

古典型単純 Lie 環の q -analogue の 有限次元既約表現の基底 - crystal base について

京大数理研 中島俊樹 (Toshiki Nakashima)

ここでは [K] により 概念づけがなされた q -analogue $U_q(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = A_n, B_n, C_n, D_n$) の 有限次元既約表現に対する "crystal base" 及び それを具体的に描写する "crystal graph" について述べたいと思う。

§1 The q -analogue of a universal enveloping algebra

まず t を $\mathbb{Q}$ 上の有限次元 vector space. I を finite index set とする.

$\{h_i \in t; i \in I\} \subset \{\alpha_i \in t^*; i \in I\}$ は lin indep set であり
 $\{ \langle h_i, \alpha_j \rangle \}_{i,j}$ は symmetrizable generalized Cartan matrix となるものとする. t^* には $2(\alpha_i, \lambda) = (\alpha_i, \alpha_i) \langle h_i, \lambda \rangle$ なる内積をとっておく. ((α_i, α_i) は $\forall i \in I$ に対し positive integer)

$P \subset t^* : \text{weight lattice}$

$Q \subset P : \text{root lattice}$ とする.

Def U_q は $\mathbb{Q}(q)$ 上の algebra で symbol $q^h (h \in P^*)$,
 $e_i, f_i (i \in I)$ という次の関係式を満たすものとして生

成しうる .

$$(1.1) \quad q^{h+h'} = q^h \cdot q^{h'} \quad (\text{for } h, h' \in P^*) \quad q^0 = 1$$

$$(1.2) \quad q^h e_i q^{-h} = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i \quad q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i \quad (\text{for } h \in P^*)$$

$$(1.3) \quad t_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i) h_i} \quad \text{と } t_i < 2$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q^{(\alpha_i, \alpha_i)} - q^{-(\alpha_i, \alpha_i)}}.$$

又 comultiplication $\Delta: U_q \rightarrow U_q \otimes U_q$ は

$$(1.4) \quad \Delta(q^h) = q^h \otimes q^h$$

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i$$

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i$$

で与えられる . により U_q -module の tensor 積は U_q -module になる .

以下 あつかう表現は integrable なものとす . $\lambda \in M(\lambda)$ は highest weight λ ($\in P_+ = \{ \mu \in P; \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0 \}$) の irreducible U_q -module を表すものとする .

§2 Operators $\tilde{e}_i$ と $\tilde{f}_i$

各 i に対する Laplacian $\Delta_i = q_i^{-1} t_i + q_i t_i^{-1} + (q_i - q_i^{-1})^2 e_i f_i - 2$ と t_i

$q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$ で e_i, f_i を modify し $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ を次のようにおく .

$$\tilde{e}_i := (q_i t_i \Delta_i)^{-\frac{1}{2}} e_i \quad \tilde{f}_i := (q_i t_i^{-1} \Delta_i)^{-\frac{1}{2}} f_i$$

$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ は 任意の U_q -module に operate する .

§3 Crystal base

$K := \mathbb{Q}(q)$ とし. $A := \{f \in K \mid f \text{ は } q=0 \text{ で regular}\}$ とおく

K 上の vector space V に対し L が V の lattice

$\Leftrightarrow L$ は A -free module で $V \cong K \otimes_A L$

Def integrable U_q -module M に対し (L, B) が M の crystal base

$\Leftrightarrow L$ は M の lattice, B は $\mathbb{Q}$ -vector space L/qL の base で 次の 1) ~ 5) をみたす

$$1) L = \bigoplus_{\lambda \in P} L_\lambda \quad \text{すなわち} \quad L_\lambda := L \cap M_\lambda \quad (M_\lambda \text{ は } M \text{ の weight space})$$

$$2) B = \bigcup_{\lambda \in P} B_\lambda \quad \text{すなわち} \quad B_\lambda := B \cap (L_\lambda / qL_\lambda)$$

$$3) \forall i \in I \text{ に対し } \tilde{e}_i L \subset L \quad \tilde{f}_i L \subset L$$

$$4) \forall i \in I \text{ に対し } \tilde{e}_i B \subset B \cup \{0\} \quad \tilde{f}_i B \subset B \cup \{0\}$$

$$5) u, v \in B \text{ と } i \in I \text{ に対し } u = \tilde{e}_i v \Leftrightarrow v = \tilde{f}_i u$$

Thm 1 $q = A_n, B_n, C_n, D_n$ のとき 任意の integrable $U_q(q)$ -module with highest weight は crystal base をもつ

証明は [K] による. 現在は q が一般の symmetrizable な Kac Moody Lie-環に対しても成り立つことがわかっている.

Thm は $M = M(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) のとき もう少し精密に述べられる.

$$\mathcal{L}(\lambda) := \sum A \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \subset M(\lambda) \quad (u_\lambda \text{ は h.w.v})$$

$$B(\lambda) := \{v = \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \bmod q\mathcal{L}(\lambda); v \neq 0\} \subset \mathcal{L}(\lambda) / q\mathcal{L}(\lambda)$$

と書く

Thm 2 $\lambda \in P_+$ に対し $(\mathcal{L}(\lambda), B(\lambda))$ は $M(\lambda)$ の crystal base

§ 4 sl_2 -case

ここで $\mathfrak{g} = sl_2$ とし 具体的に crystal base をあつかう。
 $U_q(sl_2)$ は generator t, t^{-1}, e, f で生成される $\mathbb{Q}(q)$ 上の algebra。
 その基本関係式は $tet^{-1} = q^2 e, tft^{-1} = q^{-2} f,$
 $[e, f] = t - t^{-1} / (q - q^{-1})$. Laplacian $\Delta = q^{-1}t + qt^{-1} + (q - q^{-1})^2 ef - 2$
 $= qt + q^{-1}t^{-1} + (q - q^{-1})^2 fe - 2$ は $U_q(sl_2)$ の center. $\{U_k\}_{0 \leq k \leq \ell}$

に対し

$$\begin{aligned} t U_k &= q^{k-2k} U_k \\ e U_k &= [k] U_{k-1} \\ f U_k &= [\ell - k] U_{k+1} \end{aligned}$$

とすると $V_\ell := \bigoplus_{k=0}^{\ell} \mathbb{Q}(q) U_k$ は $\ell+1$ 次元 irreducible $U_q(sl_2)$ -module になる。
 $([n] = q^n - q^{-n} / q - q^{-1})$

$$\Delta|_{V_\ell} = q^{\ell+1-2} + q^{-\ell-1} \quad \text{より} \quad (qt\Delta)^{\frac{1}{2}} \text{ は } V_\ell \text{ に}$$

$$(qt\Delta)^{\frac{1}{2}} U_k = q^{-k} (1 - q^{\ell+1}) U_k$$

という形で作用する。ここで $\hat{e} = (qt\Delta)^{-\frac{1}{2}} e$ $\hat{f} = (qt^{-1}\Delta)^{-\frac{1}{2}} f$ は

$$\hat{e} U_k = (1 - q^{2k})(1 - q^2)^{-1} (1 - q^{\ell+1})^{-1} U_{k-1}$$

$$\hat{f} U_k = (1 - q^{2(\ell-k)})(1 - q^2)^{-1} (1 - q^{\ell+1})^{-1} U_{k+1}$$

という形で作用する。ここで両係数とも A の元であることがわかる。しかも $q=0$ でともに 1 になる。

$\therefore L := \bigoplus_{k=0}^l A u_k \quad B = \{ u_k \}_{0 \leq k \leq l} \text{ とおく. } \tilde{e} L \subset L$
 $\tilde{f} L \subset L$ や $\pm \tilde{s}$ に

$$\tilde{e} u_k \equiv u_{k-1} \pmod{9L} \quad (0 < k \leq l)$$

$$\tilde{f} u_k \equiv u_{k+1} \pmod{9L} \quad (0 \leq k < l)$$

よ) (L, B) が V_L の crystal base となる: ことがわかる.

§ 5 Properties of Crystal base

Prop 1 (L_j, B_j) が M_j ($j=1, \dots, r$) の crystal base のとき
 $\bigoplus (L_j, B_j) = (\bigoplus L_j, \bigoplus B_j)$ は $\bigoplus M_j$ の crystal base

Prop 2 $M(\lambda)$ の crystal base $(\mathcal{L}(\lambda), B(\lambda))$ に対し $B(\lambda)$
 の元 u が $\forall i$ に対し $\tilde{e}_i u = 0$ を満たすとき $\mathcal{L}(\lambda)$ の元
 u' があり $u = u' \pmod{9\mathcal{L}(\lambda)}$ かつ $\forall i$ に対し $e_i u' = 0$ を満
 たす.

Prop 3 $(L_j, B_j) \in M_j$ ($j=1, 2$) の crystal base とする.

(a) $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2) = (L_1 \otimes L_2, B_1 \times B_2)$ は $M_1 \otimes M_2$ の crystal
 base. $\therefore B_1 \times B_2 \hookrightarrow L_1 \otimes L_2 / 9(L_1 \otimes L_2)$ は $(u, v) \mapsto u \otimes v$ と一致する

(b) $u \in B_1, v \in B_2$ に対し

$$(i) \quad \tilde{f}_i(u \otimes v) = \begin{cases} \tilde{f}_i u \otimes v & \text{if } \exists N > 0 \text{ s.t. } \tilde{f}_i^N u \neq 0 \text{ かつ } \tilde{e}_i^N v = 0 \\ u \otimes \tilde{f}_i v & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \tilde{e}_i(u \otimes v) = \begin{cases} u \otimes \tilde{e}_i v & \text{if } \exists N > 0 \text{ s.t. } \tilde{e}_i^N u \neq 0 \text{ かつ } \tilde{f}_i^N v = 0 \\ \tilde{e}_i u \otimes v & \text{otherwise} \end{cases}$$

§ 6 Crystal graph

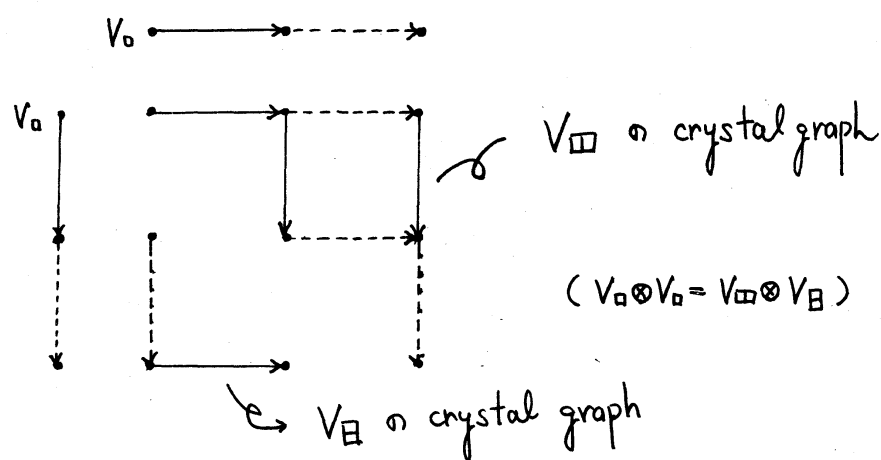
crystal base の定義の 4), 5) より base B は graph の構造をもつことがわかる. $\tilde{f}_i u = v$ を $u \xrightarrow{i} v$ とかくことにすれば, この graph は colored oriented graph となる.

又, この graph は tensor 積に対して, 安定性をもつことが Prop 3 よりわかる.

Example • A_2 の vector 表現 V_0 の crystal graph



• A_2 の $V_0 \otimes V_0$ の crystal graph



つまり, $\bar{U}_q$ -module M の crystal base (L, B) について,

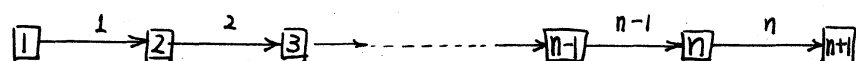
M が irreducible $\iff$ crystal graph が connected

(つまり, crystal graph が connected とは, 各 arrow の color を忘れて, graph として connected であること)

に注意すべし. $\bar{U}_q$ -module M_1, M_2 に対し, $M_1 \otimes M_2$ の crystal graph の各 connected component が $M_1 \otimes M_2$ の既約成分

の crystal graph とする : とわかる .

以下, tensor 積を利用し $\mathfrak{g} = A_n$ の場合に 任意 $\lambda \in P_+$ に対し $M(\lambda)$ の crystal graph の具体的描写を与える . $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ を fundamental dominant integral weight とすると $M(\lambda_i)$ の crystal graph を $M(\lambda_i) \hookrightarrow M(\lambda_i)^{\otimes i}$ を利用して実現してみる . $U_q(A_n)$ -module $M(\lambda_i)$ の crystal graph を次の形で作くことにする .



($L_0 = \bigoplus_{i=1}^{n+1} A \boxed{i}$, $B_0 = \{ \boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_n} \mid i_j \in \{1, 2, \dots, n+1\} \}$) が $M(\lambda_i)$ の crystal base となる . B_0 の元 $\boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_n}$ を $\begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}$ とかくことにする .

Prop 4 $M(\lambda_n)$ の crystal base $(L(\lambda_n), B(\lambda_n))$ に対し,

$$B(\lambda_n) = \left\{ \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} i_j \in \{1, 2, \dots, n+1\} \\ i_j < i_{j+1} \end{array} \right\} \quad \text{とだけ}$$

$B(\lambda_n)$ の $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ action は 次のように記述される

$u \in B(\lambda_n)$ に対し $u(i \rightarrow j)$ は u の i を j にかえたものとする . $u \in B(\lambda_n)$ に対して

$$\tilde{f}_i u = \begin{cases} u(i \rightarrow i+1) & \text{if } \exists k \text{ s.t. } i_k = i \text{ かつ } i_{k+1} \neq i+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i u = \begin{cases} u(i+1 \rightarrow i) & \text{if } \exists k \text{ s.t. } i_k = i+1 \text{ かつ } i_{k-1} \neq i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

証明は、まず $B(\Lambda_N) \wedge$ の $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の action が $B(\Lambda_N)$ の元と $B(\Lambda_1)$ の元の tensor 積とみたときの $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の action と一致することを示す。次に $B(\Lambda_N) \cup \{0\}$ が $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の action で閉じていることを示す。最後に、 λ に対し $\tilde{e}_i u = 0$ なる $B(\Lambda_N)$ の元 u は $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{bmatrix} = \square \otimes \cdots \otimes \square$ という形のもののみであることを示せばよい。

次に一般の $\lambda \in P_+$ に対しては、 $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とかけるとき、 $M(\lambda) \hookrightarrow M(\Lambda_1)^{\otimes m_1} \otimes M(\Lambda_2)^{\otimes m_2} \otimes \cdots \otimes M(\Lambda_n)^{\otimes m_n}$ により crystal graph を実現する。

Thm $\lambda \in P_+$ と $\lambda = \Lambda_{i_1} + \Lambda_{i_2} + \cdots + \Lambda_{i_p}$ ($1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_p \leq n$) とかくとき、 $M(\lambda)$ の crystal base $(L(\lambda), B(\lambda))$ の $B(\lambda)$ は

$$B(\lambda) = \left\{ w = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \vdots \quad \vdots \\ \square \quad \square \end{array} = \square \otimes \square \otimes \cdots \otimes \square \in B(\Lambda_{i_1}) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_{i_p}) \mid \begin{array}{l} w \text{ は shape } Y_\lambda \text{ の} \\ \text{semi standard tableau} \\ (\text{i.e. Young tableau } Y_\lambda \text{ に文字 } 1, \dots, n+1 \\ \text{を用いて "}" \text{ として方向 "}" \text{ で} \end{array} \right\}$$

(ここで Y_λ は、 λ で定まる Young tableau)

$\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ の $B(\lambda) \wedge$ の action i.e. $M(\lambda)$ の crystal graph の arrow の出方は、次のように記述される。

$\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ の action について考えると、 $w \in B(\lambda)$ の i と $i+1$ に注目する。 $w = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \vdots \quad \vdots \\ \square \quad \square \end{array}$ をこの矢印のように右上から、

1列ずつ見ていき、 i と $i+1$ の順番に読みとっていく。

それを 左から順にならべ、 $i, i+1$ というように $(i+1, i)$ は $\neq$

となりあっているものがあるならば、その2つを i のすぐ

それをくりかえし、 i のすぐ右のものがないまで続ける。

最終的に、 $i+1, i+1, \dots, \textcircled{i+1} \textcircled{i}, \dots, i$ というものがある。 $\hat{f}_i$ について

この sequence の一番左の i ($\textcircled{i}$ でかこんだ i) に対応する

w の i が $i+1$ にかわったものが $\hat{f}_i w$ である。もしも、そう

いう i がなければ $\hat{f}_i w = 0$ である。又、 $\tilde{e}_i$ について、この sequence

の一番右の $i+1$ ($\textcircled{i+1}$ でかこんだ $i+1$) に対応する w の $i+1$ が

i にかわったものが $\tilde{e}_i w$ である。もしも、そういう $i+1$ が

なければ $\tilde{e}_i w = 0$ である。(定理の証明は省略する)

Example. $w = A_3$ のとき

$$w = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & & \\ 3 & 4 & 4 & & & \end{array}$$

$\wedge$ の $\hat{f}_2, \tilde{e}_2$ の action を考える。

2, 3 を右上からよみと、7 にくと、3, 2, 2, 3, 2, 2, 3. 定理の

rule により $3, 2, \textcircled{2}, \textcircled{3}, 2, \textcircled{2}, \textcircled{3} \rightarrow 3, 2, 2$ となる。よってこのとき、

$$\hat{f}_2 w = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & \textcircled{3} & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & & \\ 3 & 4 & 4 & & & \end{array}$$

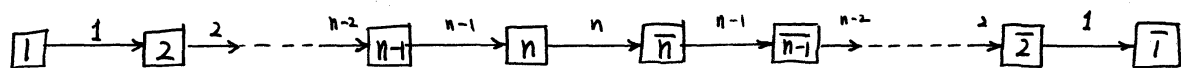
$$\tilde{e}_2 w = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \textcircled{2} \\ 2 & 2 & 3 & 4 & & \\ 3 & 4 & 4 & & & \end{array}$$

Remark. λ に対して $\tilde{e}_i w = 0$ となる $B(\lambda)$ の元 w は

$$w = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & & \\ 3 & 3 & \dots & 3 & & & \\ \vdots & & & & & & \\ n & \dots & n & & & & \end{array}$$

という形のもののみである。

$\mathfrak{g} = C_n$ のとき $U_q(C_n)$ の vector 表現 $M(\lambda_1)$ の crystal graph は次のようにかける。



よける。 A_n の場合と同様に tensor 積を利用してつみ上げて一般の表現の crystal graph が構成される。又 B_n, D_n の場合 vector 表現だけでなく spin 表現も組み込む必要があるため記述は A, C 型にくらべやや複雑になる。

crystal graph は次のような応用が考えられる。

「 $u \in B(\lambda), v \in B(\mu)$ で v_i に対し $\varepsilon_i(u \otimes v) = 0$ をみたす u, v を確定せよ。」

よける。すなわち $M(\lambda) \otimes M(\mu)$ の highest weight vector を確定せよというこで $M(\lambda) \otimes M(\mu)$ がどのように分解するかという gl の場合の Littlewood Richardson rule を与えることになる。現在 $\mathfrak{g} = A_n, B_n, C_n, D_n$ のときそれぞれの crystal graph を利用して上記の u, v を確定する手続きが得られている。

参考文献

- [K]. Masaki Kashiwara. "Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebra" RIMS preprint 676 (to appear in C.M.P.)