

統計力学における可解格子模型

京大数理研 神保 道夫 (Michio Jimbo)

三輪 哲二 (Tetsuji Miwa)

尾田 正人 (Masato Okado)

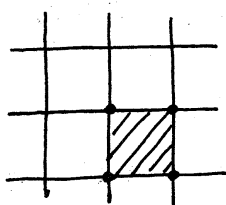
この1-トでは, eight-vertex SOS model (Andrews-Baxter-Forrester, J. Stat. Phys. 35 (1984)) と呼ばれる統計力学の2次元格子模型を例にとり, Baxter's ball game を行なう。この game は, 次の3 step に分かれている。

- (1) star-triangle relation の解を見つけよ。
- (2) corner transfer matrix 法を用いて, 2D configuration sum を 1D configuration sum に書き直せ。
- (3) 1D configuration sum を保型関数で表せ。

この game により得られた結果が local state probability である。

§1. face model と local state probability

集合 $\mathcal{S}$ を用意する. さらに $\forall a, b, c, d \in \mathcal{S}$ に対して $u \in \mathbb{C}$ の関数 $W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ が与えられている時 "face model" が与えられたという. $\mathcal{S}$ の元は "local state", 関数 $W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ は "Boltzmann weight" と呼ばれる.



これは, 2次元格子上的の各格子点上に fluctuation variable が存在し, 格子の最小単位 (face) の周りの state が定まった時 face に相互作用が生じる統計モデルを考えることに相当する.

格子 $\mathcal{L}$ 上の configuration $\mathcal{C} = \{a_i\}_{i \in \mathcal{L}} (a_i \in \mathcal{S})$ が実現する確率は Boltzmann の原理により

$$p(\mathcal{C}) = Z^{-1} \prod_{\text{faces}} W\left(\begin{smallmatrix} a_i & a_j \\ a_l & a_k \end{smallmatrix} \middle| u\right)$$

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{\text{faces}} W\left(\begin{smallmatrix} a_i & a_j \\ a_l & a_k \end{smallmatrix} \middle| u\right)$$

で与えられる. ここで積 $\prod$ は $\mathcal{L}$ 上のすべての face に対して 和 $\sum$ は すべての configuration に対してとられる.

site 1 の local state が a である "local state probability (LSP)" は次で定義される.

$$\begin{aligned}
 P(a) &= \text{Prob}(a_i = a) \\
 &= \sum_e \delta_{a,a} P(e)
 \end{aligned}$$

この LSP の結果は boundary condition に depend する =
 とを注意しておく。具体的には ground state configuration
 に fix して計算する。

§ 2 star-triangle relation

まず, eight-vertex SOS model (8V SOS model) を紹介しよう。8V SOS model は local state の集合 $\mathcal{S}$ と Boltzmann weight $W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ によって与えられる face model である。

$$\mathcal{S} = \mathbb{Z} + \zeta \quad (\zeta \in \mathbb{C} \text{ は } 1 \neq \zeta \neq -1)$$

$$W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right) = 0 \quad \text{unless } |a-b|=|b-c|=|c-d|=|d-a|=1 \quad (2.1a)$$

$$W\left(\begin{smallmatrix} a & a \pm 1 \\ a \pm 1 & a \pm 2 \end{smallmatrix} \middle| u\right) = \frac{[1+u]}{[1]} \quad (2.1b)$$

$$W\left(\begin{smallmatrix} a & a \pm 1 \\ a \pm 1 & a \end{smallmatrix} \middle| u\right) = \frac{[a \mp u]}{[a]} \quad (2.1c)$$

$$W\left(\begin{smallmatrix} a & a \mp 1 \\ a \pm 1 & a \end{smallmatrix} \middle| u\right) = \frac{[u] \sqrt{[a+1][a-1]}}{[1] [a]} \quad \begin{array}{l} \text{以上複号同順} \\ (2.1d) \end{array}$$

$z = z$, symbol $[u]$ は

$$[u] = \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right)$$

$$\theta_1(u, p) = 2p^{1/8} \sin u \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos 2u + p^{2n})(1 - p^n)$$

で表される楕円 τ -関数であり, $L \neq 0$ はパラメータである。

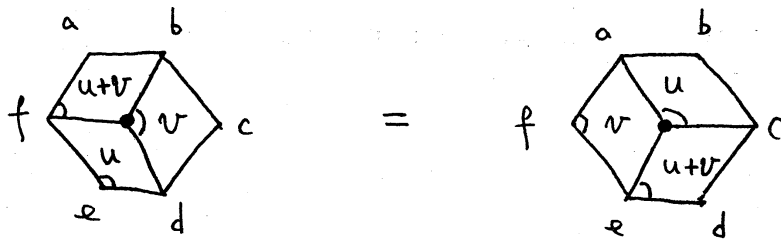
次に, star-triangle relation を説明しよう。

star-triangle relation とは下の Boltzmann weight に関する 3 次同次代数方程式のことである。

$$\begin{aligned} \sum_{g \in \mathcal{S}} W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ f & g \end{smallmatrix} \middle| u+v\right) W\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ g & d \end{smallmatrix} \middle| v\right) W\left(\begin{smallmatrix} f & g \\ e & d \end{smallmatrix} \middle| u\right) \\ = \sum_{g \in \mathcal{S}} W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ g & c \end{smallmatrix} \middle| u\right) W\left(\begin{smallmatrix} a & g \\ f & e \end{smallmatrix} \middle| v\right) W\left(\begin{smallmatrix} g & c \\ e & d \end{smallmatrix} \middle| u+v\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\forall a, b, c, d, e, f \in \mathcal{S}$$

これは graphical に次のように書くこともできる。



つまり, $\begin{smallmatrix} a & b \\ \square & \\ d & c \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} u \end{smallmatrix} = W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ で それぞれ 3 つ書くことの積を意味し, 真中の $\bullet$ は $\sum$ の local state での和を意味するのである。

8V SOS model 2 Baxter's ball game の (1) を実行したのには Baxter 2 である。ここ 2 は、それを check することにしよう。つまり 8V SOS model の Boltzmann weight (2.1) が star-triangle relation (2.2) を満たすことを証明するのである。

証明のために複素関数論の簡単な事実の復習から始めよう。

$[u]$ の quasi-periodicity は τ を

$$p = e^{2\pi i \tau} \quad (\text{Im } \tau > 0)$$

で定めると、

$$[u+L] = -[u] \quad (2.3a)$$

$$[u+L\tau] = -\exp(-\pi i \tau - 2\pi i u/L) [u] \quad (2.3b)$$

また次の補題も容易 2 である。

Lemma $f(u)$ は entire function 2 恒等的に 0 2 ではないとする。

$$f(u+L) = e^{-2\pi i B} f(u)$$

$$f(u+L\tau) = e^{-2\pi i (A_1 + A_2 u/L)} f(u)$$

$\Rightarrow A_2$ は 非負整数 2 あり, A_2 の zero を $\text{mod } L\mathbb{Z} + L\tau\mathbb{Z}$ 2 かつ。

さらに, $\sum \text{zeros} \equiv L(B\tau + \frac{A_2}{2} - A_1) \text{ mod } L\mathbb{Z} + L\tau\mathbb{Z}$.

次の等式は "inversion relation" と呼ばれている.

Proposition (inversion relation)

$$|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-a| = 1 \text{ の時,}$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} u \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ d \quad c \end{array} = \sum_{g \in J} W \left(\begin{array}{c} a \quad g \\ d \quad c \end{array} \middle| u \right) W \left(\begin{array}{c} a \quad b \\ g \quad c \end{array} \middle| -u \right) = \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2} \delta_{bd}$$

(proof) 次の3つの type の等式を証明すればよい. (複号同順)

$$(i) \begin{array}{c} a \quad a \pm 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} -u \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \pm 1 \quad a \pm 2 \end{array} = \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2}$$

$$(ii) \begin{array}{c} a \quad a \pm 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} -u \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \pm 1 \quad a \end{array} = \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2}$$

$$(iii) \begin{array}{c} a \quad a \neq 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} -u \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \pm 1 \quad a \end{array} = 0$$

$\equiv \mathbb{Z}$, 和 $\bullet$ は (i) $g = a \pm 1$, (ii)(iii) $g = a \pm 1, a \neq 1$ (複号同順)
 とされている (他の場合 Boltzmann weight は 0). (i)(iii) は
 Boltzmann weight の表示, (2.1) より明白. (ii) は整理
 すると

to show

$$\frac{[a \neq u][a \pm u]}{[a]^2} + \frac{[u][-u][a+1][a-1]}{[1]^2[a]^2} - \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2} = 0$$

左辺を u の関数 とすると $f(u)$ とおく. (2.3b) より

$f(u+L\tau) = \exp(-2\pi i\tau - 4\pi i u/L) f(u)$. $\dagger, \mathbb{Z}$, Lemma 6.5,
 $\mathbb{Z}$, zero を探せば” 証明 は 終る. $u = 0, \pm 1$ は
 明らか: zero 点 z あり. //

star-triangle relation の 証明 に 移す. $\dagger$ non-zero の Boltzmann weight $\pm$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \\ \alpha \boxed{u} \beta \end{array} \equiv \begin{array}{c} a \\ a+\mu \\ a+\alpha \boxed{u} a+\alpha+\beta \\ a+\mu+\nu \end{array}$$

$$\alpha, \beta, \mu, \nu = \pm 1$$

τ 表示する τ にする τ , Boltzmann weight の quasi-periodicity
 は,

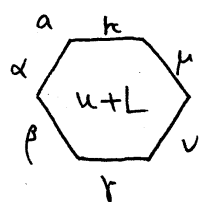
$$\begin{array}{c} a \\ \mu \\ \alpha \boxed{u+L} \beta \end{array} = - \begin{array}{c} a \\ \mu \\ \alpha \boxed{u} \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \\ \alpha \boxed{u+L\tau} \beta \end{array} = - \exp(-\pi i\tau - 2\pi i(u + \delta_{\alpha\beta} - a \frac{\alpha-\beta+\mu-\nu}{4})/L) \\ \times \begin{array}{c} a \\ \mu \\ \alpha \boxed{u} \beta \end{array}$$

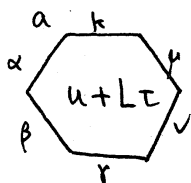
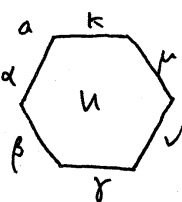
次に, trivial $1=0$ に $\dagger$ star-triangle relation の
 (左辺) - (右辺) $\pm$, u の 関数 τ 2τ (τ は $1/2 \times 9 \times 2 \times 3$)

$$\begin{array}{c} a \\ k \\ \alpha \boxed{u} \mu \\ \beta \end{array} \equiv \begin{array}{c} a \\ a+k \\ a+\alpha \boxed{u+v} a+k+\mu \\ a+\alpha+\beta \\ a+\alpha+\beta+r \\ = a+k+\mu+\nu \end{array} - \begin{array}{c} a \\ a+k \\ a+\alpha \boxed{v} a+k+\mu \\ a+\alpha+\beta \\ a+\alpha+\beta+r \\ = a+k+\mu+\nu \end{array}$$

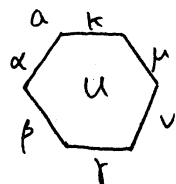
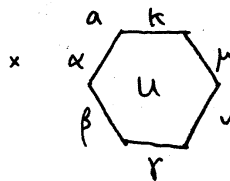
τ τ τ , quasi-periodicity は



=



$$= \exp\left(-2\pi i\tau - 2\pi i\left(2u+v+\delta_{\alpha r}+\delta_{\beta r}-a\frac{\alpha+\beta-\mu-v}{2}\right)/L\right)$$



$= f(u)$ とおき $f(u) \neq 0$ と仮定して Lemma を適用すると,

$$B = 0, \quad A_1 = \tau + (v + \delta_{\alpha r} + \delta_{\beta r} - a\frac{\alpha+\beta-\mu-v}{2})/L$$

$$A_2 = 2 \quad \text{より, } f(u) \text{ は } 2 \text{ の zero 点を持つ.}$$

$$\sum \text{zeros} \equiv L\left(1 - \tau - (v + \delta_{\alpha r} + \delta_{\beta r} - a\frac{\alpha+\beta-\mu-v}{2})/L\right)$$

$$\equiv -v - \delta_{\alpha r} - \delta_{\beta r} + a\frac{\alpha+\beta-\mu-v}{2} \pmod{L\mathbb{Z} + L\tau\mathbb{Z}}$$

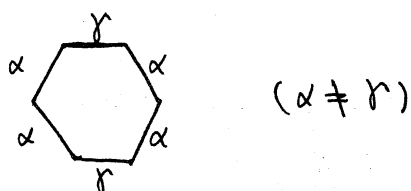
$$\tau = 3\omega, \quad f(0) = 0, \quad f(-v) = 0 \quad \text{は}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ d \end{array} \begin{array}{c} b \\ \\ c \end{array} = \delta_{bd} \quad (\text{initial condition})$$

と inversion relation (Proposition) より 容易に check

$$2 \neq 3. \quad \text{よって} \quad \delta_{\alpha r} + \delta_{\beta r} - a\frac{\alpha+\beta-\mu-v}{2} \not\equiv 0 \pmod{L\mathbb{Z} + L\tau\mathbb{Z}} \quad \text{は}$$

$f(u) \equiv 0$ が証明されたことになる。しかし、そのような場合は、 L, γ が generic な パラメータであることを考えれば $\alpha = \beta \neq \gamma$, $\mu = \nu = \alpha$ つまり star-triangle relation が



の type のものに限られる。ところが、これは ν についての関数と思うことにより同様の方法で証明することができ。よって、次の定理が得られた。

Th. 8V SOS model の Boltzmann weight は star-triangle relation を満たす。

§3. restricted model

前セクションの初めに紹介した 8V SOS model には、パラメータが 2, (γ, L) があった。これを "restrict" して "有界的な" (local state の集合が有限な) model を作ることを考えよう。

8V SOS model で parameter を

$$\gamma = 0, \quad L \in \mathbb{Z} (L \geq 4)$$

とし、さらに local state の集合を

$$\mathcal{J}_L = \{1, 2, \dots, L-1\}$$

としたものを "restricted model" と呼ぶ。この時、次の定理が成立する。

Th. restricted model の Boltzmann weight は finite z , star-triangle relation を満たす。

(proof) finiteness は明白。
restricted model の star-triangle relation を graphical に書くことは次のように出来る。

$$\sum_{g \in \mathcal{J}_L} f \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ u+v \quad v \\ \diagdown \quad \diagup \\ u \quad g \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad d \end{array} = \sum_{g \in \mathcal{J}_L} f \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ u \quad u \\ \diagdown \quad \diagup \\ v \quad g \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad d \end{array}$$

$$\text{if } a, b, c, d, e, f \in \mathcal{J}_L$$

さらに, "generic" には SOS model の star-triangle relation があり, $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{J}_L$ のときは

$$\sum_{g \in \mathbb{Z} - \mathcal{J}_L} f \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ u+v \quad v \\ \diagdown \quad \diagup \\ u \quad g \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad d \end{array} = 0$$

$$\sum_{g \in \mathbb{Z} - \mathcal{J}_L} f \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ u \quad u \\ \diagdown \quad \diagup \\ v \quad g \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad d \end{array} = 0$$

を示せば O.K. これは non-trivial な場合は次の4通りになる。

$$\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ u+v \quad v \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \\ u \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{c} L-2 \quad L-1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ u+v \quad v \\ \diagdown \quad \diagup \\ L-1 \quad L-2 \\ u \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v \quad 0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \\ u+v \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{c} L-1 \quad L-2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v \quad L \\ \diagup \quad \diagdown \\ L-2 \quad L-1 \\ u \end{array} = 0$$

$L=3$ の場合、これは

$$\begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ \square \\ 2 \quad 1 \\ u \end{array} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \square \\ 0 \quad 1 \\ u \end{array} \equiv 0, \quad \begin{array}{c} L-1 \quad L \\ \square \\ L-2 \quad L-1 \\ u \end{array} =$$

$$\begin{array}{c} L-1 \quad L-2 \\ \square \\ L \quad L-1 \\ u \end{array} \equiv 0 \quad ([L] \neq 0 \text{ に注意}) \text{ より 明白. } //$$

上述の定理により、star-triangle relation を満たす local state の集合が有限の model が得られた。

Baxter's ball game の次の step は (2) であるが、これは [1] には、R.J. Baxter "Exactly solved models in statistical mechanics" Academic, London, 1982 あるいは最初に挙げた ABF による論文の appendix に譲る。

step (2) の output は LSP の次の表示である。

$$P(a|b,c) = \lim_{m \text{ even} \rightarrow \infty} P_m(a|b,c) \quad (3.1a)$$

$$t=t^{-1}, \quad P_m(a|b,c) = \frac{E(x^a, x^L) X_m(a,b,c; x^2)}{\sum_{0 \leq \alpha \leq L} E(x^\alpha, x^L) X_m(\alpha,b,c; x^2)} \quad (3.1b)$$

$$X_m(a,b,c; q) = \sum_a q^{\sum_{j=1}^m j |a_j - a_{j+2}|/4} \quad (3.1c)$$

$z = z$, $E(z, q) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - zq^{m-1})(1 - z^{-1}q^m)(1 - q^m)$ z あり, (3.1c) における一次元系 $a = \{a_1, a_2, \dots, a_{m+2}\}$ について和は, $a_i \in \{1, 2, \dots, L-1\}$, $|a_i - a_{i+1}| = 1$ ($\forall i$) $a_1 = a$, $a_{m+1} = b$, $a_{m+2} = c$ の制限のもとでとられる. (3.1c) の形の表示は "1D configuration sum" と呼ばれる. b, c は boundary condition を定義している.

これで, LSP の一応の表示は得られたが, これは低温展開の表示である. つまり, x という variable は低温の極限で 0 となる parameter なのである. 従って, Baxter's ball game の (3) が重要になってくる. 保型関数に書き直せば $x=1$ (転移点) 近くの振舞いが, $x=0$ の近くの振舞いから調べられるからである.

§4. q 差分方程式

ball game (3) のために $X_m(a, b, c)$ (3.1c) を Gaussian polynomial を用いて表示する.

Def. (Gaussian polynomial)

$m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} &= \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1}) \cdots (1-q^{m-m+1})}{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q)} & 0 \leq n \leq m \\
 &= 0 & \text{otherwise}
 \end{aligned}$$

Gaussian polynomial の簡単な性質として, 次の3つを挙げる.

$$(i) \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = \delta_{n0}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m-n \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix} \\ = q^{m-n} \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix}$$

さて, $X_m(a, b, c)$ を次の差分方程式で unique に定まる q -series とおこう.

$$X_0(a, b, c) = \delta_{ab} \quad (4.1a)$$

$$X_m(a, b, c) = \sum_{d=b \pm 1} q^{m|d-c|/4} X_{m-1}(a, d, b) \quad (4.1b)$$

$$X_{m-1}(a, 0, 1) = X_{m-1}(a, L, L-1) = 0 \quad (4.1c)$$

Lemma. $b, c \in \mathbb{Z}$, $c = b \pm 1$ のとき

$$f_m(b, c) = q^{bc/4} \begin{bmatrix} m \\ \frac{m+b}{2} \end{bmatrix} \quad \text{とおく,}$$

$$f_0(b, c) = \delta_{0b} \quad (4.2a)$$

$$f_m(b, c) = \sum_{d=b \pm 1} q^{m|d-c|/4} f_{m-1}(d, b) \quad (4.2b)$$

が成立する.

(proof) (4.2a) は Gaussian polynomial の性質 (i) より明白.

(4.2b) は, 次の 2 式を証明すればよい.

$$(a) \quad f_m(b, b+1) = q^{m/2} f_{m-1}(b-1, b) + f_{m-1}(b+1, b)$$

$$(b) \quad f_m(b, b-1) = q^{m/2} f_{m-1}(b+1, b) + f_{m-1}(b-1, b)$$

$$(a) \text{ は } q^{b(b+1)/4} \left[\begin{matrix} m \\ \frac{m+b}{2} \end{matrix} \right] = q^{m/2 + (b-1)b/4} \left[\begin{matrix} m-1 \\ \frac{m+b}{2} - 1 \end{matrix} \right] \\ + q^{(b+1)b/4} \left[\begin{matrix} m-1 \\ \frac{m+b}{2} \end{matrix} \right]$$

を示せばよいが, overall factor $q^{b(b+1)/4}$ を取り払えば性質 (iii) そのものになる. (b) も同様 (iii) を使って証明される. //

Th. $1 \leq a, b, c \leq L-1$, $c = b \pm 1$ の時

$$X_m(a, b, c) = q^{-a/4} \{ F_m(a, b, c) - F_m(-a, b, c) \} \quad (4.3a)$$

$$F_m(a, b, c) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} q^{-Lv^2 + (\frac{L}{2} - a)v + \frac{a}{4}} f_m(b-a-2Lv, c-a-2Lv) \quad (4.3b)$$

は, (4.1) の解である.

(proof). まず initial condition (4.1a) を check しよう.

仮定より, $-L < b-a < L$, $0 < b+a < 2L$ であるから,

$m=0$ での non-zero となるのは $F_0(a, b, c)$ の $v=0$ の部分

だけである。よって, $X_0(a, b, c) = q^{-a/4} \cdot q^{a/4} f_0(b-a, c-a)$
 $= \delta_{ab}$. ((4.2a) に注意).

(4.1b) は, (4.3) により $X_m(a, b, c)$ を $f_m(b', c')$ ($b', c' \in \mathbb{Z}$
 $c' = b' \pm 1$) の重ね合わせに於て定義されるから, (4.2b)
 により OK.

よって, 後は (4.1c) を示せばよい. $m \rightarrow m+1$ としてまず

$$X_m(a, 0, 1) = 0$$

を考えよう. つまり,

(to show)

$$F_m(a, 0, 1) = F_m(-a, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{これは, } F_m(a, 0, 1) &= \sum_{v \in \mathbb{Z}} q^{-Lv^2 + (\frac{L}{2} - a)v + \frac{a^2}{4}} f_m(-a - 2Lv, 1 - a - 2Lv) \\ &= \sum_v q^{L(L-1)v^2 + (L-1)av + \frac{a^2}{4}} \left[\begin{matrix} m \\ \frac{m-a}{2} - Lv \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

Gaussian polynomial の性質 (ii) より, 上式の summand は
 $a \rightarrow -a, v \rightarrow -v$ で不変. よって示された.

$$X_m(a, L, L-1) = 0$$

の証明も同様. //

次に Gaussian polynomial の次の事実に着目しよう.

$\alpha: m$ によらない定数 の時

$$\left[\begin{matrix} m \\ \frac{m}{2} + \alpha \end{matrix} \right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi(q)^{-1} \quad \text{ただし, } \varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

±1 =

Formula (Jacobi's triple product identity)

$$E(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/2} z^n$$

に注意すると 次の定理 が 得られる.

Th.

$$\lim_{m \text{ even} \rightarrow \infty} X_m(a, b, c)$$

$$= \varphi(q)^{-1} q^{\frac{a(a-1)+bc}{4}} \left\{ q^{-\frac{ar}{2}} E(-q^{(L-a)(L-1)+Lr}, q^{2L(L-1)}) \right. \\ \left. - q^{\frac{ar}{2}} E(-q^{(L+a)(L-1)+Lr}, q^{2L(L-1)}) \right\}$$

$$t=t^{-1}, \quad r = \frac{b+c-1}{2}$$

この定理によつて, Baxter's ball game の (3) が完了した.
1D configuration sum $X_m(a, b, c)$ ($m \rightarrow \infty$) を theta
constant (保型函数) に書き直したからである.

§5. 対応原理

LSP $p(a|b, c)$ の表示の分母を見てみよう.

$$\sum_{0 \leq \alpha \leq L} E(x^\alpha, x^L) X(\alpha, b, c; x^2)$$

$$t=t^{-1} \quad X(a, b, c; q) = \lim_{m \text{ even} \rightarrow \infty} X_m(a, b, c; q)$$

実は、この和も product form になる (sums-of-products identity)

$$\sum_{\alpha} E(x^{\alpha}, x^L) X(a, b, c; x^2) = x^{bc/2} E(x, x^3) E(x^r, x^{L-1}) / E(x, x^2)$$

ここで天下りではあるが、affine Lie 環 $A_1^{(1)}$ の level l ($\in \mathbb{N}$), spin $l/2$ ($0 \leq j \leq l, j \in \mathbb{Z}$) の character $\chi_{j,l}(z, q)$ を考えよう。これは $\chi_{j,l}(z, q)$ が テータ関数

$$\theta_{k,m}(z, q) = \sum_{r \in k/2m + \mathbb{Z}} q^{mr^2} (z^{-mr} - z^{mr})$$

の比で

$$\chi_{j,l}(z, q) = \frac{\theta_{j+1, l+2}(z, q)}{\theta_{1,2}(z, q)}$$

と書けることを肝心である。

$$\chi_{j,l}(x, x^2) = x^{\star} \frac{E(x^{j+1}, x^{l+2})}{E(x, x^2)}$$

$\star$ は 適当な指数

という事実を考えると、sums-of-products identity は

$$\begin{aligned} & \chi_{r-1, L-3}(x, x^2) \chi_{s-1, 1}(x, x^2) \\ &= \sum_a x^{\star} X(a, b, c; x^2) \chi_{a-1, L-2}(x, x^2) \end{aligned} \quad (s=1 \text{ or } 2) \quad (5.1)$$

と書き直せる。

ここまできれば 次のような Lie 環の pair を考えることは
 そう唐突ではない。

$$A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)} \supset A_1^{(1)} \quad (\text{diagonal embedding})$$

表現の level $L-3$ 1 $L-2$

大きい方の Lie 環の既約表現を小さい Lie 環に關してさ
 らに既約分解することを character の言葉で書くと

$$\begin{aligned} & \chi_{r-1, L-3}(z, q) \chi_{s-1, 1}(z, q) \\ &= \sum_a b_{r-1, s-1, a-1}(q) \chi_{a-1, L-2}(z, q) \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる。そして、 $b_{r-1, s-1, a-1}(q)$ は q の適当なべきを除
 いて、 $X(a, b, c; q)$ と $r = \frac{b+c-1}{2}$, $s = \frac{b-c+1}{2} + 1$ の対応
 で一致することが示される。一旦 (5.2) を得てしまえば
 (5.1) は parameter を $z = x$, $q = x^2$ と specialize するこ
 により得られる。最終的な LSP の結果は

$$P(a|b, c) = \frac{b_{r-1, s-1, a-1}(x^2) \chi_{a-1, L-2}(x, x^2)}{\chi_{r-1, L-3}(x, x^2) \chi_{s-1, 1}(x, x^2)}$$

と書かれる。大きい Lie 環が boundary condition に、小さい
 Lie 環が中心の local state に關係していることに
 注意しよう。以上のことを我々は Lie 環との“対応原理”
 と呼んでいる。