

2 次多項式写像の kneading sequences

大阪大学・基礎工学部 亀山敦 (Atsushi KAMEYAMA)

I. 準備その 1 — interval maps

単位区間 $I = [0, 1]$ の上の力学系はその critical point の挙動が本質的な役割をはたす。特に unimodal map f に対してその kneading sequence $k(f)$ を定めることができて、これで多くのことが記述される。

定義 $f: I \rightarrow I$ が unimodal とは $\exists c \in I$ s.t $I_A = [0, c]$ では単調増加, $I_B = [c, 1]$ では単調減少になるような連続写像のことである。

unimodal map f が与えられたとき, よく知られているように I の各点 x に対し itinerary とよばれる A, B, C からなる列 $i_f(x) = w_1 w_2 w_3 \dots$ が定義されるがここでは後の都合上普通とは違うやり方で次のようにふたつの A, B からなる列の組として定義する。

定義 $x \in I$ に対しその itinerary とは $i_f(x) = \{w_1 w_2 \dots, u_1 u_2 \dots\}$ 。ただし

$$w_i = \begin{cases} A, & f^{i-1}(I^+) \subset I_A, \\ B, & f^{i-1}(I^+) \subset I_B \end{cases}$$

$$u_i = \begin{cases} A, & f^{i-1}(I^-) \subset I_A, \\ B, & f^{i-1}(I^-) \subset I_B \end{cases}$$

ここで $I^+ = (x, x + \varepsilon)$, $I^- = (x - \varepsilon, x)$ は小さい開区間で ε は i によって変わってもよいとする。

また $f(c)$ の itinerary $i_f(f(c))$ を $k(f)$ と書き f の kneading sequence という。

明らかに $y = f(x)$ なら $i_f(y) = \sigma(i_f(x))$ 。ただし σ は shift map。また実はほとんどの $x \in I$ に対して $w_1 w_2 \dots$ と $u_1 u_2 \dots$ は一致することに注意しておく。

A, B からなる無限列全体に次のように順序をいれる。ふたつの列 $\underline{w} = w_1 w_2 \dots$

と $\underline{u} = u_1 u_2 \dots$ が $\underline{w} < \underline{u}$ とは $1 \leq i \leq k-1$ で $w_i = u_i, w_k \neq u_k$ であって

$$\begin{cases} w_k = A, u_k = B, & (w_1, \dots, w_{k-1} \text{ までの } B \text{ の個数が偶数のとき}) \\ w_k = B, u_k = A, & (w_1, \dots, w_{k-1} \text{ までの } B \text{ の個数が奇数のとき}) \end{cases}$$

となることである。

この順序は $\{i_f(x) | x \in I\}$ の上にも自然に定義できて

$$i_f(x) < i_f(y) \Rightarrow x < y$$

$$x < y \Rightarrow i_f(x) \leq i_f(y)$$

となる。

また $k(f)$ は任意の $n \geq 0$ に対し $\sigma^n(k(f)) \leq k(f)$ という性質を持っている。この性質を満たす記号列を *maximal* であるという。また $x \in I$ が *f-maximal* であるというのを任意の $n \geq 0$ に対し $f^n(x) \leq x$ で定義する。

逆に *maximal* な記号列に対しそれを *kneading sequence* に持つような *unimodal map* が存在する。たとえば特別な family $F_a(x) = ax(1-x)$ を考えると、 $a \in [0, 4]$ で $k(f_a)$ として *maximal* な列がすべて現れる。またこの場合 $a < a' \Rightarrow k(f_a) \leq k(f_{a'})$ という単調性を持っている。

さてここで与えられた *maximal* な記号列を持つ *unimodal map* をつくることを試みる。

まず写像

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

を考える。 $\Sigma = \{A, B\}^{\mathbb{N}}$ とする。これはすべての記号列の集合である。位相は積位相をいれる。すると連続な全射 $\pi: \Sigma \rightarrow I$ があって

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\pi} & I \\ \sigma \downarrow & & \downarrow F \\ \Sigma & \xrightarrow{\pi} & I \end{array}$$

となっている。この図式から $i_F(x) = \pi^{-1}(x)$ がわかる。つまり F には **itinerary** としてすべての記号列が現れる。明らかに $x \in I$ が F -maximal であることと $i_F(x)$ が maximal であることは同値である。

maximal な記号列 $\underline{w} = w_1 w_2 \cdots \in \Sigma$ が与えられたとする。これを **kneading sequence** に持つような **unimodal map** G をつくる。

1. $\underline{w}$ が **eventually periodic** な場合を考える。つまり $\{\sigma^n(\underline{w})\}_{n \geq 0}$ が有限とする。 $n \geq 0$ に対し $a_n = \pi(\sigma^n(\underline{w}))$ とする。

1.1. $\underline{w}$ が **strictly preperiodic** の場合。つまり $\underline{w}$ じしんは **periodic** でないがある $n > 0$ に対し $\sigma^n(\underline{w})$ が **periodic** となる場合。 $a_{-1} = \frac{1}{2}$ とおく。 $G: I \rightarrow I$ を $n \geq -1$ に対し $G(a_n) = a_{n+1}$ となるよう **piecewise linear** にとれば G は **unimodal map** で $k(G) = \{\underline{w}\}$ となる。

1.2. $\underline{w}$ じしんが **periodic** な場合。同様に $n \geq 0$ で $G(a_n) = a_{n+1}$ となるよう G を **piecewise linear** にとる。ただしこのときは $\underline{w}$ の周期が p とすれば $k(G) = \{\underline{w}, w_1 w_2 \dots w_{p-1} B\underline{w}\}$ である。

2. $\underline{w}$ が **eventually periodic** でない場合。 $E_1 = (\pi(\underline{w}), 1]$, $E_n = G^{-n+1}(E_1)$ とする。 $\{E_n\}$ は互いに **disjoint** な開集合の族になり $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ とおくと E は I で **dense** な開集合。また $K = I \setminus E$ は非加算集合である。 E は开区間の **disjoint union** になっているのでその各区間の端点を同一視することにより $K/\sim$ は I と同相になる。

$$\begin{array}{ccc} F: K & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ G: I & \longrightarrow & I \end{array}$$

と G を定義すれば $k(G) = \{\underline{w}\}$ となる **unimodal map** である。

この 2 の場合について同値関係 $\sim$ がどのようなものか調べてみる。 $E_1 = (\pi(\underline{w}), 1]$ なので $E_2 = (\pi(A\underline{w}), \pi(B\underline{w}))$ である。同じく E_n の 2^{n-2} 個の成分である开区間は長さ $n-2$ の有限列 u に対し $(\pi(uA\underline{w}), \pi(uB\underline{w}))$ または $(\pi(uB\underline{w}), \pi(uA\underline{w}))$ となる。すなわち $x, y \in K$ が $x \sim y$ とはある有限列 u があって $\pi^{-1}(x) = uA\underline{w}$, $\pi^{-1}(y) = uB\underline{w}$ となることである。次節でみるようにこのような同値関係で記号力学系を割った商空間を **self-similar set** という。ここでの $I = K/\sim$ はある **self-similar set** の部分とみなすことができる。

II. 準備その2 —self-similar sets.

定義 位相空間 K とその上の連続写像の集まり $\{F_i\}_{i=1}^d$ の組 $(K, \{F_i\}_{i=1}^d)$ が *self-similar* であるとは連続な全射 $\pi: \Sigma \rightarrow K$ があって各 $i = 1, 2, \dots, d$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\pi} & K \\ \sigma_i \downarrow & & \downarrow F_i \\ \Sigma & \xrightarrow{\pi} & K \end{array}$$

となることである。ただし $\Sigma = \{1, 2, \dots, d\}^{\mathbb{N}}$ で σ_i は $x_1 x_2 \cdots \in \Sigma$ を $i x_1 x_2 \cdots$ にうつす写像である。

これは topological には Σ 上の同値関係で

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Rightarrow \sigma_i(\underline{x}) \sim \sigma_i(\underline{y}) \text{ for all } i$$

を満たすものによる商空間 $\Sigma/\sim$ と定義しても同じことである。

以降、次の条件を満たすもののみを考える。

条件 (1) $d = 2$ 。

(2) F_i は単射 ($i = 1, 2$)。

(3) $F_1(K) \cap F_2(K)$ は一点。

(4) K は距離付け可能。

(5) $p \in F_1(K) \cap F_2(K)$ は $F_1^{-1}(p) = F_2^{-1}(p)$ を満たす。この p を *connecting point* と呼び $\sigma(\pi^{-1}(p)) \in \Sigma$ を *connecting sequence* と呼ぶ。これは力学系における *kneading sequence* に対応したものである。

この条件のもとで *connecting sequence* が等しい *self-similar set* は同相である。つまり topological には *connecting sequence* ですべてが定まる。 K は連結で単連結になる。さらに $x, y \in K$ について x と y を結ぶ *simple arc* がただひとつだけある。そ

れを $[x, y]$ とかく。また $G: K \rightarrow K$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\pi} & K \\ \sigma \downarrow & & \downarrow G \\ \Sigma & \xrightarrow{\pi} & K \end{array}$$

これは F_1, F_2 の逆写像になる。この G を $(K, \{F_i\})$ の *dynamics* という。

もし p が G によって eventually periodic なら $D = \{G^n(p)\}_{n \geq 0}$ が有限なので $T = \bigcup_{x, y \in D} [x, y]$ は tree になり T は G で不変である。つまり $G(T) \subset T$ 。一般には D は無限なので不変な tree が存在するかどうかはいえない。ところが前の節での考察より次のことがわかる。

定理 上の条件のもと, self-similar set $(K, \{F_i\})$ に対し connecting sequence が eventually periodic でない maximal な記号列なら K のコンパクト部分集合 $I = [G(p), G^2(p)]$ があって I は p を含み $G(I) = I$ となる。つまり不変な部分集合で単位区間と同相なものがある。

なお, connecting sequence が eventually preperiodic なときも主張は正しい。

III. 準備その3 —complex dynamics.

2次多項式写像の族 $f_c(z) = z^2 + c$ を考える。*Julia* 集合 J_c , *Mandelbrot* 集合 M など を次のように定義する。まず

$$K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid f_c^n(z) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)\}$$

とし *filled-in Julia* 集合とよぶ。*Julia* 集合を $J_c = \partial K_c$ とする。*Mandelbrot* 集合は

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ が連結}\}$$

または同値な定義として

$$= \{c \in \mathbb{C} \mid f_c^n(0) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)\}$$

と定義する。

2次多項式 f_c に対し無限遠点の近傍 U, V があって等角写像 $\phi_c: U \rightarrow V$ で

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi_c} & V \\ f_c \downarrow & & \downarrow z \mapsto z^2 \\ U & \xrightarrow{\phi_c} & V \end{array}$$

となるようなものが存在する。 U としてできるだけ広い領域をとっておく。実際 $c \in \partial U$ となるようにできる。とくに $c \in M$ のときは $U = \mathbf{C} \setminus K_c$ になる。

半直線 $\{te^{2\pi i\theta} | t > 1\}$ を ϕ_c でひきもどした l_θ を角 θ の *external ray* という。 $t \rightarrow 1$ のとき l_θ が J_c 上の点 z に収束すれば l_θ が z に *land* するといい、 θ を z の *external angle* という。ただし複数の *external ray* がひとつの点に *land* することがあるので z の *external angle* はひとつに定まるとは限らない。

f_c の critical point 0 の orbit が有限のときつまり 0 が eventually preperiodic になるとき f_c を *postcritically finite* という。このとき $c \in M$ となることに注意。 f_c が *postcritically finite* のときはすべての *external ray* が *land* する。このようなときは $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ から J_c への全射 φ_c が自然に ϕ_c^{-1} の拡張として定義される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \xrightarrow{\varphi_c} & J_c \\ \alpha \downarrow & & \downarrow f_c \\ \mathbf{T} & \xrightarrow{\varphi_c} & J_c \end{array}$$

ここで $\alpha(x) = 2x \pmod{1}$ である。明らかに $z \in J_c$ の *external angle* は $\varphi_c^{-1}(z)$ になる。 $z \in J_c$ の *external angle* を $A = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ とすると $f_c(z)$ の *external angle* は $\{\frac{\theta}{2} | \theta \in A\}$ 。

とくに 0 が *strictly preperiodic* になるような c (これを *Misiurewicz point* とよぶ) に対しては 0 が (すなわち c も) J_c に含まれる。

$\mathbf{T}$ の点 x は有理数なら α の eventually periodic point になっているのだが、もっと詳しくいうと

$$x \text{ が } \alpha \text{ の periodic point} \iff x = \frac{q}{p}, p \text{ と } q \text{ は互いに素で } p \text{ は奇数}$$

$$x \text{ が } \alpha \text{ の strictly preperiodic point} \iff x = \frac{q}{p}, p \text{ と } q \text{ は互いに素で } p \text{ は偶数}$$

ゆえに $z \in J_c$ が periodic ならその external angle は分母が奇数の有理数で, strictly preperiodic なら分母が偶数の有理数になる。逆も正しい。とくに Misiurewicz point c に対して J_c に関する c の external angle は分母が偶数である有理数となる。

$\Phi: \mathbf{C} \setminus M \rightarrow \mathbf{C} \setminus \overline{D}$ を $\Phi(c) = \phi_c(c)$ と定義すると等角写像になる。ここで $D = \{|z| > 1\}$ 。こちらにも同様に external ray, external angle などを定義することができる。つまり $\gamma_\theta = \Phi^{-1}(\{te^{2\pi i\theta} | t > 1\})$ 等とする。 θ が有理数のときは external ray は land する。 θ が分母が偶数のときは Misiurewicz point に land し, 分母が奇数のときには f_c が eigenvalue の絶対値が 1 となる周期点 (parabolic な周期点) を持つような c に land する。よって $\mathbf{T}_Q = \mathbf{T} \cap Q$ とすると写像 $\psi: \mathbf{T}_Q \rightarrow \partial M$ が存在する。

ここで重要なことは J_c に関する external angle と M に関する external angle が対応していることである。つまり c が Misiurewicz point のとき c での M に関する external angle と J_c に関する external angle は一致し, f_c が parabolic な周期点を持つときは c での M に関する external angle は J_c に関する external angle になっている。

postcritically finite な f_c の Julia 集合は $\mathbf{T}$ の連続像として表されることを見てきたがそれとは別の表し方もある。

定理 postcritically finite な 2 次多項式 f_c に対し 0 が strictly preperiodic なら f_c^{-1} の branch F_1, F_2 がとれて $(J_c, \{F_i\}_{i=1,2})$ は self-similar で前節の条件を満たす。

0 が periodic ならある self-similar set K があって $J_c = \rho(K)$ ただし ρ は有限個の点を除いて 1 対 1 の連続写像。この場合の K は前節の条件 (2), (5) を満たさない。

なお, この定理は次数 d が 2 以上でも同様に成り立つ。その場合は 0 のかわりに $d-1$ 個の critical point について考えればよい。

後者の場合についてもう少し正確にいう。0 の周期を k とする。 U を 0 の immediate attracting basin とする。 U は単位円板と同型になる。 ∂U 上に f_c^k の不動点がひとつだけあるのでそれを p とする。 p の軌道を $P = \{p, f_c(p), \dots, f_c^{k-1}(p)\}$ とする。 $J_c \setminus P$ では f_c^{-1} の branch $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ がとれる。 $K = (J_c \setminus P) \cup P' \cup P''$ とする。ここで P', P'' は P のコピーで, K の位相を適当にいれると $\tilde{F}_i$ が $F_i: K \rightarrow K$ に拡張できて $(K, \{F_i\}_{i=1,2})$ は self-similar になる。そして ρ を $x \in P$ に対してその対応する P', P''

の点 x', x'' を x にうつすようにとればよい。

self-similar set として表されるということは記号力学系 Σ の連続像として表されるということである。つまり Julia 集合 J_c の各点は記号列で書けることになる。ところで external angle がわかればそれが Σ のどの記号列に対応しているかが計算できる。したがってそれを使えば J_c 上の一点 z に land する external ray はどれとどれかということがわかることになる。

では Mandelbrot 集合 M に関する external ray のどれとどれが同じ点に land するかというのはどうしたらわかるだろうか。 $c, c' \in \partial M$ について f_c と $f_{c'}$ の力学系が同じなら (正確には qc-conjugate なら) $c = c'$ である。力学系を見るには J_c 上の力学系だけを見ればよく, さらには Hubbard tree と呼ばれる J_c の部分の上の力学系だけを見ればよい。だから同じ Hubbard tree を導くような external ray は同じ点に land することになる。

0 が strictly preperiodic なときは 0 が $(J_c, \{F_i\})$ の connecting point になっているので前節のように invariant な tree T が存在する。この T を (そのうえの力学系 $f_c|T$ もこめて) Hubbard tree という。 T を 0 でふたつの部分に分ける。 $T = T_A \cup T_B \cup \{0\}$ ただし $\varphi_c(0)$ を含むほうを T_B とする。前々節と同じように $f_c|T$ の kneading sequence を定めることができる。これは $(J_c, \{F_i\})$ の connecting sequence と一致している。もちろん dynamics G は $f_c|T$ になる。しかし kneading sequence だけでは Hubbard tree は決まらないのである。kneading sequence ともうひとつ必要な情報は T の $\mathbf{C}$ への埋め込まれ方である。実際 kneading sequence が同じでも $\mathbf{C}$ 上の力学系としては異なるものがある。そしてこのふたつが与えられれば f_c は完全に決まる。ゆえに external angle からこのふたつを求める方法を考えればよいことになる。

0 が periodic な場合も Hubbard tree を定義することができる。しかしこのときは J_c の部分ではなくもう少し別の方法を使う。詳しくは略すが同様に kneading sequence と Hubbard tree の埋め込まれ方で f_c が決まる。

IV. Main result

前節のような external angle という考え方を使えば区間力学系の kneading sequence の順序構造がわかりやすく理解され, それは tree 上の力学系の場合にも自然に適用できる。そのためにこの節では Mandelbrot 集合と Julia 集合の関係の中の external angle の構造だけをとりだしたものを考えることにする。以下 $\mathbf{T}$ の点を表す記号で θ 等はパラメーター, t 等は相空間の点として使われる。

さきほどと同じく $\alpha: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ を $x \mapsto 2x \pmod{1}$ とする。 $\theta \in \mathbf{T}$ をひとつ固定したとき $\frac{\theta}{2}$ と $\frac{\theta+1}{2}$ で $\mathbf{T}$ をふたつの开区間に分け A_θ, B_θ と名づける。ここで 0 を含むほうを B_θ とする。また $C_\theta = \{\frac{\theta}{2}, \frac{\theta+1}{2}\}$ とする。

定義 各点 $t \in \mathbf{T}$ に対しその itinerary を $i_\theta(t) = \{x_1 x_2 \dots, y_1 y_2 \dots\}$ とする。
ただし

$$x_i = \begin{cases} A, & \alpha^{i-1}(I^+) \subset A_\theta \\ B, & \alpha^{i-1}(I^+) \subset B_\theta \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} A, & \alpha^{i-1}(I^-) \subset A_\theta \\ B, & \alpha^{i-1}(I^-) \subset B_\theta \end{cases}$$

$I^+ = (t, t + \varepsilon), I^- = (t - \varepsilon, t)$ は小さい开区間で ε は i に依存して小さくしてよい。 θ の kneading sequence を $k(\theta) = i_\theta(\theta)$ で定義する。

注意 ほとんどの場合 $\#i_\theta(t) = 1$ である。 $\#i_\theta(t) = 2$ になるような t は $n \geq 0$ があって $\alpha^n(t) \in C_\theta$ になるものに限られる。また $\alpha(t) = s$ なら $\sigma i_\theta(t) = i_\theta(s)$ である。

補題 1 θ が有理数のとき,

t が有理数 $\iff i_\theta(t)$ は eventually periodic。

証明は略す。 t が有理数でないときはなりたたない。実際無理数 θ で $i_\theta(\theta)$ が periodic になるものがある。しかし $i_\theta(\theta)$ が strictly preperiodic になるような無理数はない。

$\mathbf{T}$ 上に同値関係 $\sim_\theta$ を次で定義する。

$$i_\theta(t) \cap i_\theta(s) \implies t \sim_\theta s$$

$$t \sim_\theta s, s \sim_\theta r \implies t \sim_\theta R$$

この同値関係 $\sim_\theta$ で $\mathbf{T}$ を割った商空間 $\mathbf{T}/\sim_\theta$ を K_θ と書く。自然な全射 $\tilde{\varphi}_\theta: \mathbf{T} \rightarrow K_\theta$ によって $\alpha_\theta: K_\theta \rightarrow K_\theta$ が α から導かれる。

K_θ への Σ からの全射 π が記号列を対応する点に送る写像として定義される。 θ が periodic でないとき $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma$ が $\pi(\underline{x}) = \pi(\underline{y}) = x \in K_\theta$ ならある $n \geq 0$ があって $\alpha_\theta^n(x) = \varphi_\theta(\frac{\theta}{2})$ となるので α_θ^{-1} の branch F_1, F_2 が K_θ 上にとれて $(K_\theta, \{F_i\}_{i=1,2})$ は connecting sequence $k(\theta)$ の self-similar set になる。ゆえに θ が分母偶数の有理数のとき K_θ は $J_{\psi(\theta)}$ と同相になる。 θ が分母奇数の有理数のときも self-similar ではないが $J_{\psi(\theta)}$ と同相。

こうして θ が有理数のときは

$$t \sim_\theta t' \iff J_{\psi(\theta)} \text{ に関する external ray } l_t, l_{t'} \text{ は同じ点に land する}$$

となる。

補題 2 $t_1 \sim_\theta t_3, t_2 \sim_\theta t_4$ で t_1, t_2, t_3, t_4 が $\mathbf{T}$ 上にこの順序に並んでいたとすれば $t_1 \sim_\theta t_2 \sim_\theta t_3 \sim_\theta t_4$ 。

K_θ 上に順序を次のようにいれる。

$x \in K_\theta$ に対し θ と θ' を $\tilde{\varphi}_\theta^{-1}(x)$ の元のうち最小のものと最大のものとして閉区間 $I_x = [\theta, \theta']$ を考える。ただし $x = \tilde{\varphi}_\theta(0)$ のときは $I_x = [0, 1]$ とする。0 はどの点とも同値にならないので $x \neq \tilde{\varphi}_\theta(0)$ に対し I_x は 0 を含まない閉区間である。また補題 2 より $x, y \in K_\theta$ に対し I_x, I_y は一方がもう一方に完全に含まれるかまたは共通部分を持たないことがわかる。

$$x <_\theta y \iff I_x \supset I_y$$

と定義する。明らかに $\tilde{\varphi}_\theta(0)$ は最小元である。 K_θ の元 x, y で $x <_\theta y$ となるものに対して interval $[x, y]_\theta$ を $\{z | x \leq_\theta z \leq_\theta y\}$ で定める。これは有理数 θ に対して K_θ に順序を定めたことにもなっている。

今までは θ をひとつ決めたときの t に関する同値関係の話しであったが今度は θ の同値関係について考える。

$\theta, \theta' \in \mathbf{T}$ が $\theta \sim \theta'$ であるとは $k(\theta) = k(\theta')$ でありかつ θ, θ' の α による orbit は $(A_\theta \cap A_{\theta'}) \cup (B_\theta \cap B_{\theta'}) \cup C_\theta \cup C_{\theta'}$ に含まれる。

補題3 $\sim$ は同値関係である。

補題4 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ がこの順序に $\mathbf{T}$ 上に並んでいて $\theta_1 \sim \theta_3, \theta_2 \sim \theta_4$ なら $\theta_1 \sim \theta_2 \sim \theta_3 \sim \theta_4$ 。

補題5 $\theta \sim \theta' \iff \underset{\theta}{\sim} = \underset{\theta'}{\sim}$ 。

この $\sim$ による同一視によりできる $P = \mathbf{T}/\sim$ を組合わせ Mandelbrot 集合と呼ぶ。同一視する写像を $\Psi: \mathbf{T} \rightarrow P$ と書く。補題5から $\theta \sim \theta'$ なら K_θ と $K_{\theta'}$ は同じものと思ってよい。そこで θ のかわりに $c = \Psi(\theta) \in P$ を使って $\underset{c}{\sim}, \tilde{\varphi}_c, K_c$ などと書くこともある。

例 次のようなとき $\theta \sim \theta'$ である。

$$\forall n \geq 0 \quad \left| \alpha^n(\theta) - \frac{1}{2} \right| \geq \left| \theta - \frac{1}{2} \right|, \quad \theta' = 1 - \theta$$

このとき θ が 2 進小数で $0.\omega_1\omega_2\ldots$ ($\omega_i = 0$ or 1) となったとするとその kneading sequence $k(\theta) = k(\theta')$ は θ が non-periodic なら

$$k(\theta) = \{x_1x_2\ldots\}, \quad x_i = \begin{cases} A, & \text{if } \omega_i\omega_{i+1} = 01 \text{ or } 10 \\ B, & \text{if } \omega_i\omega_{i+1} = 00 \text{ or } 11 \end{cases}$$

θ が periodic なら

$$k(\theta) = \{x_1x_2\ldots, y_1y_2\ldots\}, \quad x_i = y_i \text{ は同上 } (i \neq kn, k = 1, 2, \ldots)$$

$$x_{kn} = A$$

$$y_{kn} = B$$

となる。■

$\theta \sim \theta'$ なら任意の $n \geq 0$ に対し $\alpha_\theta^n(\theta) \sim_{\theta} \alpha_{\theta'}^n(\theta')$, $\alpha_{\theta'}^n(\theta) \sim_{\theta'} \alpha_\theta^n(\theta')$ なので θ と θ' は有理数なら同じ Hubbard tree を導く。よって

$$\theta \sim \theta' \iff M \text{ に関して } \gamma_\theta, \gamma_{\theta'} \text{ は同じ点に land する}$$

K_θ のときと同様に P 上にも順序 $<$ を定める。この場合にも $\Psi(0)$ が最小元になる。

$c \in P$ に対し $L_c = [\tilde{\varphi}_c(0), \tilde{\varphi}_c(\theta)]_c$ とする。ただし θ は $\Psi(\theta) = c$ となるもの。
 $x \in L_c$ が c -maximal とは任意の $n \geq 0$ に対して $\alpha_c^n(x) \geq_c x$ となることとする。 $M_c = \{x \in L_c \mid x \text{ は } c\text{-maximal}\}$ とおく。

定理 $c \in P$ に対し順序を保存する全単射 $\lambda: M_c \rightarrow [\Psi(0), \Psi(c)]$ が存在し $x \in M_c$ が non-periodic なら $\tilde{\varphi}_c^{-1}(x) = \Psi^{-1}(\lambda(x))$, x が periodic なら $\tilde{\varphi}_c^{-1}(x) \supset \Psi^{-1}(\lambda(x))$ となる。

この定理が複素力学系としてはどういう意味を持っているかを系の形で説明しよう。 $M_Q = \psi(T_Q) \subset \partial M$ 上にも P のように順序 $<$ が定まる。 $c \in M_Q$ に対し $M_c \subset J_c$ は上で定義したものと同一のものである。 $\mathcal{M}_c = M_c \cap \varphi_c(T_Q) \subset J_c$ とする。

系 $c \in M_Q$ に対し順序を保存する全単射 $\lambda: \mathcal{M}_c \rightarrow [\psi(0), c]_{M_Q}$ が存在し $z \in \mathcal{M}_c$ が strictly preperiodic なら z の J_c および M に関する external angle は一致する。 z が periodic なら J_c に関する external angle は M に関する external angle を含む。

これは第1節で述べた Milnor-Thurston の結果の拡張になっている。そしてこれはまた Mandelbrot 集合が Julia 集合をたくさん寄せ集めてできた形をしていることのひとつの現れになっている。実際、Mandelbrot 集合の順序が小さいところの順序構造は順序が大きいところの Julia 集合によって決まることが系よりわかる。また幾何学的には Mandelbrot 集合の形状について次のようなことがわかる。

系 Misiurewicz point c について f_c の Hubbard tree T が n 以上に分枝する点を持たなければ $c' < c$ となる c' で M は n 以上に分枝しない。ここで集合 X が $x \in X$ で n 分枝するとは十分小さい単連結近傍 U に対し $U \setminus \{x\}$ の連結成分の数が n になることである。

これはある点に external ray が n 本 land すればそこで n 分枝することからす

ぐにわかる。例えば M の実部分 $M \cap \mathbf{R}$ では Misiurewicz point において枝分かれない。

REFERENCES

1. P. Collet and J.-P. Eckmann, "Iterated maps of the interval as dynamical systems," Birkhäuser, 1980.
2. A. Douady and J. H. Hubbard, *Etude dynamique des polynomes complexes*. Orsay, (1984–1985)
3. ———, *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris **18** (1985), 287–343.
4. J. Milnor, *Self-similarity and hairness in Mandelbrot set*, in "Computers in geometry and topology," ed. by M. C. Tangora, Lec. Note in pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker.
5. ———, *Dynamics in one complex variables: introductory lectures*, SUNY Stony Brook Institute for Mathematical Sciences. preprint (1990)
6. J. Milnor and W. Thurston, *On iterated maps of the interval*, Lecture Note in Math., Springer-Verlag.
7. W. Thurston, *On the combinatorics of iterated rational maps*. preprint