることができる.

以下詳細は略すが, 今後の研究の方向はつぎのようになるであろう. 核関数 $\tilde{G}$ による空間 S のコンパクト化と, その上への $(\mathfrak{g}, \Pi)$ -process の拡張. これが実際ひとつの反射境界の process となっていることを調べる. $\tilde{G}(x, y)$ はこの process での, x から y への平均訪問時間を与え, とくに $U(x, y)$ は, そのうちの, 一度は境界に達してきた path の寄与分となっていることがいえよう ((9)式参照). さらに, 高次の境界の問題 (国田 [2]), また 3 節末に触れた問題がある. 後者は Neveu [4] の立場を逆の方向から見てゆくことになると思われる.

注 1 用語はおおむね [3] に沿っている.

注 2 記法と取り扱いとの便宜上, 1 点集合 $\{x\}$ を x で表わす.