

流体とブラックホールの間に見られる類似性・双対性

立教大学・理学部 宮本 雲平 (MIYAMOTO, Umpei)

Department of Physics, Rikkyo University

概要

一般相対論では、定常なブラックホールが温度やエントロピーといった量をもつ熱力学系であることが知られている。ただし、動的なブラックホールが同様の対応物を持つかは長年の謎とされてきた。ところが、相対論・素粒子研究で近年話題となっている「流体・重力対応」によれば、動的なブラックホールは流体に対応するという。本稿では、まず、ブラックホールの不安定性などの現象に着目しながら、ブラックホールと流体がどのように似ているかを紹介し、その後で、方程式レベルで流体・重力対応がどのように実現されるかを解説する。

1 「流体としてのブラックホール」

一般相対論では定常なブラックホールが温度やエントロピーを持つ熱力学系として扱えることが知られている。この対応はブラックホールを理解する上で非常に有用だが、残念ながら動的なブラックホールについて同様の対応は知られていない。一方、局所的に熱平衡状態にある様々な物理系が流体力学によってよく近似されることを我々は知っている。すると、次のような期待が生じる：「緩やかに変動するブラックホールは局所熱平衡状態にあり、対応する流体的記述があるのではないか?」。この期待に答えるのが今話題の流体・重力対応である (図 1)。ある種の高次元ブラックホールが大域的な熱平衡状態から外れたとき、それを記述する重力場の方程式が、特殊な状態方程式や輸送係数をもった相対論的流体方程式に還元される。

宇宙に存在する天体ブラックホールの周りには多種多様な流体が存在するため、宇宙物理学においてブラックホールと流体は同時に語られることが多い。しかし、本稿が扱うのはそのような「流体とブラックホール」という系ではなく、「流体としてのブラックホール」もしくは「ブラックホールとしての流体」という、堅気の方々にはかなり過激なものであることを断っておく。

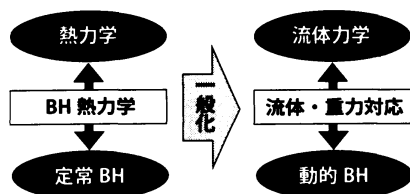


図 1: ブラックホール (BH) 熱力学の一般化が流体・重力対応。

2 準備

2.1 一般相対論

我々は空間が3次元の広がりをもつことを知っていて、点の位置を極座標 (r, θ, ϕ) で表わしたりする。相対論では、この空間と時間 t を一緒にして4次元「時空」と呼び、座標 $(x^a)_{a=0,1,2,3} := (ct, r, \theta, \phi)$ など与时空点を指定する。 c は真空中の光速である。一般相対論で基本となる物理量は、二つの時空点 x^a と $x^a + dx^a$ の距離の「平方」を

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^3 g_{ab} dx^a dx^b \quad (1)$$

と書いたときの計量 g_{ab} である（以後、同じ添え字が上下に現れたら Σ がなくても和を取ると約束する）。アインシュタインは計量が

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \quad (2)$$

という運動方程式に従うことを発見した。ここで、 G_{ab} はアインシュタイン・テンソルと呼ばれる計量の2階微分を含む時空の曲率、 Λ は宇宙定数と呼ばれる定数、 G はニュートンの万有引力定数、 T_{ab} はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれ、時空中に存在する物質分布を表わす。(2) 式の左辺は時空の曲がり具合を表す量で、右辺は時空間に存在する物質の分布を表している。つまり、一般相対論におけるアインシュタイン方程式 (2) は時空の曲がり（重力）と物質分布が相互に規定しあう様子を記述している。

例えば完全流体が時空中に存在すると、そのエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + P g_{ab} \quad (3)$$

となる。ここで、 (u_a, ρ, P) はそれぞれ流体の4元速度・エネルギー密度・圧力である。ただし、本稿では専ら真空 ($T_{ab} = \Lambda = 0$) の時空を考えていくことを強調しておく。真空でもブラックホールは存在するし、ブラックホール（時空そのもの）が流体として振る舞うという話をしていくのである。

2.2 ブラックホール

ブラックホールの中で最も単純なシュバルツシルト・ブラックホールとはアインシュタイン方程式 (2) で $T_{ab} = \Lambda = 0$ （真空）としたときの解で

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad f(r) = 1 - \frac{r_0}{r} \quad (4)$$

と書かれる。 $d\Omega_2^2 := d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ は2次元単位球上の距離、 r_0 はブラックホールの重力質量 M と

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (5)$$

という関係にある定数である。ここで、 $r_0 = 0$ とすれば、 $f(r) \equiv 1$ となり 3 次元空間 (r, θ, ϕ) で三平方の定理が成り立つことが見て取れる。一方、 $r_0 > 0$ だと時空は曲がっていて、 $r < r_0$ なる領域から「外向き」の光を発射しても、原点 $r = 0$ に向って逆行するという摩訶不思議なことが起こる（原点には重力が無限大となる世にも恐ろしい「時空特異点」が待ちかまえている！）。どんなに頑張っても内側を見ることができないので、 $r = r_0$ という面は地平線、その内側がブラックホールと呼ばれるのである。

実は、有限の質量が小さい領域に凝縮されると、その近傍には光さえも逃げられなくなる領域が形成することは、ニュートン力学の範疇でも理解できる。仮に、質量 M で半径 r の星の表面から、質量 m のロケットが速さ v で発射されたとしよう。その時、このロケットが無限遠まで到達にする条件は、力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）保存の法則より

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0 \quad (6)$$

とかける。この式より、いわゆる脱出速度

$$v = v_{\text{esc}} := \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (7)$$

が星に固有な量として求まる。それ以上の速さでロケットを発射すれば（理想的には）惰性で宇宙へ行けるというのだ。すると、この世で最も速いとされる光はいつでも宇宙へ行けるだろうか気になる。それを見るために脱出速度の式 (7) で $v_{\text{esc}} \rightarrow c$ とすると、 $r \rightarrow r_0 = 2GM/c^2$ となることがわかる。このことは、天体の半径 r が質量から決まる半径 r_0 より小さければ、その天体の脱出速度は光速を超える、つまり、その天体からは何も逃げられないことを表している。¹

2.3 ブラックホール熱力学

ブラックホールの周囲に物質が漂っていると、ブラックホールはそれらを吸い込み、質量 M を増加させてブクブク太っていく。それに伴い、半径 r_0 や表面積 $A = 4\pi r_0^2$ も大きくなる。一般に、定常ブラックホールの面積が A から $A + \delta A$ ($\delta A \geq 0$) に変化したとすると、質量エネルギーの変化分 $\delta(Mc^2)$ は

$$\delta(Mc^2) = \frac{c^2}{8\pi G} \kappa \delta A \quad (8)$$

となることが知られている²。 κ は地平線上での重力加速度で表面重力と呼ばれ、定常ブラックホールの地平線上では一定であることが知られている（さきのシュバルツシルト・ブラックホールでは $\kappa = c^2/2r_0$ ）。

いま仮に、 Mc^2 を熱力学に登場する内部エネルギー U と同一視し、 κ を温度 T 、 A をエントロピー S と対応させると、(8) 式は熱力学の第一法則 $\delta U = T\delta S$ に見えなくもない。ホーキ

¹ 正確に言えば、ニュートン力学の範疇で光の運動を扱うことはできないし、この議論から正確な r_0 が得られたのはまぐれに過ぎないが、よく取り上げられる話である。

² もしブラックホールが角運動量 J や電荷 Q を持っていて、それらが変化すると (8) 式の右辺に δJ や δQ に比例する項も現れる。ここでは簡単のため、角運動量や電荷が変化しない過程のみを考える。

ングはブラックホールによる粒子生成の発見によって、このようなブラックホールと熱力学の対応が「本物」であることを知らしめた。もう少し詳しく言うと、彼は、ブラックホールが周囲の量子場を励起し、表面重力に比例する温度（ホーキング温度）

$$T = \frac{\hbar}{2\pi c k_B} \kappa \quad (9)$$

で黒体放射（ホーキング放射）することを証明したのである。ここで、 $\hbar$ はプランク定数、 k_B はボルツマン定数である。³この関係を(8)式へ代入すればエントロピー（ベッケンスタイン・ホーキング・エントロピー）と面積の比例定数も

$$S = \frac{c^3 k_B}{4G\hbar} A = \frac{k_B}{4\ell_P^2} A \quad (10)$$

と決まる。ここで、 $\ell_P := \sqrt{G\hbar/c^3}$ ($\sim 10^{-33}$ cm) はプランク長さと呼ばれる量である。かくして、定常なブラックホールは一定の温度・エントロピーをもつ熱力学系であることがわかったのである。蛇足かもしれないが、(10)式は4つの基本的自然定数($c, G, \hbar, k_B$)が入っている誠に魅力的なもので、この式をもって（「博士の愛した数式」 $e^{i\pi} = -1$ にも勝るとも劣らない）「この世で一番美しい公式」と呼ぶ人が居るとか居ないとか。

さて、上述の「ブラックホール熱力学」は大変有用だが、あくまで定常ブラックホールに対してのみ通用する。時間変動するある種の高次元ブラックホールには対応する「ブラックホール流体力学」があるというのが本稿の主旨だが、それを見る前に、高次元時空に住むブラックホールには幾つもの「相」があり、それらの不安定性によって「相転移」が起こり得ることを見よう。

3 高次元ブラックホール

3.1 ブラックストリング

最も簡単な高次元ブラックホール解はシュバルツシルト解(4)において

$$f(r) \rightarrow 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^n, \quad d\Omega_2^2 \rightarrow d\Omega_{n+1}^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

という一般化を施せば得られる⁴。このとき、半径 r_0 の $(n+1)$ 次元球 S^{n+1} が地平線を与えるが、5次元以上の高次元では球以外の地平線をもつ新たな「相」が出現する。その一つブラックストリングは、上のブラックホールに $+dz^2$ という操作で新たな空間 z を導入することで得られる $(n+4)$ 次元の解である。このとき、地平線は半径 r_0 の $(n+1)$ 次元球 S^{n+1} と z 方向に広がりを持つ円筒となる（図2[a]を参照）。

³この手の話では、 $c = G = \hbar = k_B = 1$ としてしまうのが慣習だが、本稿では、どこで熱力学や量子論が入ってきたのかを明確にするため、敢えて自然定数を残してある。うっとうしいと感じられる方は、頭の中で $c = G = \hbar = k_B = 1$ と読みかえて頂きたい。

⁴高次元の存在や高次元における(2)式の成立・非成立はそれ自体非常に興味深い問題だが、本稿の主旨から外れるので、ここでは仮定としよう。

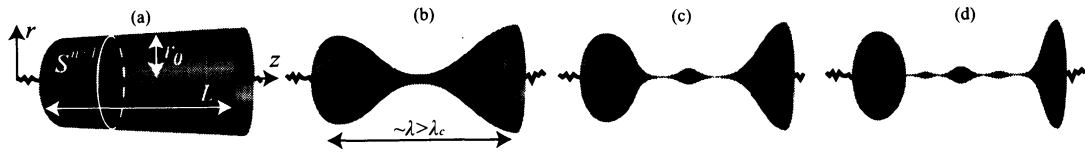


図 2: ブラックストリングの地平線がグレゴリー・ラフラーメ不安定性によって時間発展する様子 [(a)→(b)→(c)→(d) と時間が進む]。 $z = \text{一定}$ で切った地平線は $(n+1)$ 次元球 S^{n+1} となっており、 z 軸上 ($r = 0$) には特異点が存在すると考えられる。

3.2 グレゴリー・ラフラーメ不安定性

各々の相の安定性や相転移について知るには、(2) 式を用いた摂動解析が出発点となる。実は、長いブラックストリングにはグレゴリー・ラフラーメ (Gregory-Laflamme) 不安定性 [1] と呼ばれる高次元ブラックホールに特有の不安定性がある。正確に言うと、計量に

$$\delta g_{ab} \propto \exp(-i\omega t + ikz) \quad (12)$$

という摂動を加えたとき、 $\omega^2 < 0$ (ω が純虚数) となる波数 k ($0 < k < k_c \sim \sqrt{n}/r_0$) が存在する (図 3)。波長 $\lambda := 2\pi/k$ の言葉で言えば、ブラックストリングの長さ L が長い、つまり $L > \lambda_c := 2\pi/k_c \sim r_0/\sqrt{n}$ のとき不安定となる。

いま仮に、ブラックストリングの長さ L は一定として、半径 r_0 が十分大きいとしよう ($r_0 \gg L$)。すると、このブラックストリングは安定である。しかし、時間と共にホーキング放射で質量を失うので r_0 は小さくなっていき、 $r_0 \lesssim L$ となった時点で不安定となる。すると、ちょっとした外部攪乱 (揺らぎ) が加わった途端に運動が始まってしまう、その運動の最終状態は何かという問題が生じる⁵。非常にナイーブな予想は「揺らぎが増幅することにより地平線が切れて、ブラックホール相に転移する」である。何故なら、同じ質量で比べるとブラックホールのエントロピーはブラックストリングのそれより大きいからである。しかし、もし地平線が切れたら、それまで地平線の内側に隠れていた恐るべき特異点が顔を出してしまう⁶。さらに、ブラックストリングとブラックホールのエントロピーの大小関係も、実は次元を上げていくと $n \geq n_c := 10$ で逆転してしまい [3]、このナイーブな判定法をどこまで信じて良いか解らないし、最終状態が次元に依存する可能性もある。

最近の大きな進歩は昨年報告された数値シミュレーションによってもたらされた [5]。その結果によれば (5 次元では) 「地平線は一度ダンベルのような形になり [図 2(b)]、更に時間が経つと、取っ手部分に再び不安定性が発生し新たなコブができる [図 2(c)]。その過程を幾度か繰り返し [図 2(d)]、最終的に地平線は切れる」という。また、切れる直前にクビレ付近の地平線半径が $r(t) \propto (t_0 - t)$ (ここで t_0 は切れると予想される時刻) と自己相似的に振る舞うとい

⁵ グレゴリー・ラフラーメ不安定性は高速回転するブラックホールやドーナツ型のブラックリングなど多くの高次元ブラックホール相に共通なもので、この問題は高次元を考えると不可避免的に現れると言える。

⁶ 一般相対論では「宇宙検閲官仮説」というものが知られ、特異点は滅多なことでは地平線の外に現れないと信じられている。文献 [2] も参照。

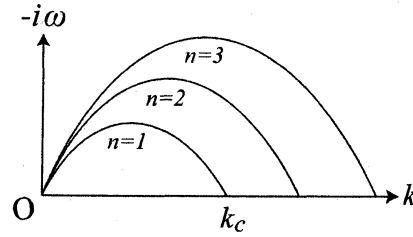


図 3: ブラックストリングに $\delta g_{ab} \propto \exp(-i\omega t + ikz)$ という摂動を与えたときの分散関係 $\omega(k)$ 。
長波長領域 $0 < k < k_c \sim \sqrt{n}/r_0$ で不安定 ($-i\omega > 0$) となる。

う報告もされた⁷。

上の数値実験の結果は非常に興味深い、注意も必要である。つまり、文字通り地平線が有限時間で切れるとは言い切れない点である。理由はいくつかあるが、例えば、彼らが時間発展を調べた地平線は「見かけの地平線」と呼ばれ本当の地平線（事象の地平線）とは異なること、切れる前に数値計算は必ず破綻する（コンピュータで特異点は扱えない）ことなどがあげられる。このような理由もあり、やはり解析的手法による裏付けが（少なくとも私は）欲しくなる。しかも、宇宙検閲官仮説の破れや自己相似性といった現象は、背後に潜む豊かな物理を垣間見せている。しかし、このような著しく動的過程では、最早ブラックホールが大域的な熱平衡状態にあるはずもなく、熱力学という便利な道具は無用である。そこで登場するのが流体・重力対応となる。

後に流体・重力対応を用いて、この不安定性が流体の音波不安定性として理解できることを示すが、歴史的には流体・重力対応の発見とは独立に、グレゴリー・ラフラーメ不安定性と流体に対するレイリー・プラトー不安定性の類似性が指摘されていたことも添えておく [6]。レイリー・プラトー不安定性とは、長細い流体を表面張力がちぎれさせる不安定性である（図 2 の地平線をそのまま流体表面と思えばよい）。レイリー・プラトー不安定性の最終状態は次元に依存し、高次元 ($n \gtrsim n_c$) ではちぎれないことも示されている [7]。

4 流体力学の復習

4.1 流体方程式を視点を変えて見る

ここで、流体力学の復習をしておこう。登場する物理量は質量密度 ρ 、圧力 P 、速度場 v^i ($i = 1, 2, \dots, p$) などである。これらは

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0, \quad \partial_t(\rho v^i) + \partial_j \Pi^{ij} = 0 \quad (13)$$

⁷このような巾解は、時間・空間の適当なスケールリングによって元の解に戻るなので自己相似解と呼ばれ、切れ方に（初期条件などに依存しないという）普遍性があることを示唆している。

という質量保存則と運動量保存則に従う。ここで、 $\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(0)} + \Pi_{ij}^{(1)}$ は運動量（流束）テンソルと呼ばれる量で

$$\begin{aligned}\Pi_{ij}^{(0)} &= \rho v_i v_j + P \delta_{ij} \\ \Pi_{ij}^{(1)} &= -\eta \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{p} \delta_{ij} \partial_k v^k \right) - \zeta \delta_{ij} \partial_k v^k\end{aligned}\quad (14)$$

と書かれ、 η はずれ粘性率、 ζ は体積粘性率である。 $\Pi_{ij}^{(0)}$ だけ考えれば完全流体に対するオイラー方程式が得られ、 $\Pi_{ij}^{(1)}$ まで考えれば散逸流体に対するナヴィエ・ストークス方程式が得られる。

ここで重要なのは次の事項である。まず、(13) 式が保存則の形をしているため（少なくとも形式的には）容易に相対論的方程式に拡張できる。その時は流体のエネルギー・運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$ として、二つの式をまとめて

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad x^\mu := (ct, z^i) \quad (15)$$

と書くことができる。もう一つは、(13) 式を解くのに必要な状態方程式 (P と ρ の関係) や η, ζ は流体力学の範疇では決定されず、分子や場のレベルまで遡ったミクロな理論から導出するか、実験で決めるしかない点である。最後に、運動量テンソルを $\Pi_{ij}^{(0)} + \Pi_{ij}^{(1)}$ と意味ありげな和の形に書いたが、その意味は $\Pi_{ij}^{(m)}$ が速度の m 階微分を含んでいるということである。より一般には、高階微分を含んだ項 $\Pi_{ij}^{(m \geq 2)}$ が潜んでいると考えられる。この事情は相対論的流体でも同じで、一般に運動方程式は

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m T_{(m)}^{\mu\nu} \quad (16)$$

と書ける。ここで、 ϵ は速度の微分を数える形式的なパラメータである。ただし、 $T_{(0)}^{\mu\nu}$ が密度や圧力などの熱力学量だけで表され $T_{(m \geq 1)}^{\mu\nu}$ がそれらの勾配に関わる量であることを考慮すると、 ϵ (< 1) を平衡状態からの外れ具合を表すパラメータと考える方が物理的である。

さて、後々の為に相対論的流体のエネルギー・運動量テンソルを $O(\epsilon)$ まで書き下すと

$$\begin{aligned}T_{(0)}^{\mu\nu} &= \rho u^\mu u^\nu + P P^{\mu\nu} \\ T_{(1)}^{\mu\nu} &= -2c\eta\sigma^{\mu\nu} - c\zeta P^{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha\end{aligned}\quad (17)$$

となる。 $T_{(0)}^{\mu\nu}$ は先ほど (3) 式に書いた完全流体のエネルギー・運動量テンソルを「空間方向」への射影テンソル $P^{\mu\nu} := u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}$ を用いて書き直しただけである。ここに、 $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ は平坦時空の計量である。 $T_{(1)}^{\mu\nu}$ が粘性項で、 $\sigma^{\mu\nu} := (1/2)P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}[\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - (2/p)P_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma]$ は歪みテンソルである。

4.2 音波不安定性

ここで流体の音波不安定性について触れておく。音波とは流体中を密度揺らぎなどが波動として伝搬していくものであった。例えば、静止した流体に $\delta\rho \propto \exp(-i\omega t + ikz)$ という揺ら

ぎを与えたとすると、(13) 式から（完全流体の近似で）

$$\omega^2 = c_s^2 k^2, \quad c_s^2 := \frac{dP}{d\rho} \quad (18)$$

という分散関係を得る。ここで c_s^2 は音速度の平方である。従って、もし状態方程式 $P = P(\rho)$ が $c_s^2 < 0$ となるようなものなら、揺らぎが指数関数的に増幅することになる。負の圧縮率を持っている（圧力を上げると膨張するヘンな）流体はこの意味で不安定である。

5 流体・重力対応の導出

準備が整ったので、いよいよ流体・重力対応がどのように導出され、その応用としてグレゴリー・ラフラーメ不安定性などの現象が流体力学の枠組みでどう記述されるか見ていこう [10]。

5.1 微分展開法：ブラックホールを緩やかに揺らす

ブラックストリングの地平線は z 方向に伸びていたが、ここではより一般にこのような方向が p (≥ 1) 個あるとしよう。つまり、 $(n+3)$ 次元ブラックホールに $+\sum_{i=1}^p (dz^i)^2$ という操作をして得られるブラック p ブレインと呼ばれる解を考える。以下の議論で S^{n+1} 上の角度座標は陽に現れないので省略し、陽に現れる全ての座標を

$$x^a := (x^\mu, r) := (ct, z^i, r) \quad (19)$$

と書いておこう。さて、このブラック p ブレインだが、 z^i 方向に並進運動（ブースト）させて一定の $(p+1)$ 元速度 u^μ を持たせることができる ($u^\mu u_\mu = -1$)。すると、この解は定数の組 (r_0, u^μ) で特徴付けられる。地平線半径 r_0 はホーキング温度と

$$T = \frac{n\hbar c}{4\pi k_B r_0} \quad (20)$$

と対応しているので、このブラック p ブレインは一定の温度を持った大域的熱平衡状態にあると言える。結論から言えば、ブラック p ブレインがこの大域的平衡状態から「少し」外れた

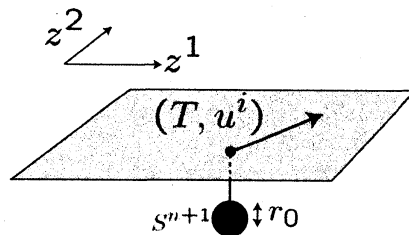


図 4: ブラック 2 ブレインの概念図

時、計量の揺らぎ δg_{ab} が従うアインシュタイン方程式 (2) が流体方程式 (16) に還元されるのである。

ちなみに、ブラック p プレーンのように z^i 方向の次元を $p (\geq 2)$ 個に増やすと、ブラックホールやブラックストリングのように、簡単にその姿を想像するのは難しくなる。一つの対処法はブラックストリング $p = 1$ の図 2 で「諦める」方法である。それでも、構わないがもう一つの対処法は、図 4 のように p 次元平面の各点に半径 r_0 のブラックホールがくっ付いているようなイメージを持つことである。

まず、一定だった温度 $T(r_0)$ と速度 u^μ を

$$(r_0, u^\mu) \rightarrow (r_0(x^\nu), u^\mu(x^\nu)) \quad (21)$$

と $x^\nu = (t, z^i)$ の関数に昇格させ、揺らがせてみよう。図 4 のイメージでは、平面（ホライズン）の各点に温度 T 、速度 u^μ の流体粒子があり、その速度や温度（ぶら下がった球の半径 r_0 ）が場所・時間によって変化するイメージである。ただし、解のなかの定数を勝手に関数にしたらアインシュタイン方程式 (2) は勿論満たされなくなる。再び解になるためには、元々のブラック p プレーン解の計量 $g_{ab}^{(0)}$ を $g_{ab}^{(0)} + \delta g_{ab}$ と変化させアインシュタイン方程式 (2) を再び書き下し、解きなおす必要がある。

そうして得られる摂動 δg_{ab} に関する式は非常に煩雑だが、流体・重力対応を導くという我々の目的の為に、厳密に解く必要はない。何故なら、**流体描像が期待されるのは平衡状態から「ほんの少し」外れた状態だからである**。これを正確に表すなら、未知の量をまとめて

$$X := (r_0(x^\nu), u^\mu(x^\nu), \delta g_{ab}(x^a)) \quad (22)$$

と書き、これらの x^μ 方向の微分で決まるスケール

$$\lambda := \left| \frac{X}{\partial_\mu X} \right| \quad (23)$$

(図 2(b) を見よ) が、もともと「背景」にあるスケール r_0 に比べて十分大きい ($\lambda \gg r_0$) ということである。従って、まず微量量 r_0/λ で全ての未知関数を

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m X_{(m)}, \quad \epsilon := \frac{r_0}{\lambda} \ll 1 \quad (24)$$

と展開する。そうして展開したものをアインシュタイン方程式 (2) へ代入すれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m G_{(m)}^{ab} = 0 \quad (25)$$

というかたちで摂動方程式が得られるから、この摂動方程式を $m = 1$ から逐次的に解いていけばよい。実際には、アインシュタイン方程式 (2) を書き下すとき、 ∂_μ が $r_0 \partial_\mu \ln X = O(\epsilon)$ という組み合わせで現れるので、アインシュタイン方程式 (2) において機械的に $\partial_\mu \rightarrow \epsilon \partial_\mu$ という置き換えをすれば、摂動方程式 (25) が得られる。このような方法は一般に**微分展開法 (derivative expansion)**と呼ばれ、物理系に二つ以上のかけ離れたスケールがあるときに、**運動方程式の独立変数を減らすのに用いられる常套手段の一つ**である。今の場合、後述するように、独立変数の r が系から消える。流体分野では、非線形浅水波を記述する KdV (コルテヴェーグ・ドフリース) 方程式を流体方程式から導出する際に、同様の方法を経験した方も多いと思われる [11]。

一般に摂動アインシュタイン方程式 $G_{(m \geq 1)}^{ab} = 0$ は (x^μ, r) を独立変数とする偏微分方程式である。しかし、 r に関しては厳密に積分できてしまい、地平線 ($r = r_0$) や無限遠方 ($r = \infty$) の正則性という境界条件から積分定数なども一意に決まる。すると、 x^μ だけを独立変数とする偏微分方程式が残る。ここで、(24) 式で定義した二つのスケールの比 $\epsilon = r_0/\lambda$ を、流体方程式 (16) における ϵ (速度微分の個数) と同一視すると、(驚くべき事に) 残ったアインシュタイン方程式が (16)(17) 式にある相対論的流体方程式 $\partial_\mu T_{(m-1)}^{\mu\nu} = 0$ のかたちに書けるのである。

具体的には次のようになる。 $(n+3+p)$ 次元の 1 次の摂動方程式 $\epsilon G_{(1)}^{ab} = 0$ は

$$P = -\frac{\rho}{n+1} = -\frac{\Omega_{n+1}c^4}{16\pi G}r_0^n \quad (26)$$

で与えられる圧力 P とエネルギー密度 ρ を定義すれば、 $(p+1)$ 次元オイラー方程式 $\partial_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0$ と見なせる。ここで、 Ω_{n+1} は $(n+1)$ 次元単位球の面積である。更に、2 次の摂動方程式 $\epsilon G_{(1)}^{ab} + \epsilon^2 G_{(2)}^{ab} = 0$ は

$$\eta = \frac{\Omega_{n+1}c^3}{16\pi G}r_0^{n+1}, \quad \zeta = \frac{\Omega_{n+1}c^3}{8\pi G}r_0^{n+1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n+1} \right) \quad (27)$$

という粘性係数を定義すれば、ナヴィエ・ストークス方程式 $\partial_\mu (T_{(0)}^{\mu\nu} + \epsilon T_{(1)}^{\mu\nu}) = 0$ と見なせる。
8

第4節の流体力学の一般論を思い出しながら、上の議論を見渡してみよう。すると、「ミクロ」な理論としての重力方程式 (2) から現象論的方程式 (16) が導かれた構図になっている。何故なら、状態方程式 (26) や粘性係数 (27) などが地平線の半径 r_0 という重力の量で与えられているからである。一般形 (16) に現れる高階微分の項 $T_{(m \geq 2)}^{\mu\nu}$ も $G_{(m \geq 3)}^{ab} = 0$ から (原理的には) いくらでも得ることができる。

5.2 グレゴリー・ラフラーメ不安定性の再現

さて、状態方程式 (26) から音速を計算してみると

$$c_s^2 := \frac{dP}{d\rho} = -\frac{1}{n+1} < 0 \quad (28)$$

となり、この「ブラック p プレーン流体」は音波不安定であることがわかる。まさに、この点が元々のブラック p プレーンがグレゴリー・ラフラーメ不安定であることを反映しているのである。さらに、粘性 (27) まで含めて音波を調べると、その分散関係は図3の様子を見事に再現する [10]。

この辺で、「線形摂動の分散関係くらいなら再現できても、非線形領域の重力現象は流体では記述できないのでは？」と思った方もいるだろう。しかし、あなどることなかれ。得られた流体描像は $\epsilon \sim |\partial_z r_0| \ll 1$ さえ満たされていれば有効である。言い換えれば、 r_0 や $|u^\mu|$ と言った物理量が大きすぎちゃいけない、小さすぎちゃいけないという制限はなく、例えば地平線が

⁸例えばブラックストリング ($p=1$) に対しては $(r_0(t, z), u^z(t, z))$ のみを未知関数とする偏微分方程式の組を得る。それらは元々の重力方程式 (2) とは比較にならないほど単純化されている点、流体力学において培われた多くの手法を適用できる点で非常に有用である。

切れそうな状況 ($r_0 \rightarrow 0$) でも流体記述が十分に通用する (可能性がある)。数値実験 [5] に見られたような非線形現象が、近い将来ブラックホール流体力学で解明されると思われる。

参考のために、筆者による現時点での予想 (妄想?) を述べておこう。筆者は、上で導かれた流体方程式を用いてグレゴリー・ラフラーメ不安定性を調べれば、ブラックストリングがちぎれる様子を目の当たりにできると考えている。ちぎれる直前の自己相似的振る舞い $r_0 \propto (t_0 - t)$ なども再現できると期待している。ただし、図 2 で見たようなクビレ部分に新たに発生するコブや臨界次元 n_c の存在を流体サイドで確認するには、 $\partial_\mu T_{(m \geq 2)}^{\mu\nu} = 0$ に相当する高次の効果が必要とも感じている。

6 結び

本文では議論の見通しを良くするため、真空 ($T_{ab} = \Lambda = 0$) におけるアインシュタイン方程式 (2) を用いた流体・重力対応を見てきた。しかし、始めに対応が確立されたのは、負の宇宙項 ($\Lambda < 0$) がある場合、いわゆる AdS/CFT (anti-de Sitter/conformal field theory) 対応の文脈に於いてである [12]。その場合、(少し専門的な話に成らざるを得ないが) 10 次元ブラック 3 ブレインから得られる流体力学は、量子色力学のような 4 次元ゲージ理論の長波長近似に相当すると期待されている。そこでは、クォークの閉じ込め・非閉じ込めに相当する 1 次相転移の機構を取り入れることが可能で、流体・重力対応の枠組みで表面を持った流体を自然に考えることができる [13]。すると、グレゴリー・ラフラーメ不安定性を (音波不安定性ではなく) レイリー・プラトー不安定性として再現することも可能となる [14]。レイリー・プラトー不安定性では流体表面の切れ方が自己相似的 $r(t) \propto (t_0 - t)$ になることはよく知られており [15, 16]、より詳細な解析が待たれる。

また、本文では「流体でブラックホールを理解する」という立場を貫いたが、実は逆の立場もある (AdS/CFT 対応に関する研究も含めれば、むしろ後者が主流と言える (AdS/CFT 対応に関しては、下の補足を参照))。例えば、ナヴィエ・ストークス方程式には一般解の存在証明や乱流の記述など重要かつ難解な課題が残されているし、相対論的ナヴィエ・ストークス方程式には因果律の破れや平衡状態の不安定性などの懸念もある。流体力学の背後に潜むのが「単なる」ブラックホールの運動というなら、上のような流体力学における諸問題が重力理論によって解決される可能性もあるだろう。

補足

本稿で見てきた流体とブラックホールの対応は、AdS/CFT 対応、より一般的にはゲージ・重力対応と呼ばれる超弦理論の研究で見つかった、重力理論とゲージ理論の間の双対性の一側面として語られることが多い。これに関しては、非専門家向けの優れたレビュー [17, 18] が存在するが、ここでほんの少しだけコメントしたい。

大雑把に言えば、本文で見たのは「ブラックホールを記述するアインシュタイン方程式に「浅水波近似」をかませば、ナヴィエ・ストークスが出てくる」ことである。それが図 5 にある流体・重力対応の正体である。この対応は数学的なものであり、その意味で疑いの余地はない。しかし、そこに登場したブラックホールや流体が本当にこの世のものか、という問いを發した

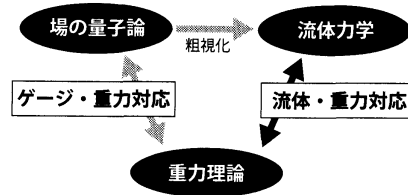


図 5: 流体・重力対応はゲージ・重力対応の一側面と見なすこともできる。

時点で、物理の問題になる。5 節で扱った流体がこの世のものとは誰も言っていないが、負の宇宙項がある場合のブラックホールに対応する流体が、RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) や LHC (Large Hadron Collider) といった大型加速器で実現されているクォーク・グルーオン・プラズマである（とまでは言わないが、同種のものである）可能性が盛んに研究されている。

その根拠の一つが、これまでに膨大な理論的証拠が蓄積されてきている、図 5 のゲージ・重力対応である。ゲージ理論（量子色力学などの場の量子論）も適当に粗視化すれば流体的記述があるはずで、その粗視化の結果、流体・重力対応がゲージ・重力対応に置き換わると考えられるのである。実験的な証拠もある。RHIC におけるクォーク・グルーオン・プラズマが非常に小さい粘性 η を持った流体として振る舞うことが実験的にわかったのである。しかも、その小さな粘性（単位エントロピー密度当たり）は、負の宇宙項がある重力理論から求めた値

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \quad (29)$$

に近いというのだ [19]。

上の結果 (29) は、5 節で扱った宇宙項が無い場合からも導かれるので見ておこう。ブラック p ブレインのホライズンは無限に広がっているので、ベッケンスタイン・ホーキング・エントロピーが意味を持つのは、単位 p 次元体積当たりのエントロピーであり、(10) 式の類推から

$$s = \frac{\Omega_{n+1} c^3 k_B}{4G\hbar} r_0^{n+1} \quad (30)$$

で与えられることがわかる。この式と (27) 式を見ると、 s の r_0 に対する依存性が粘性係数 η や ζ と同様であることがわかり、比をとると (29) 式を得る。

参考文献

- [1] R. Gregory and R. Laflamme: “Black strings and p-branes are unstable,” Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2837, [arXiv:hep-th/9301052].
- [2] G. T. Horowitz and K. Maeda: “Fate of the black string instability,” Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 131301, [arXiv:hep-th/0105111].
- [3] E. Sorkin: “A critical dimension in the black-string phase transition,” Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 031601, [arXiv:hep-th/0402216].

- [4] H. Kudoh and U. Miyamoto: “On non-uniform smeared black branes,” *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 3853, [arXiv:hep-th/0506019].
- [5] L. Lehner and F. Pretorius: “Black Strings, Low Viscosity Fluids, and Violation of Cosmic Censorship,” *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 101102, [arXiv:1006.5960 [hep-th]].
- [6] V. Cardoso and O. J. C. Dias: “Gregory-Laflamme and Rayleigh-Plateau instabilities,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181601. [arXiv:hep-th/0602017].
- [7] U. Miyamoto and K. i. Maeda: “Liquid bridges and black strings in higher dimensions,” *Phys. Lett. B* **664** (2008) 103, [arXiv:0803.3037 [hep-th]].
- [8] M. M. Caldarelli, O. J. C. Dias, R. Emparan and D. Klemm, “Black holes as lumps of fluid,” *JHEP* **0904**, 024 (2009), [arXiv:0811.2381 [hep-th]].
- [9] U. Miyamoto: “Curvature driven diffusion, Rayleigh-Plateau, and Gregory-Laflamme,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 026001, [arXiv:0804.1723 [hep-th]].
- [10] J. Camps, R. Emparan and N. Haddad, “Black Brane Viscosity and the Gregory-Laflamme Instability,” *JHEP* **1005** (2010) 042, [arXiv:1003.3636 [hep-th]].
- [11] 巽友正『連続体の力学』岩波書店 1995
- [12] S. Bhattacharyya, V. E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, “Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity,” *JHEP* **0802** (2008) 045, [arXiv:0712.2456 [hep-th]].
- [13] O. Aharony, S. Minwalla and T. Wiseman: “Plasma-balls in large N gauge theories and localized black holes,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 2171, [arXiv:hep-th/0507219].
- [14] K. i. Maeda and U. Miyamoto: “Black hole-black string phase transitions from hydrodynamics,” *JHEP* **0903** (2009) 066, [arXiv:0811.2305 [hep-th]].
- [15] J. Eggers, “Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows,” *Rev. Mod. Phys.* **69**, 865 (1997).
- [16] U. Miyamoto: “One-Dimensional Approximation of Viscous Flows,” *JHEP* **1010** (2010) 011, [arXiv:1007.4302 [hep-th]].
- [17] 夏梅誠、「線形応答理論で学ぶ AdS/CFT 双対性」原子核研究 54-3(2010)110
- [18] 中村真、夏梅誠「超弦理論がつなぐブラックホールと流体力学」物性研究 94-3(2010)350
- [19] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 111601 (2005) [hep-th/0405231].