

ある非局所的な可積分系の特殊解と運動の積分の系列について

大原大学院大学会計研究科 土谷 洋平 (Yohei Tutiya)
Ohara graduate school of accounting

1 概要

次の非局所的な可積分方程式を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = & \eta(x, t) \int_{-1/2}^{1/2} [\cot \{ \pi(y - x - \gamma) \} \\ & - 2 \cot \{ \pi(y - x) \} + \cot \{ \pi(y - x + \gamma) \}] \eta(y, t) \frac{idy}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\int$ は Cauchy の主値積分を表し, γ は正の虚部を持った複素定数を表すものとする。また, $\eta(x, t)$ は周期境界条件 $\eta(x+1, t) = \eta(x, t)$ を満たすものとする。(1) は [5] において Periodic ILW equation with discrete Laplacian と呼ばれている方程式の, $\text{Im } \delta \rightarrow \infty$ という極限をとったものである。Periodic ILW equation with discrete Laplacian の背景については [5] を参照して頂きたい。本稿では (1) の, ある保存量の基底と対称関数に関する Macdonald 作用素の固有値が対応しそうであるという予想を述べる。本稿の内容は東京大学の白石潤一氏との共同研究 [6] に拠っている。[6] では省略した証明も補完したが逆に説明を省いた箇所もある。

2 方程式 (1) の導出とその保存量

$z = e^{2\pi ix}$ において $\eta(x, t)$ の Fourier 級数展開を

$$\eta(z, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n \quad (2)$$

と書く。この形では (1) 式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(z, t) = \eta(z, t) \sum_{n \neq 0} \text{sgn}(n) (1 - q^{|n|}) \eta_{-n} z^n \quad (3)$$

となる。両辺で z^0 の係数を比較すると次が分かる。

命題 2.1.

$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = 0$, すなわち η_0 は保存量となる。

このことに注意して

$$\sum_{n>0} \eta_{-n} z^n = \eta_+ = \frac{\partial_t \tau_+}{\tau_+}, \quad \sum_{n>0} \eta_n z^{-n} = \eta_- = \frac{\partial_t \tau_-}{\tau_-}, \quad (4)$$

とおくと次の双線形形式が得られる。

$$D_t \tau_-(z) \cdot \tau_+(z) = \varepsilon \tau_-(q^{-1}z) \tau_+(qz) - \eta_0 \tau_-(z) \tau_+(z). \quad (5)$$

$\tau_{\pm}$ を用いて η は次のように 2 通りに書くことができることを注意しておく。

$$\eta(z) = \eta_0 + \frac{\partial_t \tau_+}{\tau_+} - \frac{\partial_t \tau_-}{\tau_-} = \varepsilon \frac{\tau_-(q^{-1}z)}{\tau_-(z)} \frac{\tau_+(qz)}{\tau_+(z)} \quad (6)$$

双線形型式 (5) は広田-三輪方程式や離散 KdV 方程式に良く似ていることに気づく。そこで双線形形式を中心においた KP 階層の理論に沿ったやり方で方程式 (5) の導出を説明したい。まず広田-三輪方程式 (離散 KP 方程式) を

$$\begin{aligned} & (a_3^{-1} - a_2^{-1}) \tau(l + a_1, m, n) \tau(l, m + a_2, n + a_3) \\ & + (a_1^{-1} - a_3^{-1}) \tau(l, m + a_2, n) \tau(l + a_1, m, n + a_3) \\ & + (a_2^{-1} - a_1^{-1}) \tau(l, m, n + a_3) \tau(l + a_1, m + a_2, n) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

と書く。どれか 1 つの差分間隔を 0 にする極限を考える。ここでは仮に a_1 を 0 にする極限を考え、と次の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & D_l \tau(l, m, n + a_3) \cdot \tau(l, m + a_2, n) \\ & = (a_2^{-1} - a_3^{-1}) \{ \tau(l, m, n) \tau(l, m + a_2, n + a_3) - \tau(l, m, n + a_3) \tau(l, m + a_2, n) \} \end{aligned} \quad (8)$$

この方程式は KP 階層の理論の応用ではしばしば表れるものであり, [1] などでは differential Fay identity と呼ばれている。ここから (5) を得るには, 大雑把に言えば $e^{-clm} \tau$ をあらためて τ とおきな、 m と n を同一視する縮約条件を課した上で $a_3 - a_2$ の虚部を正の無限大に飛ばせばよい。きちんと述べると次のようになる。 $e^{-clm} \tau$ をあらためて τ とおきな、 $t = \alpha l$ と変数変換する。定数 α, c は $\varepsilon = (a_2^{-1} - a_3^{-1})/\alpha$, $\eta_0 = (a_2^{-1} - a_3^{-1} - ca_2)/\alpha$ となるように定める。これらを用いて differential Fay を書き直すと

$$\begin{aligned} & D_t \tau(l, m, n + a_3) \cdot \tau(l, m + a_2, n) \\ & = \varepsilon \tau(l, m, n) \tau(l, m + a_2, n + a_3) - \eta_0 \tau(l, m, n + a_3) \tau(l, m + a_2, n) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで縮約条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial m} - \frac{\partial}{\partial n} \right) \tau = 0 \quad (10)$$

を課して (9) を 1 + 1 次元の方程式に書き直すと

$$D_t \tau(pz) \cdot \tau(z) = \varepsilon \tau(pq^{-1}z) \tau(qz) - \eta_0 \tau(pz) \tau(z) \quad (11)$$

となる。これは [5] において periodic ILW equation with discrete Laplacian と呼ばれている方程式である。ただし差分間隔については $\exp\{2\pi i(a_3 - a_2)\} = p$, $\exp(2\pi i a_3) = q$ とおいている。ここで $\text{Im } p \rightarrow \infty$ の極限を考えると (5) が得られる。

双線形形式 (5) の特殊解を, ソリトン方程式の場合のように $\tau_{\pm}$ を z の多項式であると仮定して探してみる。ただし, η_+ が $|z| < 1$ の円内で正則であることから τ_+ は z の正冪の多項式, η_- が円外で正則であることから τ_- は z の負冪の多項式と仮定するのが妥当である。1 次式の解としては次をみつけることができる。

$$\begin{cases} \tau_+ = 1 + ze^{(1-q)at}, \\ \tau_- = 1 + \frac{\varepsilon - a}{\varepsilon - qa} z^{-1} e^{-(1-q)at}, \end{cases} \quad (12)$$

2 次式の解としては次をみつけることができる。

$$\begin{cases} \tau_+ = 1 + ze^{(1-q)a_1 t} + ze^{(1-q)a_2 t} \\ \quad + \frac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 - qa_2)(a_1 - q^{-1}a_2)} z^2 e^{(1-q)(a_1+a_2)t}, \\ \tau_- = 1 + c_1 z^{-1} e^{-(1-q)a_1 t} + c_2 z^{-1} e^{-(1-q)a_2 t} \\ \quad + \frac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 - qa_2)(a_1 - q^{-1}a_2)} c_1 c_2 z^{-2} e^{-(1-q)(a_1+a_2)t}, \\ c_j = \frac{\varepsilon - qa_j}{\varepsilon - q^2 a_j} \frac{(a_1 - qa_2)(a_1 - q^{-1}a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \end{cases} \quad (13)$$

ところで, 天下りであるが方程式 (1) の独立な保存量として次が知られている [2, 4, 5]。

定理 2.2.

(1) 式の解 η に対して,

$$I_n = \int \int \cdots \int_S \left(\prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i z_j} \right) \left(\prod_{j < k} \frac{z_j - z_k}{z_j - qz_k} \right) \left(\prod_{j=1}^n \eta(z_j) \right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

は時間によらない。特に $I_1 = \eta_0$ である。

特殊解 (12) に対して保存量 (14) の低次を計算してみると次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon q + (1 - q)a = (1 - q)e_1(a, \varepsilon q, \varepsilon q^2, \dots), \\ I_2 &= \varepsilon^2 q^2 + (1 - q^2)a\varepsilon = \frac{(1 - q)(1 - q^2)}{q} e_2(a, \varepsilon q, \varepsilon q^2, \dots), \end{aligned} \quad (15)$$

また特殊解 (13) に対しては次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon q^2 + (1 - q)a_1 + (1 - q)a_2 = (1 - q)e_1(a_1, a_2, \varepsilon q^2, \varepsilon q^3, \dots), \\ I_2 &= \frac{(1 - q)(1 - q^2)}{q} a_1 a_2 + \varepsilon q(1 - q)a_1 + \varepsilon q(1 - q)a_2 + \varepsilon^2 q^2 \\ &= \frac{(1 - q)(1 - q^2)}{q} e_2(a_1, a_2, \varepsilon q^2, \varepsilon q^3, \dots), \end{aligned} \quad (16)$$

これらの保存量と Macdonald 作用素の固有値 [3]

$$q^{-n(n-1)/2} \prod_{k=1}^n (1 - q^k) \cdot e_n(\varepsilon t^{-\lambda_1}, \varepsilon q t^{-\lambda_2}, \varepsilon q^2 t^{-\lambda_3}, \dots) \quad (17)$$

は明らかに類似している。すなわち (15)(16) は $\lim \varepsilon q^{i-1} t^{-\lambda_i}$ が有限な値 a_i になるように $t \rightarrow 1$, $\lambda_i \rightarrow \infty$ という極限をとったものと解釈できる。これを予想の形で述べておく。

予想 2.3.

方程式 (1) の双線形形式 (5) に対してパラメータ $a_1, a_2, \dots, a_n$ を持った次の解が存在するであろう。

$$\begin{aligned} \tau_+ &= 1 + \sum_{j=1}^n z e^{(1-q)a_j t} + \sum_{j < k}^n \frac{(a_j - a_k)^2}{(a_j - q a_k)(a_j - a_k/q)} z^2 e^{(1-q)(a_j + a_k)t} + \dots \\ &= \left| \begin{array}{cccc} 1 + k_1 f_1 & 1 + k_2 f_2 & \dots & 1 + k_n f_n \\ q a_1 + a_1 k_1 f_1 & q a_2 + a_2 k_2 f_2 & \dots & q a_n + a_n k_n f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q a_1)^{n-1} + a_1^{n-1} k_1 f_1 & (q a_2)^{n-1} + a_2^{n-1} k_2 f_2 & \dots & (q a_n)^{n-1} + a_n^{n-1} k_n f_n \end{array} \right| \\ &\quad / \left(q^{n(n-1)/2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{array} \right| \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau_- &= 1 + \sum_{j=1}^n l_j z^{-1} e^{(q-1)a_j t} + \sum_{j < k}^n \frac{(a_j - a_k)^2}{(a_j - q a_k)(a_j - a_k/q)} l_j l_k z^{-2} e^{(q-1)(a_j + a_k)t} + \dots \\ &= \left| \begin{array}{cccc} 1 + l_1 f_1^{-1} & 1 + l_2 f_2^{-1} & \dots & 1 + l_n f_n^{-1} \\ q a_1 + a_1 l_1 f_1^{-1} & q a_2 + a_2 l_2 f_2^{-1} & \dots & q a_n + a_n l_n f_n^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q a_1)^{n-1} + a_1^{n-1} l_1 f_1^{-1} & (q a_2)^{n-1} + a_2^{n-1} l_2 f_2^{-1} & \dots & (q a_n)^{n-1} + a_n^{n-1} l_n f_n^{-1} \end{array} \right| \\ &\quad / \left(q^{n(n-1)/2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{array} \right| \right) \end{aligned} \quad (19)$$

ただし

$$f_j = z e^{(1-q)a_j t}, \quad k_j = \prod_{1 \leq m \leq n, m \neq j} \frac{a_m - a_j}{a_m - q a_j} \quad (20)$$

である。また l_j は n に応じて決まる ε, q, a_j の有理式である。これらの $\tau_{\pm}$ (から (6) によって決まる η) に対して、保存量 (14) の値は

$$I_n = q^{-n(n-1)/2} \prod_{k=1}^n (1 - q^k) \cdot e_n(a_1, a_2, \dots, a_n, \varepsilon q^{n-1}, \varepsilon q^n, \varepsilon q^{n+1}, \dots) \quad (21)$$

となるであろう。

予想の未解決部分は τ_- に含まれる定数 l_j の形及び (21) の証明である。

3 $q = 0$ の場合

$q = 0$ のときには Fourier 展開 (3) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(z, t) = \eta(z, t) \sum_{n \neq 0} \operatorname{sgn}(n) \eta_{-n} z^n \quad (22)$$

になる。この式は $\eta_{\pm}(z)$ の正則な領域に応じて

$$\frac{d}{dt} \eta_+(z, t) = \eta_+(z, t)(\eta_+(z, t) + \eta_0), \quad \frac{d}{dt} \eta_-(z, t) = -\eta_-(z, t)(\eta_-(z, t) + \eta_0). \quad (23)$$

の 2 本に分離する。これらは容易に解くことができ、

$$\eta_+(z, t) = \frac{-\eta_0 c_+(z) e^{\eta_0 t}}{d_+(z) + c_+(z) e^{\eta_0 t}}, \quad \eta_-(z, t) = \frac{-\eta_0 c_-(z) e^{-\eta_0 t}}{d_-(z) + c_-(z) e^{-\eta_0 t}} \quad (24)$$

という厳密解を得る。 $c_{\pm}, d_{\pm}$ は η_+ が $|z| < 1$ で正則となるように、 η_- が $|z| > 1$ で正則となるように選ばれた任意関数である。 $q \neq 0$ の場合を踏まえて仮に $\tau_{\pm}(z, t) = d_{\pm}(z) + c_{\pm}(z) \exp(\pm \eta_0 t)$ とおくと双線形形式は

$$\eta(z, t) = \varepsilon \frac{1}{\tau_-(z, t) \tau_+(z, t)}, \quad (25)$$

$$D_t \tau_-(z, t) \cdot \tau_+(z, t) = \varepsilon - \eta_0 \tau_-(z, t) \tau_+(z, t). \quad (26)$$

となる。さらに $c_{\pm}, d_{\pm}$ についてのものには書き直すと

$$d_+(z) d_-(z) - c_+(z) c_-(z) = \varepsilon / \eta_0 \quad (27)$$

となる。これに対して次の解を見出すことができる。

例 3.1. n を非負の整数としてパラメータ $\epsilon_{\pm 1}, \epsilon_{\pm 2}, \dots$ を用意する。

$$e_m(z, t) = \epsilon_m z^m \exp\{\operatorname{sgn}(m) \eta_0 t\} \quad (28)$$

とおくと (33) を満たす解としては z の 1 次式では次をみつけることができる。

$$d_+ = 1, \quad c_+ = e_1, \quad d_- = 1, \quad c_- = e_{-1} \quad (29)$$

z の 2 次式では次の解をみつけることができる。

$$d_+ = 1 + e_2 e_{-1}, \quad c_+ = e_1 + e_2, \quad d_- = 1 + e_{-2} e_1, \quad c_- = e_{-1} + e_{-2} \quad (30)$$

z の 3 次式では次の解をみつけることができる。

$$\begin{aligned} d_+ &= 1 + e_2 e_{-1} + e_3 e_{-1} + e_3 e_{-2}, & c_+ &= e_1 + e_2 + e_3 + e_3 e_{-2} e_1, \\ d_- &= 1 + e_{-2} e_1 + e_{-3} e_1 + e_{-3} e_2, & c_- &= e_{-1} + e_{-2} + e_{-3} + e_{-3} e_2 e_{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

すなわち d_+ も c_+ は e の積の和からなり各項で e の添字は正負の順に交代かつ絶対値が減少する。そして d_+ では各項は偶数個の e の積であり, c_+ では奇数個である。 d_- と c_- でも正負が反転する以外は同様である。一般化すると次のようになる。

補題 3.2.

$d_{\pm}, c_{\pm}$ を次の行列で定義する。

$$\begin{pmatrix} d_+(z) & c_+(z) \\ c_-(z) & d_-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_n(z, t) \\ e_{-n}(z, t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_{n-1}(z, t) \\ e_{-n+1}(z, t) & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & e_1(z, t) \\ e_{-1}(z, t) & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

この $d_{\pm}, c_{\pm}$ は (33) の解となる。 η_0 の値は $\epsilon / \{\prod_{i=1}^n (1 - \epsilon_i \epsilon_{-i})\}$ である。

(補題 3.2 の証明)

両辺の行列式から直ちに

$$d_+(z)d_-(z) - c_+(z)c_-(z) = \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon_i \epsilon_{-i}). \quad (33)$$

が確認できる。

(補題 3.2 の証明終わり)

補題 3.2 の解に対して保存量 (14) を計算しよう。 $q = 0$ のとき I_n は次の Toeplitz 型行列式になる。

$$I_{n+1} = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_{-1} & \cdots & \eta_{-n+1} \\ \eta_1 & \eta_0 & \cdots & \eta_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n-1} & \eta_{n-2} & \cdots & \eta_0 \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad (34)$$

このとき次の定理を得る。

定理 3.3.

補題 3.2 の $d_{\pm}(z), c_{\pm}(z)$ につき, $\tau_{\pm}(z, t) = d_{\pm}(z) + c_{\pm}(z)e^{\pm\eta_0 t}$ は (26) を満たす。このとき $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \epsilon_i \epsilon_{-i}) = \epsilon / \eta_0$ となる。(25) で定義された η は (22) を満たし, その保存量 (34) については次が成立する。

$$I_{n+1} = \eta_0^{n+1} (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1})^n (1 - \epsilon_2 \epsilon_{-2})^{n-1} \cdots (1 - \epsilon_n \epsilon_{-n}), \quad n \geq 0 \quad (35)$$

(定理 3.3 の証明)

$\tau_{\pm}(z, t)$ はパラメータ $\epsilon_{\pm n}$ によっていることを露にするために $\tau_{\pm} = \tau_{\pm}(z, t; \epsilon_{\pm 1}, \epsilon_{\pm 2}, \cdots, \epsilon_{\pm M})$ と書く。以降の議論では常にパラメータの数は Toeplitz 行列式のサイズより十分大きい, すなわち $M > n$ と仮定する。パラメータの数が n よりも少ない解, 例えば $\tau_{\pm}(z, t; \epsilon_{\pm 1})$ については

$\epsilon_{\pm 2} = \epsilon_{\pm 3} = \cdots = \epsilon_{\pm M} = 0$ と特殊化したものと解釈すれば良いので、このような仮定は証明に不備をきたすものではない。以下の議論においてこのような特殊化を特に $\tau_{\pm}^{(k)}$ と書くことにする。すなわち

$$\tau_{\pm}^{(k)} = \tau_{\pm}(z, t; \epsilon_{\pm 1}, \epsilon_{\pm 2}, \cdots, \epsilon_{\pm k}, \epsilon_{\pm(k+1)} = 0, \cdots, \epsilon_{\pm M} = 0) \quad (36)$$

と定義する。また、 $\eta(z, t), d_{\pm}(z), c_{\pm}(z), \tau_{\pm}(z, t)$ などに対しても特殊化を考えるとときには右肩に (k) をつけることにする。

さて、まず我々は I_n が t に依らないことを知っているので、以下では簡単化のために $t = 0$ とおく。また $d_{\pm}(z), c_{\pm}(z), \tau_{\pm}(z, 0)$ の展開係数に対して以下の記号を用いる。

$$d_{\pm}(z) = \sum_{j=1}^M d_{\pm j} z^{\pm j}, \quad c_{\pm}(z) = \sum_{j=1}^M c_{\pm j} z^{\pm j}, \quad \tau_{\pm}(z, 0) = \sum_{j=1}^M \tau_{\pm j} z^{\pm j} \quad (37)$$

さらに $\eta_n, (n \neq 0)$ は η_0 でくくれるので、簡単のために次の ν_n を導入する。

$$\eta_{\pm}(z, 0) = \frac{-\eta_0 c_{\pm}(z)}{d_{\pm}(z) + c_{\pm}(z)} =: -\eta_0 \sum_{n>0} \nu_{\pm n} z^{\pm n} \quad (38)$$

これらによって定理の主張は次の形になる。

$$\begin{vmatrix} -1 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & -1 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \prod_{l=1}^n (1 - \epsilon_l \epsilon_{-l})^{n-l+1}. \quad (39)$$

以下にいくつか補題を用意し、段階的に (39) 式を示すことにする。まず次を示さなければならない。

補題 3.4.

1. ν_n ($n = 1, 2, \cdots$) は $\{\epsilon_{\pm 1}, \epsilon_{\pm 2}, \cdots, \epsilon_{\pm(n-1)}, \epsilon_n\}$ のみの多項式である。特に ϵ_n については 1 次式であり、1 次の係数については

$$\frac{\partial \nu_n}{\partial \epsilon_n} = (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1})(1 - \epsilon_2 \epsilon_{-2}) \cdots (1 - \epsilon_{n-1} \epsilon_{-n+1}) \quad (40)$$

となる。

2. 次が成立する。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tau_{-n}^{(n)} & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{-n+1}^{(n)} & \tau_{-n}^{(n)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{-1}^{(n)} & \tau_{-2}^{(n)} & \cdots & \tau_{-n}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{-n+1}^{(n)} \\ d_{-n+2}^{(n)} \\ \vdots \\ d_0^{(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_n \epsilon_{-n}) \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

(補題 3.4 の証明)

まず次に注意して頂きたい。

注意 3.5.

(38) より $\nu_{\pm j}$, ($j = 1, 2, \dots$) は連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \tau_{\pm 1} & 1 & 0 & \cdots \\ \tau_{\pm 2} & \tau_{\pm 1} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\pm 1} \\ \nu_{\pm 2} \\ \nu_{\pm 3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\pm 1} \\ c_{\pm 2} \\ c_{\pm 3} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

によって定まる。(複号同順)

この注意 3.5 と補題 3.2 を組み合わせて帰納法で示していく。まず 0 でないパラメータが $\epsilon_{\pm 1}, \dots, \epsilon_{\pm k}$ の $2k$ 個のみの場合において 1. と 2. が $n \leq k$ で成立すると仮定する。その下で次の評価を行う。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k+1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k+1)} & \tau_{k-1}^{(k+1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k+1)} - \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k+1)} - \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k+1)} - \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1^{(k+1)} \\ c_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k+1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k+1)} & \tau_{k-1}^{(k+1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

右辺第 1 項は注意 3.5 による変形である。ここで補題 3.2 の漸化式 $\tau_j^{(k+1)} = \tau_j^{(k)} + \epsilon_{k+1} \tau_{j-k-1}^{(k)}$ を用いると右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k+1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k+1)} & \tau_{k-1}^{(k+1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k)} & \tau_{k-1}^{(k)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon_{k+1} \tau_{-k}^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{k+1} \tau_{-1}^{(k)} & \epsilon_{k+1} \tau_{-2}^{(k)} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ d_{-k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ d_0^{(k)} \end{pmatrix} - \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。2 行目の変形において再び注意 3.5 と 2. に関する帰納法の仮定を用いた。この式を (41) に代入し、補題 3.2 の漸化式 $c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \epsilon_{k+1}d_{j-k-1}^{(k)}$ を用いると

$$\text{r.h.s. of (41)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1\epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k\epsilon_{-k}) \end{pmatrix} \quad (42)$$

となる。以上より 0 でないパラメータが $\epsilon_{\pm 1}, \dots, \epsilon_{\pm(k+1)}$ の $2(k+1)$ 個の場合には、1. が $n \leq k+1$ で成立することが示された。続いて $n = k+1$ での 2. の左辺を次のように変形する。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tau_{-k-1}^{(k+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{-k}^{(k+1)} & \tau_{-k-1}^{(k+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{-1}^{(k+1)} & \tau_{-2}^{(k+1)} & \cdots & \tau_{-k-1}^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k+1)} \\ \nu_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \tau_{-k-1}^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{-k}^{(k)} & \tau_{-k-1}^{(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{-1}^{(k)} & \tau_{-2}^{(k)} & \cdots & \tau_{-k-1}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{-k-1}\tau_0^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon_{-k-1}\tau_{+1}^{(k)} & \epsilon_{-k-1}\tau_0^{(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{-k-1}\tau_k^{(k)} & \epsilon_{-k-1}\tau_{k-1}^{(k)} & \cdots & \epsilon_{-k-1}\tau_0^{(k)} \end{pmatrix} \right\} \\ & \quad \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1\epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k\epsilon_{-k})\epsilon_{k+1} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ただし 0 でないパラメータが $\epsilon_{\pm 1}, \dots, \epsilon_{\pm(k+1)}$ のみのときには $n = k+1$ での 1. が既に成立していること、及び補題 3.2 の漸化式 $\tau_j^{(k+1)} = \tau_j^{(k)} + \epsilon_{k+1}\tau_{j-k-1}^{(k)}$ を用いた。さらに帰納法の仮定と注意 3.5 を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 \\ d_{-k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ d_0^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1\epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k\epsilon_{-k}) \end{pmatrix} \\ &+ \epsilon_{-k-1} \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1\epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k\epsilon_{-k})\epsilon_{k+1}\epsilon_{-k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{-k}^{(k+1)} \\ d_{-k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ d_0^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1\epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_{k+1}\epsilon_{-k-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって 0 でないパラメータが $\epsilon_{\pm 1}, \dots, \epsilon_{\pm(k+1)}$ の $2(k+1)$ 個の場合には, 2. も $n \leq k+1$ で成立することが示された。

(補題 3.4 の証明終わり)

この補題 3.4 を用いて今度は次の補題を示す。

補題 3.6.

$n \geq 1$ とする。次が成立する。

$$\begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & -1 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(n)} \\ \vdots \\ \tau_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_n \epsilon_{-n}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(補題 3.6 の証明)

これも帰納法で証明する。 $n = k$ で命題が成立すると仮定すると, $n = k+1$ においては, 補題 3.4 の 1. と 2. を用いて

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1}^{(k+1)} & \cdots & \nu_{-k-1}^{(k+1)} \\ \nu_1^{(k+1)} & -1 & \cdots & \nu_{-k}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k+1)} & \nu_k^{(k+1)} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ \tau_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1}^{(k)} & \cdots & \nu_{-k-1}^{(k)} \\ \nu_1^{(k)} & -1 & \cdots & \nu_{-k}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} & \nu_k^{(k)} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \epsilon_{-k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ \tau_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $\tau_j^{(k+1)}$ の漸化式を用いて引き続き変形すると,

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1}^{(k)} & \cdots & \nu_{-k-1}^{(k)} \\ \nu_1^{(k)} & -1 & \cdots & \nu_{-k}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} & \nu_k^{(k)} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(k)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{-k}^{(k)} \\ \vdots \\ \tau_{-1}^{(k)} \end{pmatrix} \right\} \\ & \quad + (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) \begin{pmatrix} \epsilon_{-k-1} \epsilon_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \epsilon_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで帰納法の仮定と注意 3.5 を用いてさらに引き続き変形すると,

$$= \begin{pmatrix} -(1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) \\ 0 \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} c_{-k-1}^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ -(1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) \end{pmatrix} \\ + (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) \begin{pmatrix} \epsilon_{-k-1} \epsilon_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \epsilon_{k+1} \end{pmatrix}$$

となる。これに引き続き $c_{\pm(k+1)}^{(k)} = 0$ を代入すると,

$$= \begin{pmatrix} -(1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_{k+1} \epsilon_{-k-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって $n = k + 1$ でも命題は成り立つ。

(補題 3.6 の証明終わり)

この補題 3.6 を用いると (39) 式は次の帰納法より直ちに導かれる。

$$I_{k+1} = \left| \begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-k} \\ \nu_1 & -1 & \cdots & \nu_{-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_k & \nu_{k-1} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k)} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \\ = \left| \begin{array}{cccc} -(1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-k} \\ 0 & -1 & \cdots & \nu_{-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \nu_{k-1} & \cdots & -1 \end{array} \right| \\ = -(1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_k \epsilon_{-k}) I_k.$$

(定理 3.3 の証明終わり)

参考文献

- [1] M. Adler, P. van Morebeke, A matrix integral solution to two-dimensional W_p -gravity, Commun. Math. Phys. 147 (1992) 25-56.

- [2] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials, J. Math. Phys. 50 (2009) 095215.
- [3] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, second ed., Oxford University Press, New York, 1995.
- [4] J. Shiraishi, A Family of Integral Transformations and Basic Hypergeometric Series, Commun. Math. Phys. 263 (2006) 439-460.
- [5] J. Shiraishi, Y.Tutiya Periodic ILW equation with discrete Laplacian, J. Phys. A. 42 No.40 (2009) 404018.
- [6] Y.Tutiya, J. Shiraishi, On some special solutions to periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian, arXiv:0911.5005