

$U(n, n)$ のある既約ユニタリ表現の幾何的実現とペンローズ変換

東京大学数理科学研究科 関口英子 (HIDEKO SEKIGUCHI)

ABSTRACT.

この報告集で述べた主定理では $U(n, n)$ の無限次元表現の二つの異なる幾何的実現, すなわち, 非コンパクト複素等質多様体上の Dolbeault コホモロジー群から AIII 型の有界対称領域上の正則関数の空間の間の intertwining operator としてペンローズ変換を構成した。ペンローズ変換の像は $k+1$ 次の偏微分方程式系 (M_k) を満たすことを示し, その具体的な形を与えた。逆に, 微分方程式系 (M_k) の任意の解は, ペンローズ変換の像として unique に得られることも概均質ベクトル空間の理論を使って証明した。さらに, 青本-Gelfand の超幾何微分方程式系の高階の系への拡張と有界対称領域上のすべての正則解の構成が Penrose 変換で行えることを示す。

はじめに複素グラスマン多様体 $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ の定義を復習しよう。複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{2n}$ の k 次元部分空間全体は $k(2n-k)$ 次元のコンパクトな複素多様体である。これをグラスマン多様体 $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ と表す。一般線型群 $GL(2n, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{2n}$ に線型に作用するので, k 次元部分空間を k 次元部分空間に移す。すなわち, $GL(2n, \mathbb{C})$ はグラスマン多様体に作用する。この作用は推移的であり, 従ってグラスマン多様体 $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ は, $GL(2n, \mathbb{C})$ の等質多様体となる。 $\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$ の固定部分群を $Q(k)$ とすると,

$$Gr_k(\mathbb{C}^{2n}) \simeq GL(2n, \mathbb{C})/Q(k) =: G_{\mathbb{C}}/Q(k)$$

と表せる。ここで,

$$Q(k) := \{g = (g_{ij}) \in GL(2n, \mathbb{C}) : g_{ij} = 0, k+1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq k\}$$

である。 $Q(k)$ は $GL(k, \mathbb{C}) \times GL(2n-k, \mathbb{C})$ を Levi 部分群とする $GL(2n, \mathbb{C})$ の極大放物型部分群である。

次に, $\mathbb{C}^{2n}$ に符号 (n, n) の不定値エルミート形式

$$(z, y)_{n,n} := z_1 \overline{y_1} + \cdots + z_n \overline{y_n} - z_{n+1} \overline{y_{n+1}} - \cdots - z_{2n} \overline{y_{2n}}$$

を入れる。この不定値エルミート形式 $(\cdot, \cdot)_{n,n}$ を不変にする $GL(2n, \mathbb{C})$ の部分群を $G := U(n, n)$ とする。すなわち, $U(n, n)$ は

$$G := U(n, n) = \left\{ g \in GL(2n, \mathbb{C}) : g^* \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \right\}$$

で与えられる簡約リー群である。

整数 k を $0 \leq k \leq n$ ととる。さて, k 次元部分空間にこの不定値エルミート形式を制限したとき, 正定値になるような k 次元部分空間全体の集合は $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ の開集合となる。 $W := \sum_{j=1}^k \mathbb{C} e_j$ に上の不定値エルミート形式を制限すると, $0 \leq k \leq n$ のとき正定値なので, この開集合は空ではない。この開集合には $U(n, n)$ が作用し, かつ, この作用が推移的であることは線型代数の簡単な議論で分かる。 $W := \sum_{j=1}^k \mathbb{C} e_j (\in Gr_k(\mathbb{C}^{2n}))$ における $U(n, n)$ の固定部分群を $L(k) = U(k) \times U(n-k, n)$ と書く。従って, この開集合は $G/L(k) = U(n, n)/U(k) \times U(n-k, n)$ と表される。このようにして,

$$G/L(k) \subset G_{\mathbb{C}}/Q(k)$$

という open embedding ができる。これはエルミート対称空間に関する Borel embedding の一般化である。(今の場合, $G/L(k)$ は不定値エルミート計量をもつ半単純対称空間になっている。)

特に, $n = k = 1$ の場合はよく知られた埋め込み

$$U(1, 1)/U(1) \times U(1) \subset GL(2, \mathbb{C}) / \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$\simeq$

$\parallel \simeq$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

$$P^1 \mathbb{C}$$

単位円板

ガウス球面

となる。

$G_{\mathbb{C}}/Q(k)$ の開集合として複素構造を $G/L(k)$ に定義すると、この複素構造は G -不変である。このようにして非コンパクトな複素等質多様体 $G/L(k)$ が得られた。

次に $L(k)$ の 1 次元表現を定義する。 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して、

$$\nu_m^{(k)}: L(k) \simeq U(k) \times U(n-k, n) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto (\det a)^m$$

とする。但し、 $a \in U(k)$, $d \in U(n-k, n)$ である。簡単のため、この一次元表現 $(\nu_m^{(k)}, \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}_m$ と書くことにする。

定理.

i) G の作用と可換な連続写像

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \rightarrow \mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k)$$

が構成される。

ii) $\mathcal{R}$ は単射である。

iii) $\mathcal{R} \cdot H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \subset \text{Sol}(\mathcal{M}_k)$. ここで、 $\text{Sol}(\mathcal{M}_k)$ は以下で定義する偏微分方程式系の大域解の空間である。

iv) $\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)_K \simeq \text{Sol}(\mathcal{M}_k)_K$ は全単射写像を与える。

注意. (iv) の結果より、

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \simeq \text{Sol}(\mathcal{M}_k)$$

なる全単射が得られる (Schmid の maximal globalization の結果を使う)。

§1. 歴史

有界対称領域や最高ウェイト加群自身についてはいろいろな文献があるが、ここでは幾何的実現を結び付ける intertwining operator であるペンローズ変換に関連したいろいろな人の結果を簡単に紹介する。

重力場のない場の方程式についてペンローズは, twistor construction といわれる方法で, 一気に多くの解を見つけた ([P])。

定式化

ペンローズの構成を数学的に整備したのが, Eastwood-Penrose-Wells ([EPW]) でこれは今回の主結果の $n = 2, k = 1$ の場合, すなわち, $G = U(2, 2), L = U(1) \times U(1, 2)$ の場合となる。最近のサーベイでは, Eastwood の [E] がある。

ペンローズ変換に関する文献の多くは, ペンローズ変換が単射かどうか, 像がどういう微分方程式を満たすかについてであり, 全射性, すなわち, 与えられた微分方程式の解の全てがペンローズ変換の像として書けるという方はあまり文献がないようである。

単射性

単射性は先の [EPW], [Ma1], [Gi] が示している。また, [P-R] は代数幾何的な証明で小平- Spencer の変形理論を用いた証明をしているようである。

像の満たす微分方程式系

ペンローズ変換の像がある微分方程式を満たしているという証明は, 先の [EPW] がある。また, Mantini の一連の論文 ([Ma1], [Ma3]) では, 最高ウェイトベクトルのペンローズ変換の像の積分公式等を用いて示し, Gindikin は積分幾何的な手法で示している ([Gi])。

全射性

ペンローズ変換の全射性については, 次元の低い場合, すなわち, $n = 2, k = 1$ の場合に 2 通りの証明が知られている。その 1 つは Eastwood-Penrose-Wells の結果で相対コホモロジーを用いるものであり ([EPW]), もう 1 つは Gindikin の積分幾何の手法で逆変換を構成するものである ([Gi])。

§2. $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$ の定義

Dolbeault コホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$ の定義をする。まず複体を定義する。 $L(k) = U(k) \times U(n-k, n)$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_n$ とは最初の factor $U(k)$ の $\det$ の n 乗という表現であったが、これに随伴した $G/L(k)$ 上の正則直線束を

$$\begin{array}{c} G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n \\ \downarrow \\ G/L(k) \end{array}$$

とする。このベクトル束の正則切断の作る芽の層のコホモロジーは、Dolbeault の補題によって、Dolbeault コホモロジーと同型である。 j 次 Dolbeault コホモロジーを

$$H_{\bar{\partial}}^j(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$$

と表そう。上の正則直線束は G -共変なので、このコホモロジーは G の表現空間となる。(一般には、無限次元である。)

Dolbeault コホモロジーを定義する複体を表現論的な言葉で表しておこう。ここで

$$T^{1,0*}(G/L(k)) : G/L(k) \text{ 上の余接束}$$

$$\wedge^{i,j}(T^*(G/L(k))) : \text{正則余接束の } i \text{ 次の外積束と}$$

$$\text{反正則余接束の } j \text{ 次の外積束のテンソル積}$$

とすると、それぞれ随伴ベクトル束として

$$\begin{aligned} T^{1,0*}(G/L(k)) &= G \times_{L(k)} u \\ \wedge^{i,j}(T^*(G/L(k))) &= G \times_{L(k)} (\wedge^i u \otimes \wedge^j \bar{u}) \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$u := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X \in M(k, 2n-k; \mathbb{C}) \right\}$$

$$\bar{u} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} : X \in M(2n-k, k; \mathbb{C}) \right\}$$

とする。

直線束と余接束のテンソル積は

$$(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \otimes (\wedge^{i,j}(T^*(G/L(k)))) = G \times_{L(k)} (\mathbb{C}_n \otimes \wedge^i u \otimes \wedge^j \bar{u})$$

として表される。

$$\begin{aligned} & C^{i,j}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \\ &= \{f \in C^\infty(G \times_{L(k)} (\mathbb{C}_n \otimes \wedge^i u \otimes \wedge^j \bar{u})) \\ & : f(gl) = \det^{-n}(l) \otimes \wedge^i \text{Ad}(l^{-1})|_u \otimes \wedge^j \text{Ad}(l^{-1})|_{\bar{u}} f(g) \ (l \in L(k))\} \end{aligned}$$

とする。 $\bar{\partial}: C^{i,j}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \rightarrow C^{i,j+1}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$ によって, $\{C^{i,*}, \bar{\partial}\}$ は複体となる。このコホモロジーを $H^{i,j}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$ と書く。特に, $H^{0,j}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) = H_{\bar{\partial}}^j(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$ が我々の扱うコホモロジー空間である。

$H_{\bar{\partial}}^j(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$ は G の Frechét 表現になっているが, $j \neq k(n-k)$ ならば $H_{\bar{\partial}}^j(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) = 0$ であり, $j = k(n-k)$ ならば $H_{\bar{\partial}}^j(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$ の Harish-Chandra 加群を Vogan-Zuckerman の右導来関手加群で表すと

$$H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)_K \simeq A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{k(n-k)}(\mathbb{C}_{\lambda+\rho(u)})$$

となること, Schmid, Wong, Vogan の結果 ([Sch1], [Wo], [Vo]) より分かる ([Ko3] 参照)。パラメータの正規化は, いろいろな流儀があるが, ここでは $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^*$

は $[V_0]$ の正規化を採用している。ここで

$$\lambda = (\underbrace{-n+k, \dots, -n+k}_k, \underbrace{k, \dots, k}_{2n-k}),$$

$$\lambda + \rho(u) = \frac{1}{2}k1_{2n},$$

$$\lambda + 2\rho(u) = (\underbrace{n, \dots, n}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-k})$$

とした。

§3. $Sol(\mathcal{M}_k)$ の定義

$G/K = U(n, n)/U(n) \times U(n)$ は有界対称領域として

$$G/K \simeq D := \{Z \in M(n, \mathbb{C}) : I_n - Z^*Z \gg 0\}$$

と表される。 $n = k = 1$ の場合は,

$$U(1, 1)/U(1) \times U(1) \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

となるので一般の場合は $n = k = 1$ の高次元化となっている。 $G/K \simeq D$ の作用を

$$G \curvearrowright D \simeq G/K$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : Z \mapsto (c + dZ)(a + bZ)^{-1}$$

G/K はユークリッド空間と微分同相なので, G/K 上の直線束は global に自明化できる。実際, G/K と有界対称領域 D を先に同一視したやり方は, Bruhat 分解を用いて, G/K から複素リー環のべき零リー環への切断によって定義したが, この写像によって直線束 $G \times_K \mathbb{C}_k$ は D 上自明化することができる。自明化は

正則なカテゴリーで行われるので, C^∞ -切断, 正則切断のそれぞれについて

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k) & \simeq & C^\infty(D) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{O}(G \times_K \mathbb{C}_k) & \simeq & \mathcal{O}(D) \end{array}$$

という函数空間の同一視を行うことができる。 G -共変な直線束 $G \times_K \mathbb{C}_k \rightarrow G/K$ の C^∞ -切断の空間 $\mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k)$ には, G が函数の引き戻しとして作用する。同型写像 $\mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k) \simeq C^\infty(D)$ を通じて, この作用を $C^\infty(D)$ に定義すると, $g^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(n, n) \text{ に対して}$$

$$\tilde{\pi}_{n,k}(g)F(Z) = \det(a + bZ)^{-k} F((c + dZ)(a + bZ)^{-1})$$

となる。このようにして, $G = U(n, n)$ の無限次元表現 $(\tilde{\pi}_{n,k}, C^\infty(D))$ が $k \in \mathbb{Z}$ に対して定義された ($k \in \mathbb{C}$ では, $U(n, n)$ の普遍被覆群の表現としては, 定義される。なお, 以下では $k = 0, \dots, n$ を主に扱う)。

D の global な座標を $(z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする。 $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ をそれぞれ $k+1$ 個の元からなる部分集合とすると D 上の $k+1$ 階の偏微分作用素 $P(I, J)$ を

$$P(I, J) = \det \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)_{i \in I, j \in J}$$

で定義する。更に, $F \in C^\infty(D)$ に対し, 微分方程式系 $(\mathcal{M}_k)$ を

$$(\mathcal{M}_k) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} F(Z) = 0 & (1 \leq i, j \leq n) & (\mathcal{M}_{k-1}) \\ P(I, J)F(Z) = 0 & I, J \subset \{1, \dots, n\} \mid |I| = |J| = k+1 & (\mathcal{M}_{k-2}) \end{cases}$$

と定義する。最初の偏微分方程式は Cauchy-Riemann の微分方程式なので, $(\mathcal{M}_k)$ の解は D 上の正則函数であることに注意しよう。

注意. 定義で $k = 0, n$ の両極端な場合を考えよう。

f が $(\mathcal{M}_n)$ を満たす。⇔ f は正則函数。

f が $(\mathcal{M}_0)$ を満たす。⇔ f は定数。

$(\mathcal{M}_k)$ を満たす解の空間を

$$\text{Sol}(\mathcal{M}_k) := \{F \in C^\infty(D) : F \text{ は } (\mathcal{M}_k) \text{ の解}\} \subset \mathcal{O}(D)$$

とする。

注意. Laplace の展開公式より

$$\mathbb{C} = \text{Sol}(\mathcal{M}_0) \subset \text{Sol}(\mathcal{M}_1) \subset \cdots \subset \text{Sol}(\mathcal{M}_n) = \mathcal{O}(D)$$

注意. $n = 2, k = 1$ のとき, 簡単のために $\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書けば,

$$(\mathcal{M}_1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial d} - \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \right) F = 0$$

なる微分方程式となる。

注意. n を一般, $k = 1$ にすると, $(\mathcal{M}_1)$ は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{il} \partial z_{jm}} - \frac{\partial^2}{\partial z_{im} \partial z_{jl}} \right) F = 0 \quad (1 \leq i, j, l, m \leq n)$$

となり, これは 青本-Gelfand の超幾何微分方程式の主要部分を形作っている。

本来の形の Gelfand の超幾何微分方程式にするためには, G の Cartan 部分群の指標を一つ定め, それに従う解 (この条件は容易に一階の微分方程式で表される) を取り出せば良い。Penrose 変換は G -共変なので, 我々の主定理より, すべての解は同じ指標に従う Dolbeault コホモロジーの空間の Penrose 変換の像として得られる。 k が 1 より大きいときも, この一般化された超幾何微分方程式の解空間は有限次元である ([Ko4] Theorem 4.1 より直ちに従う)。

§4. ペンローズ変換の定義

非コンパクトな複素多様体 $G/L(k)$ は, コンパクトな複素多様体である Grassmann 多様体 $K/L(k) \cap K$ を部分多様体として含む。この埋め込み写像を

$$i: K/L(k) \cap K \rightarrow G/L(k), \quad x(L(k) \cap K) \mapsto xL(k)$$

と名付けよう。各 $g \in G$ に対して左移動

$$l_g: G/L(k) \rightarrow G/L(k) \quad xL(k) \mapsto gxL(k)$$

と定義する。このとき、写像 $\tilde{\mathcal{R}}$ を

$$\tilde{\mathcal{R}}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)} \times G \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K \times \mathbb{C}_n)_{L(k) \cap K} \quad ([\omega], g) \mapsto [i^* l_g^* \omega]$$

で定義する。この写像は、 $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)}$ の代表元 ω をとって、 $g \in G$ の左移動で引き戻し、コンパクト部分多様体に制限してコホモロジークラスをとるというものである。この ω が $\bar{\partial}$ -closed ならば、 $i^* l_g^* \omega$ も $\bar{\partial}$ -closed、また ω が $\bar{\partial}$ -exact ならば、 $i^* l_g^* \omega$ も $\bar{\partial}$ -exact である。従って、 $\tilde{\mathcal{R}}$ はコホモロジークラスの空間 $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)}$ からコホモロジークラスの空間 $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K \times \mathbb{C}_n)_{L(k) \cap K}$ への写像として well-defined である。

$\tilde{\mathcal{R}}$ は見方を変えてみると、コホモロジークラス $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)}$ から G 上の

$H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K \times \mathbb{C}_n)_{L(k) \cap K}$ -値の関数としてみなすことができる。 $\tilde{\mathcal{R}}$ は右からの K の作用を次の意味で保つ:

$$\tilde{\mathcal{R}}([\omega], gh) = h^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{R}}([\omega], g) \quad (h \in K).$$

ここで、 $h^{-1} \cdot ()$ は K の $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K \times \mathbb{C}_n)_{L(k) \cap K}$ への自然な作用である。すなわ

ち、 $\tilde{\mathcal{R}}([\omega], \cdot)$ は $G \times \mathbb{C}_n / K \rightarrow G/K$ の切断を与える。従って、

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)} \rightarrow \mathcal{E}(G \times H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K \times \mathbb{C}_n)_{L(k) \cap K}) \quad [\omega] \mapsto \tilde{\mathcal{R}}([\omega], \cdot)$$

が定義された。

$H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)}$, $\mathcal{E}(G \times H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K \times \mathbb{C}_n)_{L(k) \cap K})$ はそれぞれ自然に G の表現空間となっているが、定義より $\mathcal{R}$ は G -intertwining operator であることが容易に分かる。またコンパクト群に関する Borel-Weil-Bott の定理より $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K \times \mathbb{C}_n)_{L(k) \cap K}$ は $K = U(n) \times U(n)$ の表現として、 $(\det)^k \boxtimes 1 \equiv$

$(\nu_k^{(n)}, \mathbb{C}): U(n) \times U(n) \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$ という 1 次元表現と同型である。この表現は $\mathbb{C}_k$ と略記するという約束だったので、この記法を使うと Penrose 変換

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \rightarrow \mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k)$$

が定義された。

§5. 定理の意味

この定理の意味をいくつかの側面から眺めてみよう。

1)

Dolbeault コホモロジーによる実現

… 特異な無限小指標をもつ既約ユニタリ最高ウェイト表現

↓

有界対称領域上の正則直線束の正則切断の空間

… 既約とは限らない表現

定理では、上の 2 つの表現の幾何的実現を結びつける写像を具体的に構成したことになる。

2) パラメータをもつ微分方程式系 — 特異パラメータにおける Schmid operator を補う微分作用素

Schmid あるいは 堀田先生-Parthasarathy らの結果によって、離散系列表現はリーマン対称空間上の G -共変なベクトル束の切断に作用する一階の楕円型微分方程式の解の空間として実現される。しかし離散系列のパラメータをずらしていったら、パラメータを limit of discrete series よりもっと特異なところにもっていくと、対応する表現空間はそれにつれて小さくなると期待される。従って、そこに属する関数はよりたくさんの微分方程式を満たすようになると期待される。この報告集で述べた主定理は、極めて特別な場合ではあるが、この現象を具

体的な方程式で定式化したと解釈できる。すなわち、ペンローズ変換の像の満たす微分方程式のうち、

Cauchy-Riemann 方程式 $\cdots$ Schmid operator

偏微分方程式系 $(M_{k-2}) \cdots$ Schmid operator を補う微分方程式

となっている。

表現論的に言うと正則離散系列の coherent family を考えて、パラメータが limit of discrete series よりもっと特異になっても、そのパラメータに対応する表現はしばらくはユニタリ化可能になることが知られている。このパラメータは Wallach set と呼ばれている。今扱っている設定では ペンローズ変換の像として表される表現が Wallach set に対応するユニタリ表現である、ということを主張している。

3) 偏微分方程式の解の構成

積分変換を使って偏微分方程式のすべての解を構成するということは大域解析における基本問題である。この問題は積分幾何における主たる問題の一つであった。1938 ([J]) に、F. John は ultra-hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial d} - \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} = 0$$

のすべての解を積分変換

$$f(x, y, z) \mapsto F_f(a, b, c, d) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, at + b, ct + d) dt.$$

の像として構成した。

リーマン対称空間 G/K に対する Poisson 変換は hyperfunction 値の spherical principal series (すなわち “境界” 上の函数) から G/K 上の偏微分方程式のすべての解の空間の上への積分変換であるという別の例になっている。

上で述べた例は積分変換によって

{ 多様体 N 上の 全ての 函数 }

$\rightarrow$ { 多様体 M 上の偏微分方程式の 全ての 解 }.

の全単射を与えていることに注目しよう。この定式化では、次元に関する不等式 $\dim N < \dim M$ が自然に要請されている。

この論文では、上の定式化に沿って言えば古典型有界対称領域 $AIII$

$$M := \{Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n, \mathbb{C}) : I_n - Z^* Z \gg 0\}.$$

上の偏微分方程式系 $(\mathcal{M}_k)$ の 全ての 解を構成する積分変換の一つの例を与える。実際、 $0 \leq k \leq n$ となる整数 k を 1 つ選び、偏微分方程式系 $(\mathcal{M}_k)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} F(Z) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n) \\ \det \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)_{i \in I, j \in J} F(Z) = 0 \quad I, J \subset \{1, \dots, n\} \quad |I| = |J| = k+1 \end{array} \right. \quad (\mathcal{M}_{k-1})$$

$$\left\{ \det \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)_{i \in I, j \in J} F(Z) = 0 \quad I, J \subset \{1, \dots, n\} \quad |I| = |J| = k+1 \right. \quad (\mathcal{M}_{k-2})$$

を考えたのであった。 $k=1$ のとき、 $(\mathcal{M}_{k-2})=(\mathcal{M}_{1-2})$ は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{il} \partial z_{jm}} - \frac{\partial^2}{\partial z_{im} \partial z_{jl}} \right) F(Z) = 0$$

という形の微分方程式系である。このような系に群作用で定義される簡単な一階の微分作用素をつけ加えたものは Gelfand による“多変数超幾何函数”の関係で最近集中的に研究されている。 $k \geq 2$ ならば、Gelfand の超幾何函数の高次元化と解釈できる。従って、我々の主定理は、系 $(\mathcal{M}_k)$ の全ての解の積分変換による構成法を与えたと解釈することもできる。

REFERENCES

- [BE] R.J.Baston, M.G.Eastwood, *The Penrose Transform; its Interaction with Representation Theory*, Oxford University Press, 1989.
- [BB] A.Beilinson and J.Bernstein, *Localisation de g-modules*, C. R. Acad. Sci. Paris (1981), 15-18.
- [E] M.Eastwood, *Introduction to Penrose transform*, Contemp. Math. 154 (1993), 71-75.
- [EPW] M.Eastwood, R.Penrose, R.O.Wells, Jr., *Cohomology and massless fields*, Comm. Math. Phys. 78 (1981), 305-351.

- [Gi] S.Gindikin, *Lectures on integral geometry and the Penrose transform* (at University of Tokyo) (1994).
- [Hel] S.Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, vol. 80, Academic Press, 1978.
- [J] F.John, *The ultra hyperbolic differential equation with four independent variables*, Duke Math. J. 4 (1938), 300-322.
- [Ko1] T.Kobayashi, *Singular Unitary Representations and Discrete Series for Indefinite Stiefel Manifolds $U(p, q; \mathbb{F})/U(p-m, q; \mathbb{F})$* , vol. 462, Memoirs A. M. S., 1992.
- [Ko2] ———, *Lectures on spherical functions* (1991); *Lectures on cohomologies of Lie algebras and the Borel-Weil-Bott-Kostant theorem* (1992) (at University of Tokyo).
- [Ko3] ———, 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現論, 数学 46 (1994), 岩波書店, 124-143.
- [Ko4] T.Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math. (1994).
- [Ma1] L.Mantini, *An integral transform in L^2 -cohomology for the ladder representations of $U(p, q)$* , J. Funct. Anal. 60 (1985), 211-242.
- [Ma2] ———, *An L^2 -cohomology analogue of the Penrose transform for the oscillator representation*, Contemporary Mathematics 63 (1987), 221-243.
- [Ma3] ———, *An L^2 -cohomology construction of negative spin mass zero equations for $U(p, q)$* , J. Mathematical Analysis and Applications 136 (1988), 419-449.
- [Ma4] ———, *An L^2 -cohomology construction of unitary highest weight modules for $U(p, q)$* , Trans. A. M. S. 323 (1991), 583-603.
- [P-R] C.M.Patton, H.Rossi, *Unitary structures on cohomology*, Trans. of A. M. S. 290 (1985), 235-258.
- [P] R.Penrose, *Twistor algebra*, J. Math. Phys. 8 (1967), 345-366.
- [Sa] M.Sato, 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み 15-1 (1970), 85-156.
- [Sch1] W.Schmid, *Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups*, Ph.D. Thesis, U.C.Berkeley (1967).
- [Sch2] ———, *Boundary value problems for group invariant differential equations*, Société Mathématique de France Astérisque, Numéro Hors Série (1985), 311-321.
- [Se] H.Sekiguchi, *The Penrose Transform for certain non-compact homogeneous manifolds of $U(n, n)$* , Ph.D. Thesis, U. Tokyo (1995 January).
- [Vo] D.Vogan, *Unitary Representations of Reductive Lie Groups*, Ann. Math. Stud. 118, Princeton U.P., 1987.
- [Wal] N.R.Wallach, *The analytic continuation of the discrete series. I, II*, Trans. A. M. S. 251 (1979), 1-17, 19-37.
- [We1] R.O.Wells, Jr., *Complex manifolds and mathematical physics*, Bull. A. M. S. (New Series) 1-2 (1979), 296-336.
- [We2] ———, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, G. T. M., vol. 65, Springer-Verlag, 1980.
- [Wo] H.Wong, *Dolbeault cohomologies and Zuckerman modules associated with finite rank representations*, Ph.D. dissertation, Harvard University (1991).