

21. 外部拘束条件がある系の Dirac の方法による量子化

本 間 高 弘

一般の曲がった空間での粒子の座標、速度、運動量をそれぞれ $x_i, \dot{x}_i, p_i$ とし、Lagrangian L の Hessian を $W_{ij} = \partial^2 L / \partial \dot{x}_i \partial x_j$ で定義する。一般に Hessian が正則でない場合に、 $(x, \dot{x})$ から (x, p) へ変換すると、 x, p 間の関係式、つまり拘束条件が得られる。このような拘束のある系についての正準量子化は Dirac によって定式化された。

Dirac の手法は、上記のような Lagrangian に固有な拘束の存在する系のみならず、外部から holonomic な拘束 $f(x) = \text{const.}$ (x : 一般化座標) が課された系に対しても適用できる。我々は Dirac の手法を用いて、 $f(x) = \text{const.}$ の拘束が存在する系を量子化し、正準変数の交換子が、拘束がない通常の系と違って、Kronecker's deltas では表わされないことを示す。

次に $\dot{f}(x) = 0$ (x : 一般化座標) という拘束 (時間 t で積分すれば $f(x) = \text{const.}$ と同等である) が課された系に対して、同様に Dirac の手法を使って量子化を行なう。そして座標 x_i とその共役運動量 π_i の交換子が $i\hbar\delta_{ij}$ になることを示す。また量子化の際に拘束、交換子及び Hamiltonian が、座標と運動量の積になるため、演算子の順序をどの様にとるかが問題になる。この順序をどう決めれば、 $f(x) = \text{const.}$ の拘束が存在する系と $\dot{f}(x) = 0$ の拘束が存在する系が、Hamilton 形式においても等価になるか議論する。

最後に、例として粒子が球面上に束縛されている系について検討する。