

Bordisms and vector fields

広大 総合科学 吉田敏男

closed m -manifold M^m 上の一次独立な vector fields の最大個数を $\text{Span } M^m$ とかく. $w_i M^m$ を M^m の i -th. Stiefel-Whitney class とする.

“ $\text{Span } M^m \geq k$ ならば, $w_i M^m = 0$ ($i \geq m-k+1$) ”
であるが, 逆は成立しない.

M^m が表わす m 次元 unoriented bordism group $\mathcal{N}_m$ の元を $[M^m]_2$ とかく.

問題 $w_i M^m = 0$ ($i \geq m-k+1$) のとき,

$$\text{Span } N^m \geq k \text{ 且 } [M^m]_2 = [N^m]_2$$

である closed m -manifold N^m が存在するか.

定義 [1, p.431] $\mathcal{N}_m \ni \alpha$ に対し,

α fibers over N^n with fiber F^{m-n}

$$\iff \exists \text{ differentiable fibering of closed manifolds } \begin{array}{ccc} F^{m-n} & \longrightarrow & M^m \\ \downarrow \pi & & \\ N^n & & \end{array} \text{ s.t. } \alpha = [M^m]_2$$

Stong の予想 [1, p.440] The set of classes $\alpha \in \mathcal{N}_m$ fibered over $(S^1)^k$ is precisely the set of classes for which all numbers divisible by $w_m, w_{m-1}, \dots, w_{m-k+1}$ are zero.

この予想が正しければ、問題は肯定的に解決される。 $k = 1, 2, 4$ のとき、この予想は正しい [1, p.439].

定理 $k \leq 6$. closed m -manifold M^m に対し、

$$w_i M^m = 0 \quad (i \geq m - k + 1)$$

ならば、 $\text{Span } N^m \geq k$ 且 $[M^m]_2 = [N^m]_2$ である closed m -manifold N^m が存在する。

証明は、後で示すように、次の補題と Stiefel-Whitney numbers の計算からえられる。

補題 1 [1, p.434] $k \geq 2$. $\text{RP}(n_1) \times \dots \times \text{RP}(n_k)$ から i 番目の成分への projection を p_i , $\text{RP}(n_i)$ 上の canonical line bundle を ξ_{n_i} . $\text{RP}(p_1^* \xi_{n_1} \oplus \dots \oplus p_k^* \xi_{n_k})$ を $p_1^* \xi_{n_1} \oplus \dots \oplus p_k^* \xi_{n_k}$ の projective space bundle. このとき、 $\text{RP}(p_1^* \xi_{n_1} \oplus \dots \oplus p_k^* \xi_{n_k})$ が $\mathcal{N}_*$ で indecomposable であるための必要十分条件は

$$\binom{n+k-2}{n_1} + \dots + \binom{n+k-2}{n_k} \equiv 1 \pmod{2}$$

ここで、 $n = n_1 + \dots + n_k$.

補題 2 [cf. 1, p.432] $k \geq 2$. $\text{RP}(\xi_{n_1-1} \oplus 1) \times \text{RP}(n_2) \times \dots \times \text{RP}(n_k)$ から i 番目の成分への projection を q_i , $\text{RP}(\xi_{n_1-1} \oplus 1)$ 上の canonical line bundle を λ . このとき、 $\text{RP}(p_1^* \xi_{n_1} \oplus p_2^* \xi_{n_2} \oplus \dots \oplus p_k^* \xi_{n_k})$ が $\mathcal{N}_*$ で inde

-composable ならば, $RP(q_1^* \lambda \oplus q_2^* \xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus q_k^* \xi_{n_k})$ もそうである。逆も成立する。

証明 $\xi_{n_{i-1}}^\perp$ を trivial bundle $RP(n_{i-1}) \times R^{n_i} \rightarrow RP(n_{i-1})$ における $\xi_{n_{i-1}}$ の orthogonal complement とする。

$$i: RP(\xi_{n_{i-1}} \oplus 1) \longrightarrow RP(\xi_{n_{i-1}} \oplus \xi_{n_{i-1}}^\perp \oplus 1)$$

$$\pi: RP(\xi_{n_{i-1}} \oplus \xi_{n_{i-1}}^\perp \oplus 1) = RP(n_{i-1}) \times RP(n_i) \longrightarrow RP(n_i)$$

をそれぞれ inclusion, trivial bundle の fiber 上への projection とする。このとき, $(\pi \circ i)^* \xi_{n_i} = \lambda$ であるから, 次の可換図がえられる。

$$\begin{array}{ccc} RP(q_1^* \lambda \oplus q_2^* \xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus q_k^* \xi_{n_k}) & \xrightarrow{(\pi \circ i) \times id.} & RP(p_1^* \xi_{n_1} \oplus p_2^* \xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus p_k^* \xi_{n_k}) \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ RP(\xi_{n_{i-1}} \oplus 1) \times RP(n_2) \times \cdots \times RP(n_k) & \xrightarrow{(\pi \circ i) \times id.} & RP(n_1) \times RP(n_2) \times \cdots \times RP(n_k) \end{array}$$

(π_1, π_2 は bundle projections, $(\pi \circ i) \times id$ は自然な写像)

$X = RP(p_1^* \xi_{n_1} \oplus p_2^* \xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus p_k^* \xi_{n_k})$, $Y = RP(q_1^* \lambda \oplus q_2^* \xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus q_k^* \xi_{n_k})$ とおき, X, Y の s -classes をそれぞれ $s(X), s(Y)$ とかく。 X, Y の total Stiefel-Whitney classes を調べて

$$((\pi \circ i) \times id)^* s(X) = s(Y)$$

となる。 $((\pi \circ i) \times id)^*$ は top 次元の $\mathbb{Z}_2$ 係数の cohomology 群の同型写像であることを示された。

$$RP(n_1, n_2, \dots, n_k) = RP(p_1^* \xi_{n_1} \oplus p_2^* \xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus p_k^* \xi_{n_k})$$

$$RP'(n_1, n_2, \dots, n_k) = RP(q_1^* \lambda \oplus q_2^* \xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus q_k^* \xi_{n_k})$$

とおく.

補題 1, 2 を使って, indecomposable m -manifold Q_m ($m \neq 2^*-1$) を次のようにとる.

$$(1) \quad Q_{8l+1} = RP'(4, \overbrace{7, \dots, 7}^{l-1}, 3, 0) \quad (l \geq 1), \quad \text{Span } Q_{8l+1} \geq 7l-1$$

$$(2) \quad Q_{8l+5} = RP'(2, \overbrace{7, \dots, 7}^l, 1, 0) \quad (l \geq 0), \quad \text{Span } Q_{8l+5} \geq 7l+2$$

$$(3) \quad Q_{2^p(2q+1)-1} = RP'(2^p, \overbrace{7, \dots, 7}^{2^{p-2}q-1}, 3, 1, 0) \quad (p \geq 2, q \geq 1),$$

$$\text{Span } Q_{2^p(2q+1)-1} \geq 7(2^{p-2}q)-3 + \text{Span } RP(2^p-1)$$

$$(4) \quad Q_{8l+2} = RP(\overbrace{7, \dots, 7}^l, 0, 0, 0) \quad (l \geq 0), \quad \text{Span } Q_{8l+2} \geq 7l$$

$$(5) \quad Q_{8l+4} = RP(\overbrace{7, \dots, 7}^l, 1, 1, 0) \quad (l \geq 0), \quad \text{Span } Q_{8l+4} \geq 7l+2$$

$$(6) \quad Q_{8l+6} = RP(\overbrace{7, \dots, 7}^l, 3, 0, 0, 0) \quad (l \geq 0), \quad \text{Span } Q_{8l+6} \geq 7l+3$$

$$(7) \quad Q_{16l} = RP(\overbrace{7, \dots, 7}^{2l}, 0) \quad (l \geq 1), \quad \text{Span } Q_{16l} \geq 14l$$

$$(8) \quad Q_{16l+8} = RP(\overbrace{7, \dots, 7}^{2l}, 3, 3, 0) \quad (l \geq 0), \quad \text{Span } Q_{16l+8} \geq 14l+6.$$

注意 $m = 2^p(2q+1)-1$ ($q \geq 1$) のとき, (1) と (2) は $p = 1$ の場合, (3) は $p \geq 2$ の場合, (4) ~ (8) は $p = 0$ の場合である.

Q_m ($m \neq 2^*-1$) の積の単項式で, Span が 5 以下の可能性があらものは次のようになる.

(A) $2j$ 次元のとき

$$Q_2^j, Q_2^{j-2}Q_4, Q_2^{j-3}Q_6, Q_2^{j-4}Q_4^2, Q_2^{j-5}Q_5^2, Q_2^{j-5}Q_4Q_6.$$

(B) $2j+1$ 次元のとき

$$Q_2^{j-2}Q_5, Q_2^{j-4}Q_4Q_5, Q_2^{j-5}Q_5Q_6.$$

(A), (B) の manifolds の Stiefel-Whitney numbers を計算して

次の表がえられる.

(A) の場合

	Q_2^j	$Q_2^{j-2}Q_4$	$Q_2^{j-3}Q_6$	$Q_2^{j-4}Q_4^2$	$Q_2^{j-5}Q_5^2$	$Q_2^{j-5}Q_4Q_6$
w_{2j}	1	0	0	0	0	0
$w_{2j-2}w_2$		1	0	0	0	0
$w_{2j-3}w_3$			1	0	0	0
$w_{2j-4}w_4$				1	1	0
$w_{2j-5}w_5$				$j-4$	$j-5$	1

(B) の場合

	$Q_2^{j-2}Q_5$	$Q_2^{j-4}Q_4Q_5$	$Q_2^{j-5}Q_5Q_6$
$w_{2j-1}w_2$	1	0	0
$w_{2j-3}w_4$		1	0
$w_{2j-4}w_5$			1

$T_{10} = \mathbb{RP}(4, 3, 1)$ は indecomposable 10-manifold で, $\text{Span } T_{10} \geq 7$ である.

補題 3 $[T_{10}]_2 = [Q_2Q_4^2]_2 + [Q_5^2]_2 + [Q_4Q_6]_2 + [Q_{10}]_2$.

証明 $[T_{10}]_2 = a_1[Q_2^5]_2 + a_2[Q_2^3Q_4]_2 + a_3[Q_2^2Q_6]_2 + a_4[Q_2Q_4^2]_2$
 $+ a_5[Q_5^2]_2 + a_6[Q_4Q_6]_2 + a_7[Q_2Q_8]_2 + a_8[Q_{10}]_2$

とかける ($a_i = 0, 1$). 表から, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = a_5 = a_6$ となる. T_{10} は indecomposable であるから $a_8 = 1$ となる. 故に,

$$[T_{10}]_2 = a_4[Q_2Q_4^2]_2 + a_4[Q_5^2]_2 + a_4[Q_4Q_6]_2 + a_7[Q_2Q_8]_2 + [Q_{10}]_2.$$

$$w_1^{10}(T_{10}) = 0, w_1^{10}(Q_2Q_4^2) = 0, w_1^{10}(Q_5^2) = 0,$$

$$w_1^{10}(Q_4 Q_6) = 0, w_1^{10}(Q_2 Q_8) = \text{生成元}, w_1^{10}(Q_{10}) = 0$$

から $a_7 = 0$ となる。また,

$$w_2^4(T_{10}) w_1^2(T_{10}) = 0, w_2^4(Q_2 Q_4^2) w_1^2(Q_2 Q_4^2) = \text{生成元}$$

$$w_2^4(Q_5^2) w_1^2(Q_5^2) = 0, w_2^4(Q_4 Q_6) w_1^2(Q_4 Q_6) = 0, w_2^4(Q_{10}) w_1^2(Q_{10}) = \text{生成元}$$

から $a_4 = 1$ となる。

定理の証明

$k = 6$ のとき示す。 $k \leq 5$ のときも同様。

奇数次元のとき:

$$[M^{2j+1}]_2 = a[Q_2^{j-2} Q_5]_2 + b[Q_2^{j-4} Q_4 Q_5]_2 + c[Q_2^{j-5} Q_5 Q_6]_2 + \sum [N^{2j+1}]_2$$

$$(a, b, c = 0, 1, \text{Span } N^{2j+1} \geq 6)$$

とかけるが, 表から $a = b = c = 0$ となる。

偶数次元のとき:

同様に考えて,

$$[M^{2j}]_2 = a[Q_2^{j-4} Q_4^2]_2 + a[Q_2^{j-5} Q_5^2]_2 + a[Q_2^{j-5} Q_4 Q_6]_2 + \sum [N^{2j}]_2$$

$$(a = 0, 1, \text{Span } N^{2j} \geq 6)$$

とかける。故に補題3から

$$[M^{2j}]_2 = a[Q_2^{j-5} T_{10}]_2 + a[Q_2^{j-5} Q_{10}]_2 + \sum [N^{2j}]_2.$$

Reference

- [1] R.E. Stong, On fibering of cobordism classes, Trans. of Amer. Math. Soc., 178 (1973), 431-447.