

Fourier 積分作用素のあるクラスについて.

千葉経済短大.

浅田 健嗣

§ 1. はじめに.

次の形の積分作用素— Fourier 積分作用素—を考えよう.

$$(1.1) \quad Af(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(x,\xi)} a(x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

ここで, $\hat{f}$ は f の Fourier 変換: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i y \cdot \xi} f(y) dy$. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の上の関数 $S(x,\xi)$, $a(x,\xi)$ はそれぞれ A の phase 関数, symbol 関数とよばれる. (cf. Eskin [6], Hörmander [10].)

$S(x,\xi) = x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ のとき, A は擬微分作用素になる.

Beals-Fefferman [2, 3] 等の研究により, 擬微分作用素については極めて広い symbol の class に対して L^2 有界性定理が証明されている. この note においては, symbol 関数を Beals-Fefferman class にとり, それに対応して phase 関数も一般にしたときの Fourier 積分作用素 A に対する L^2 有界性定理を考察する. この定理は擬微分作用素に対する Beals-Fefferman の L^2 有界性定理と Fourier 積分作用素に対しての, Fujiwara [8], Kumano-go [12] の L^2 有界性定

理を含むものである.

記号: $\mathcal{R}^n$ の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ に対して,

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}, \quad x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n.$$

多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_j \geq 0$ 整数) に対して, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

$$x \text{ についての微分 } \partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

$\| \cdot \|$: 関数 f に対して, $\|f\| = \left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$: f の L^2 ノルム.

作用素 A に対して, $\|A\|$ は A の $L^2(\mathcal{R}^n)$ 空間での作用素ノルム.

C : 定数 C は添字が明示されていなければ, それ以前に定義された定数及び n にのみよる正の定数 (適当な).

§ 2.

定義 2.1 (cf. Beals [3], Hörmander [11]). $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$ 上で定義された正值関数 Φ, φ が次の条件をみたすとき, Φ, φ を weight 関数 α 対と
いう:

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \Phi \geq c_1, \quad \varphi \leq C_2, \quad \Phi \varphi \geq c_3. \\ \text{(ii)} \quad \left. \begin{array}{l} |x-y| \leq r_0 \varphi(y, \eta) \\ |\xi-\eta| \leq r_0 \Phi(y, \eta) \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi(x, \xi) \approx \Phi(y, \eta), \quad \varphi(x, \xi) \approx \varphi(y, \eta). \\ \text{(iii)} \quad \frac{\Phi(x, \xi)}{\Phi(y, \eta)} + \frac{\varphi(x, \xi)}{\varphi(y, \eta)} \leq C_+ \left(1 + \Phi(y, \eta) |x-y| + \varphi(y, \eta) |\xi-\eta| \right)^N. \end{array} \right. \Rightarrow \Phi(x, \xi) \approx \Phi(y, \eta), \quad \varphi(x, \xi) \approx \varphi(y, \eta).$$

$$\left(A \approx B \Leftrightarrow \text{ある正数 } C \text{ が存在して, } C^{-1} \leq A/B \leq C \right).$$

ここで, c_1, C_2, c_3, C_4, r_0 は正の定数, N は非負の定数.

$\varphi(x, y), \Phi(x, y)$ は (x, y) における, x -空間, y -空間の長さをはかる尺度を表わしている. (x, y) の近傍 $U_{(x, y)}^{\Phi, \varphi}(r) = \{(x, y) \mid |x - y| \leq r\varphi(x, y), |y - z| \leq r\Phi(x, y)\}$ を考えれば, 条件 (ii) は, $U_{(x, y)}^{\Phi, \varphi}(r)$ 上において, φ, Φ はそれぞれ同じ程度の大きさであることを示している. Hörmander [10] のことばでいえば, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上のリーマン計量 $g_{(x, y)}(u, v) = \frac{|u|^2}{\varphi(x, y)^2} + \frac{|v|^2}{\Phi(x, y)^2}$ が, 条件 (ii) は slowly varying, 条件 (iii) は σ -temperate であるということに相当する.

以下において, weight function Φ, φ をふとつ固定して考える.
 <仮定>

(A-1) $a(x, y) \in S_{\Phi, \varphi}^{0,0}$, すなわち, 任意の非負整数 k に対して, 次で定義される a のセミノルム $|a|_k$ が有限の値である.

$$|a|_k = \max_{|\alpha + \beta| \leq k} \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta a(x, y) \right| \cdot \varphi(x, y)^{|\alpha|} \Phi(x, y)^{|\beta|}.$$

(A-2) phase 関数 $S(x, y)$ の実部 $S_R(x, y)$ が次の評価をみたす.

$$\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left| \det \left[\partial_{x_j} \partial_{y_k} S_R(x, y) \right] \right| \geq \delta_0 > 0.$$

(A-3) $|\alpha + \beta| \geq 2$ なる任意の多重指数 α, β に対して, 次の不等式をみたす正定数 $C_{\alpha, \beta}$ が存在する.

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta S(x, y) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \varphi(x, y)^{1-|\alpha|} \Phi(x, y)^{1-|\beta|}$$

(A-4) phase 関数 $S(x, y)$ の虚部 $S_I(x, y)$ は非負: $S_I(x, y) \geq 0$.

そのとき、条件 (A-1) と (A-4) から次のことがわかる: (1.1) の積分は、少なくとも急減少な関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ に対して絶対収束する.

定理 $a(x, \xi)$, $S(x, \xi)$ を仮定 (A-1) ~ (A-4) を満たす C^∞ 関数とする. そのとき、次の評価が成立するような正定数 C と正整数 m が存在する: 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|Af\| \leq C |a|_m \|f\|,$$

ここに、 m は $m > 4n(1+N)$ なる整数、 C は a と f に依らない正定数.

注意 1. S が実数値関数、もしくは、さらにその虚部 S_I が次の条件 (A-3') を満たすとき、定理の m は $m > 2n(1+N)$ なる整数ととれる. (S_R は (A-3) を満たしていい).

$$(A-3') \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_I(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \varphi(x, \xi)^{-|\alpha|} \Phi(x, \xi)^{-|\beta|}$$

なる不等式が、 $|\alpha| + |\beta| \geq 2$ なる任意の多重指数 α, β に対して成立する.

例 1. $\Phi = (1 + |\xi|)^p$, $\varphi = (1 + |\xi|)^{-\delta}$, $0 \leq \delta \leq p \leq 1$, $\delta < 1$ のとき.

symbol 関数の class: $S_{\Phi, \varphi}^{0,0} = S_{p, \delta}^0$ (Hörmander)

このとき、 $0 \leq \delta \leq p \leq 1$, $\delta < 1$ なる p, δ のあらゆるとり方に対して共通する phase 関数 $S(x, \xi)$ の class は次のとおり:

$$\begin{cases} |\det[\partial_{x_j} \partial_{\xi_k} S_R(x, \xi)]| \geq \delta_0 > 0, \\ |\alpha| + |\beta| \geq 2 \Rightarrow \exists C_{\alpha, \beta} \text{ s.t. } |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{1 - |\beta|} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_I(x, \xi) \geq 0 \end{array} \right.$$

Fujiwara [8], Kumano-go [12] は ξ のような phase 関数 $S(x, \xi)$ (もしくはそれに近い条件) に対して, Fourier 積分作用素の L^2 有界性を証明している.

例 2. $\Phi = \varphi = 1$ のとき. 作用素 (1.1) は Fujiwara [7], Asada-Fujiwara [1] の振動積分変換になる. Fujiwara [9] は, Schrödinger 作用素の基本解の構成の際に振動積分作用素を用いた.

例 3. Danilov [5] は, 条件 (A-1) の代わりに, $e^{-S_I} a \in S_{p,p}^0$ という条件の下で, 作用素 A を考えている. すなわち, real phase 関数の Fourier 積分作用素または振動積分変換の L^2 有界性定理に帰着させて, A を考察している.

例 4. 次の条件をみたす C^∞ 関数 $\lambda(\xi)$ に対して, $\Phi(x, \xi) = \lambda(\xi)$, $\varphi(x, \xi) = \lambda(\xi)^{-1}$ とおけば, Φ, φ は weight 関数 a に対しては.

$$(i) \quad |\xi| \approx |\eta| \Rightarrow \lambda(\xi) \approx \lambda(\eta)$$

$$(ii) \quad 1 \leq \lambda(\xi) \leq C_3 \langle \xi \rangle^{1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad C_3 > 0$$

$$(iii) \quad \text{任意の多重指数 } \alpha \text{ に対して, } |\partial_\xi^\alpha \lambda(\xi)| \leq C_\alpha \lambda(\xi) (1+|\xi|)^{-|\alpha|}.$$

$$\left(\text{このとき, (iv) } |\xi - \eta| \leq C_4 \lambda(\xi) \Rightarrow \lambda(\xi) \approx \lambda(\eta) \text{ が成立する} \right).$$

例 5. $\Phi = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad \varphi = 1$

§3. 定理の証明—概略.

Plancherel の定理により, 作用素 (1.1) が L^2 有界 である には, 次の積分作用素——これも A とかく——が L^2 有界 であることを示せばよい.

$$(3.1) \quad u(\xi) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(x,\xi)} a(x,\xi) u(\xi) d\xi.$$

証明は, 以下で述べる 単位の分解 (補題 3.1) を用い, [1, 7] の方法にならう. その基本となるのは, Calderón-Vaillancourt [4] によって定式化された Cotler-Knapp-Stein の補題である.

単調非増加な, $\mathbb{R}^1$ 上の C^∞ 関数 ψ で, $\psi(t)=1$ ($t \leq R'$), $\psi(t)=0$ ($R \leq t$) $0 < R' < R < \frac{1}{4}R_0$ なるものを取り, 次のように $\psi_{(\lambda,\sigma)}(x,\xi)$ を定める.

$$\psi_{(\lambda,\sigma)}(x,\xi) = \frac{\psi(\lambda(\lambda,\sigma)|x-\sigma|) \psi(\lambda(\lambda,\sigma)^{-1}|\xi-\sigma|)}{\iint \psi(\lambda(\lambda,\sigma)|x-\sigma|) \psi(\lambda(\lambda,\sigma)^{-1}|\xi-\sigma|) d\sigma d\sigma},$$

ここに, $\lambda(\lambda,\sigma) = \sqrt{\Phi(\lambda,\sigma)/\varphi(\lambda,\sigma)}$, $(x,\xi), (\lambda,\sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

補題 3.1. 1) 各 $\psi_{(\lambda,\sigma)}$ の support は次の集合 $U_{(\lambda,\sigma)}(R)$ に含まれる.

$$U_{(\lambda,\sigma)}(R) = \{(x,\xi); |x-\sigma| \leq R \lambda(\lambda,\sigma)^{-1}, |\xi-\sigma| \leq R \lambda(\lambda,\sigma)\}$$

2) $\psi_{(\lambda,\sigma)} \in S_{\Phi,\varphi}^{0,0}$, すなわち, 任意の正整数 m に対して正定数 C_m が存在して, $|\psi_{(\lambda,\sigma)}|_m \leq C_m$ が成り立つ.

3) 任意の $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して, $\iint \psi_{(\lambda,\sigma)}(x,\xi) d\sigma d\sigma = 1$.

注意 1. この単位の分解は Hörmander [1] のそれにならった.

Hörmander のは, discrete parameter. ここのは 連続 パラメータ (λ,σ) となっている.

注意 2. §2 の注意 1 を証明するのには、上記の単位の分解では不十分。次のように変更する。

$$\psi'_{(\lambda, \sigma)}(x, \xi) = \frac{\psi(\varphi(\lambda, \sigma)^{-1}|x-\sigma|) \psi(\Phi(\lambda, \sigma)^{-1}|\xi-\sigma|) \varphi(\lambda, \sigma)^{-n} \Phi(\lambda, \sigma)^{-n}}{\iint \psi(\varphi(\lambda, \sigma)^{-1}|x-\sigma|) \psi(\Phi(\lambda, \sigma)^{-1}|\xi-\sigma|) \varphi(\lambda, \sigma)^{-n} \Phi(\lambda, \sigma)^{-n} d\lambda d\sigma}.$$

さて, $p=(\lambda, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して, $a_p(x, \xi) = a(x, \xi) \psi_p(x, \xi)$ とおき, a_p を symbol 関数とする積分作用素を次で定義する.

$$(3.2) \quad A_p u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iS(x, \xi)} a_p(x, \xi) u(\xi) d\xi.$$

そのとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.2. $u(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする.

$$1) \quad A_p u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \quad \|A_p u\| \leq C \|u\|, \quad \text{ここで定数 } C \text{ は } p=(\lambda, \sigma) \text{ に依らない.}$$

$$3) \quad Au(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \iint_{|\lambda|+|\sigma| \leq j} A_{(\lambda, \sigma)} u(x) d\lambda d\sigma,$$

ここで, 極限值は各 x に対して存在し, かつその収束は $L^2(\mathbb{R}^n)$ の strong topology に関しても成り立つ.

それ故, 作用素 A が L^2 有界であるには, 次の命題を証明すればよい.

命題 3.3. 任意の compact 集合 $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して, 次の評価が成り立つ.

$$(3.3) \quad \left\| \int_K A_p u(x) dp \right\| \leq M \|u\|, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ここに, 定数 M は K と u のとり方に依らない正数.

命題 3.3 の証明は次の補題による (cf. Calderón-Vaillancourt [4]).

補題 3.4. 次の条件をみたす $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ 上の正値関数 $k(p, p')$

$k(p, p')$ が存在すると仮定.

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leq k(p, p')^2, \quad \|A_{p'}^* A_p\| \leq k(p, p')^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} k(p, p') dp \leq M, \quad \int_{\mathbb{R}^{2n}} k(p, p') dp' \leq M.$$

そのとき, 命題 3.3 の証明 (3.3) が同じ定数 M で成り立つ.

以下, 命題 3.3 の証明のあらすじ. (3.2) の作用素 A_p が補題 3.4 の条件をみたすことを証明しよう. $A_{p'}$ の adjoint operator $A_{p'}^*$ は次で与えられる.

$$A_{p'}^* v(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \overline{S(y, \xi)}} \overline{a_{p'}(y, \xi)} v(y) dy.$$

したがって, $A_p A_{p'}^*$ の積分核 $H_{p, p'}(x, y)$ は

$$(3.4) \quad H_{p, p'}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i[S(x, \xi) - \overline{S(y, \xi)}]} a_p(x, \xi) \overline{a_{p'}(y, \xi)} d\xi.$$

となる. 次で定義される order 1 の微分作用素 L を導入する.

$$L = \rho^{-2} \left(1 - i \min \{ \lambda(p), \lambda(p') \}^2 \nabla_{\xi} (\overline{S(x, \xi)} - S(y, \xi)) \cdot \nabla_{\xi} \right)$$

ここに,

$$\rho = \left(1 + \min \{ \lambda(p), \lambda(p') \}^2 | \nabla_{\xi} (S(x, \xi) - \overline{S(y, \xi)}) |^2 \right)^{1/2}.$$

$$L(e^{i(S(x, \xi) - \overline{S(y, \xi)})}) = e^{i(S(x, \xi) - \overline{S(y, \xi)})}$$

であるから, 部分積分を繰り返すことにより, (3.4) の左辺を次のように書きかえる.

$$(3.5) \quad H_{p,p'}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(S(x,\xi) - \overline{S(y,\xi)})} ({}^tL)^m(a_p \bar{a}_{p'}) d\xi, \quad m=0,1,2,\dots$$

ここに, tL は L の formal transposed operator. (3.5) を評価するための補題を二つ述べる.

補題 3.5. (cf. [1, Lemma 2.5]) $|({}^tL)^m(a_p \bar{a}_{p'})| \leq C_m p^{-m}, m=0,1,2,\dots$

補題 3.6. (cf. [1, Lemma 2.1]) 次の不等式が成立するような正の定数 δ_1 が存在する.

$$|\nabla_\xi(S_R(x,\xi) - \overline{S_R(y,\xi)})| \geq \delta_1 |x-y|.$$

そのとき, (3.5) を support の位置に注意して評価する.

補題 3.7. m を任意の非負整数とする. そのとき, 次の不等式が成立する.

$$|H_{p,p'}(x,y)| \leq C |a|_m^2 \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{\lambda(p)+\lambda(p')}\right) \chi_R\left(\frac{x-\lambda}{\lambda(p)^{1/2}}\right) \chi_R\left(\frac{y-\lambda'}{\lambda(p')^{1/2}}\right) \times \\ \times \frac{\min\{\lambda(p), \lambda(p')\}^m}{(1 + \min\{\lambda(p), \lambda(p')\}^2 |x-y|^2)^{m/2}}.$$

ここに, χ_R は半径 R の球体 $\{x; |x| \leq R\}$ の特性関数を表わす.

Schur の補題を適用し, 補題 3.7 の評価式から $\|A_p A_{p'}^*\|$ の評価を得る.

補題 3.8. 1) $|\sigma-\sigma'| \geq R(\lambda(p)+\lambda(p'))$ の場合, $A_p A_{p'}^* = 0$.
2) $|\sigma-\sigma'| \leq 2R(\lambda(p)+\lambda(p'))$ の場合,

$$c_i) \quad |\lambda - \lambda'| \leq 2R(\lambda(p)^{-1} + \lambda(p')^{-1}) \quad \text{if } \lambda \neq \lambda', \quad \|A_p A_{p'}^*\| \leq C |a|_m^2.$$

$$c_{ii}) \quad 2R(\lambda(p)^{-1} + \lambda(p')^{-1}) \leq |\lambda - \lambda'| \leq 2R(\varphi(p) + \varphi(p')) \quad \text{if } \lambda \neq \lambda',$$

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leq C |a|_m^2 (1 + \min\{\lambda(p), \lambda(p')\}^2 |\lambda - \lambda'|^2)^{-m/2}.$$

$$c_{iii}) \quad 2R(\varphi(p) + \varphi(p')) \leq |\lambda - \lambda'| \quad \text{if } \lambda \neq \lambda',$$

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leq C |a|_m^2 (1 + \min\{\Phi(p), \Phi(p')\} |\lambda - \lambda'|)^{-m/2}.$$

今、次のように正値関数 h_1, h_2, h_3, h を定義する。

$$h_1(p, p') = C |a|_m \chi_R\left(\frac{\sigma - \sigma'}{\lambda(p) + \lambda(p')}\right) \chi_R\left(\frac{\lambda - \lambda'}{2(\lambda(p)^{-1} + \lambda(p')^{-1})}\right)$$

$$h_2(p, p') = C |a|_m \chi_R\left(\frac{\sigma - \sigma'}{\lambda(p) + \lambda(p')}\right) (1 + \min\{\lambda(p), \lambda(p')\}^2 |\lambda - \lambda'|^2)^{-m/4}.$$

$$h_3(p, p') = C |a|_m \chi_R\left(\frac{\sigma - \sigma'}{\lambda(p) + \lambda(p')}\right) (1 + \min\{\Phi(p), \Phi(p')\} |\lambda - \lambda'|)^{-m/4}.$$

$$h(p, p') = h_1(p, p') + h_2(p, p') + h_3(p, p').$$

そのとき、補題 3.8 より、

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leq h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \leq (h_1 + h_2 + h_3)^2 = h(p, p')^2.$$

したがって、次に示すべきことは次の評価式がなりたつ事。

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} h_i(p, p') dp \leq M \quad i=1, 2, 3.$$

まず、 h_1, h_2 の support について、 $\Phi(p) \approx \Phi(p'), \varphi(p) \approx \varphi(p')$ であることに注意する。よって、 $\lambda(p) \approx \lambda(p')$ 。そのとき、

$$h_1(p, p') \leq C |a|_m \chi_R \left(\frac{\sigma - \sigma'}{C \lambda(p')} \right) \chi_R \left(\frac{\delta - \delta'}{C \lambda(p')^{-1}} \right)$$

が成り立つから, $\int h_1(p, p') dp \leq C |a|_m$.

また,

$$h_2(p, p') \leq C |a|_m \chi_R \left(\frac{\sigma - \sigma'}{C \lambda(p')} \right) (1 + C \lambda(p')^2 |\delta - \delta'|^2)^{-m/4}$$

故,

$$\begin{aligned} \int h_2(p, p') dp &\leq C |a|_m \int \chi_R \left(\frac{\sigma - \sigma'}{C \lambda(p')} \right) d\sigma \int \frac{d\delta}{(1 + C \lambda(p')^2 |\delta - \delta'|^2)^{m/4}} \\ &\leq C |a|_m \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\delta''}{(1 + |\delta''|^2)^{m/4}} \end{aligned}$$

$m > 2n$ ならば, 右辺の積分は収束し, p' に依らずである.

次に, $\int h_3(p, p') dp$ について考える.

$$\int h_3(p, p') dp = \int_{\Phi(p) \leq \Phi(p')} + \int_{\Phi(p) \geq \Phi(p')} \equiv I_1 + I_2$$

と積分領域を二つに分ける.

I_1 の integrand の support において, $\Phi(\delta', \sigma) \approx \Phi(\delta, \sigma)$ に注意する.

また, (2.7) の (iii) より,

$$\Phi(\delta', \sigma) \leq C \Phi(\delta, \sigma) (1 + \Phi(\delta, \sigma) |\delta - \delta'|)^N$$

が成り立つ. $\delta \in p''$ と,

$$\begin{aligned} 1 + \Phi(\delta', \sigma) |\delta - \delta'| &\leq C (1 + \Phi(\delta', \sigma) |\delta - \delta'|) \\ &\leq C (1 + \Phi(\delta, \sigma) |\delta - \delta'|)^{N+1}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C |a|_m \times \int \chi_R \left(\frac{\sigma - \sigma'}{2\Phi(p')} \right) (1 + \Phi(s, \sigma) |s - s'|)^{-m/4} ds d\sigma \\
&\leq C |a|_m \times \int \chi_R \left(\frac{\sigma - \sigma'}{2\Phi(s', \sigma')} \right) (1 + \Phi(s', \sigma') |s - s'|)^{-m/4(N+1)} ds d\sigma \\
&\leq C |a|_m \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |s''|)^{-m/4(N+1)} ds''
\end{aligned}$$

これは, $m > 4n(N+1)$ のとき, 有限で p' に依らない.

次に, I_2 の integrand の support においては, $\Phi(s, \sigma) \approx \Phi(s', \sigma)$.

また, (2.1) の (iii) より,

$$\Phi(s, \sigma') \leq C \Phi(s', \sigma') (1 + \Phi(s', \sigma') |s - s'|)^N.$$

よって,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C |a|_m \int \chi_R \left(\frac{\sigma - \sigma'}{2\Phi(p)} \right) (1 + \Phi(p) |s - s'|)^{-m/4} ds d\sigma \\
&\leq C |a|_m \int \frac{ds}{(1 + \Phi(s', \sigma') |s - s'|)^{m/4}} \int \chi_R \left(\frac{\sigma - \sigma'}{C \Phi(s, \sigma')} \right) d\sigma \\
&= C |a|_m \int \frac{\Phi(s', \sigma')^m}{(1 + \Phi(s', \sigma') |s - s'|)^{m/4}} ds \\
&\leq C |a|_m \int \frac{\Phi(s', \sigma')^m}{(1 + \Phi(s', \sigma') |s - s'|)^{\frac{m}{4} - Nm}} ds \\
&= C |a|_m \int_{\mathbb{R}^n} \frac{ds''}{(1 + |s''|)^{\frac{m}{4} - Nm}}
\end{aligned}$$

$\frac{m}{4} - Nm > n$ となる, $m > 4n(1+N)$ ならば, 右辺は

収束し, かつ, p' に依らない定数. したがって, $m > 4n(1+N)$ ならば,

$$\int h_3(p, p') dp \leq C |a|_m.$$

$\|A_p^* A_p\|$ の評価についても、同様に行なうことができる。
 (したがって、命題 3.3 の評価 (3.3) が $M = C|a|_m$ ($m > 4n(1+N)$)
 で成り立つことがわかる。

References

- [1] Asada, K. - Fujiwara, D., On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Japanese J. Math. vol. 4, 299-361 (1978).
- [2] Beals, R. - Fefferman, C., Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, I. Comm. Pure Appl. Math. vol. 27, 1-24 (1974).
- [3] Beals, R., A general calculus of pseudodifferential operators. Duke Math. J. vol 42, 1-42 (1975).
- [4] Calderón, A.P. - Vaillancourt, R., A class of bounded pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. vol. 69, 1185-1187 (1972).
- [5] Danilov, V.G., Estimates for pseudodifferential canonical operators with complex phases. Dokl. Akad. Nauk SSSR vol. 224, 800-804 (1979) (in Russian).
- [6] Eskin, G.I., The Cauchy problem for hyperbolic system in convolutions. Math. USSR Sb. vol. 3, 243-277 (1967).
- [7] Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with highly oscillatory kernels. Proc. Japan Acad. vol. 51, 96-99 (1975).

- [8] -----, A global version of Eskin's theorem.
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, vol. 24, 327-340
(1977).
- [9] -----, A construction of the fundamental solution
for Schrödinger equation. J. d'Analyse Math. vol. 35,
41-96 (1979).
- [10] Hörmander, L., Fourier integral operators, I. Acta Math.
vol. 127, 79-183 (1971).
- [11] -----, The Weyl calculus of pseudo-differential
operators. Comm. Pure Appl. Math. vol. 32, 359-443
(1979).
- [12] Kumano-go, H., A calculus of Fourier integral operators
on $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of
hyperbolic type. Comm. in Partial Differential Equations.
vol. 1, 1-44 (1976).