

連続関数の空間での放物型方程式

阪大理 田辺 玄城

境界値問題

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\sum a_{ij}(x) \nu_j \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

を考える. ここに Ω は B oundary の意味で一様に C^2 級, 局所的に C^4 級な R^n の中の領域, a_{ij}, a_i, a は実数値関数, $\{a_{ij}(x)\}$ は一様に正定符号, $a \leq 0$, $a_{ij} \in B^0(\overline{\Omega})$, $a_i \in L^\infty(\Omega)$, $a \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}|_{\partial\Omega} \in B^1(\partial\Omega)$. ここに $B^k(\Omega)$ は Ω で k 回連続微分可能, k 階迄の導関数はすべて有界な関数の全体である. $\overline{\Omega}$ で連続, ∞ で零に等しい関数の全体を $\dot{C}(\overline{\Omega})$, $u \in \dot{C}(\overline{\Omega})$ に対して $|u| = \max |u(x)|$ とおく.

$$D(A) = \{u : \text{すべての } 1 < p < \infty \text{ に対して } u \in W_p^2(\Omega),$$

$$\sum a_{ij} \nu_j \partial u / \partial x_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad Lu \in \dot{C}(\overline{\Omega})\},$$

$$u \in D(A) \text{ に対して } Au = Lu,$$

と置く。ただし超関数の意味で

$$L = \sum a_{ij} \partial^2 / \partial x_i \partial x_j + \sum a_i \partial / \partial x_i + a,$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ は法線ベクトルである。 A は $\dot{C}(\bar{\Omega})$ で解析的半群を生成することの一証明を述べる。

$$A_p \quad (1 < p < \infty) \in$$

$$D(A_p) = \{u \in W_p^m(\Omega) : \sum a_{ij} \nu_j \partial u / \partial x_i|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$A_p u = Lu$$

によって定義される作用素とする。形式的共役が構成出来る場合は e^{tA_p} の核 $G(t, x, y)$ に関して

$$0 \leq G(t, x, y) \leq \frac{C}{t^{n/2}} \exp\left(-c \frac{|x-y|^2}{t}\right),$$

$u \in \dot{C}(\bar{\Omega})$ に対し $t \rightarrow 0$ のとき Ω で一様に

$$\int_{\Omega} G(t, x, y) u(y) dy \rightarrow 0,$$

更に $G(t, x, y)$ は e^{tA} の核であることも示すから望みの

結果が得られる。一般の場合は係数を $a_{ij}^{(k)} \in B^2(\bar{\Omega})$, $a_i^{(k)}$

$\in B^1(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ で一様に $a_{ij}^{(k)} \rightarrow a_{ij}$, $B^1(\partial\Omega)$ で $a_{ij}^{(k)}|_{\partial\Omega}$

$\rightarrow a_{ij}|_{\partial\Omega}$, $a_i^{(k)}$ は一様有界, 殆ど至る所 $a_i^{(k)} \rightarrow a_i$ となる

様に近似する。 a_{ij} 等を $a_{ij}^{(k)}$ で置き換えた作用素を $A^{(k)}$

とする。 u が $L^p(\Omega) \cap \dot{C}(\bar{\Omega})$ に属すれば $\exp(tA_p^{(k)})u$

$\rightarrow \exp(tA_p)u$ (L^p で強収束), $|\exp(tA_p^{(k)})u| \leq |u|$

から所要の結果を得る。 $D(A)$ が稠密であることは $\tilde{a}_j(x)$

を $B'(\Omega)$ に属し, $\partial\Omega$ では $a_{ij}(x)$ に等しく, $\{a_{ij}(x)\}$ が一様に正定符号であるような関数, L を

$$\tilde{L} = \sum \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i})$$

で置き換えて定義される作用素を $\tilde{A}$, $\tilde{A}_p$ 等と表わすと

$D(\tilde{A}_p) = D(A_p)$, $\tilde{L}$ の形式的共役が作れるから $e^{t\tilde{A}_p}$ の核に関して前頁の $G(t, x, y)$ に関することと同様のことが成立することからわかる.